ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского"

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

А.В. Букушева, А.В. Гохман, М.В. Лосик

Саратов
2013

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно курс аналитической геометрии на механико-математическом факультете СГУ начинается изложением векторной алгебры. Это позволяет очень компактно ввести все основные понятия и формулы аналитической геометрии. Однако значение векторной алгебры далеко выходит за пределы ее применений в аналитической геометрии. Не говоря уже о применениях векторной алгебры в механике и физике, она может рассматриваться как отправной пункт для введения и изучения общего понятия n-мерного векторного и евклидова пространства, а затем и гильбертова пространства. Обычно задачи по векторной алгебре включаются в сборники задач по аналитической геометрии, что создает впечатление их вторичности по отношению к аналитической геометрии. Поэтому естественно, что данный сборник задач ограничивается только задачами по векторной алгебры.

Сборник задач является учебным пособием по курсу аналитической геометрии для студентов математических и физических специальностей и направлений подготовки 010200 Математика и компьютерные науки, 010400 Прикладная математика и информатика, 010800 Механика и математическое моделирование, 011200 Физика и т.д.. Фактически он является модифицированной версией сборника задач по векторной алгебре, изданного в СГУ в 1974 г. и написанного коллективом авторов в составе А.В.Гохмана, Н.И.Кабанова, Ю.К.Коноплевой, М.В.Лосика и М.А.Спивака под редакцией Ю.И.Пензова и Н.Ф.Ржехиной. Изменения коснулись в основном теоретических разделов, была принята более современная терминология и теоретические разделы разных параграфов были унифицированы. Поскольку этот сборник задач постоянно применяется в преподавании, а прежнее издание физически почти исчезло, то его издание представляется целесообразным.

1. АФФИННЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ

Связанным вектором называется упорядоченная пара точек (A, B), точка A называется началом, точка B – концом. Если начало и конец связанного вектора совпадают, то он называется нулевым. На рисунке связанный вектор изображается отрезком прямой, соединяющим его начало и конец, со стрелкой у его конца (рис. 1.).

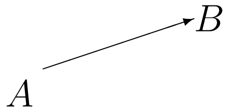

Рис. 1

Длиной (*модулем*) связанного вектора называется расстояние между его началом и концом. *Направлением* ненулевого связанного вектора называется направление луча, вершина которого совпадает с началом вектора и который содержит конец вектора. Направление нулевого связанного вектора считается произвольным.

Свободным вектором называется множество всех связанных векторов, длина и направление которых совпадают соответственно с длиной и направлением некоторого связанного вектора. Каждый связанный вектор, принадлежащий данному свободному вектору, называется *представителем* последнего.

Свободные векторы обозначаются буквами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Свободный вектор, содержащий связанный вектор (A, B), обозначается также $\overrightarrow{AB}$. Свободный вектор состоит из бесчисленного множества связанных векторов, причем из каждой точки исходит точно один его представитель. Любым его представителем свободный вектор полностью определяется. Все нулевые связанные векторы образуют один свободный вектор, который называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. На рисунке свободный вектор условно изображается каким-либо его представителем.

Длиной и направлением свободного вектора называется соответственно длина и направление любого его представителя. Длина свободных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\vec{a}|$ или a.

В дальнейшем свободные векторы называются кратко *векторами*.

Признак равенства векторов. Два вектора равны тогда и только тогда, когда их длины и направления совпадают.

Противоположным для вектора $\vec{a}$ называется вектор той же длины и противоположного направления, обозначается он $-\vec{a}$. Два или большее число векторов называются *коллинеарными*, если их представители с общим началом лежат на одной прямой. Три или большее число векторов называются *компланарными*, если их представители с общим началом лежат в одной плоскости. Коллинеарность, одинаковая направленность и противоположная направленность векторов обозначаются соответственно символами $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается символом $Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Сложение векторов. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть (O, A) – представитель вектора $\vec{a}$ с началом в точке O, (A, B) представитель вектора $\vec{b}$ с началом в точке A. Тогда суммой $\vec{a} + \vec{b}$ будет вектор $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2):

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

Чтобы найти сумму n векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, нужно взять, во-первых, представитель $(O,\ A_1)$ вектора $\vec{a}_1$ с началом в некоторой точке O, во-вторых, представитель $(A_1,\ A_2)$ вектора $\vec{a}_2$ с началом в точке A_2 и т. д. до последнего вектора $\vec{a}_n$. Тогда вектор, определяемый точкой O и концом взятого представителя $\vec{a}_n$, будет искомой суммой $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$ (правило многоугольника). На рис. 3 показано сложение четырех векторов: $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

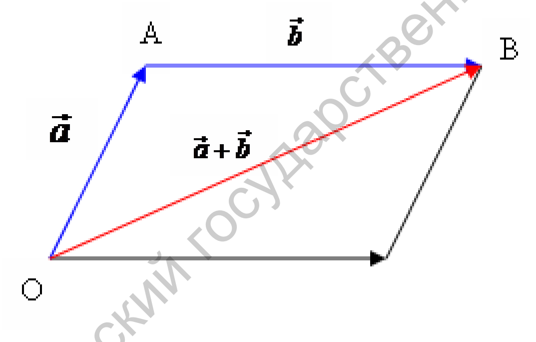

Рис. 2

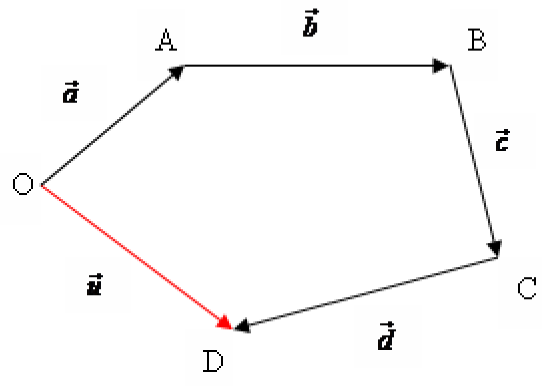

Рис. 3

Сумма двух неколлинеарных векторов совпадает с вектором, определяемым диагональю параллелограмма, построенного на представителях слагаемых, как на сторонах (рис. 2). Сумма трех некомпланарных векторов совпадает с вектором, определяемым диагональю параллелепипеда, построенного на представителях слагаемых, как на ребрах. Длина суммы векторов не больше суммы длин слагаемых.

Формальные свойства сложения векторов

1. Сложение векторов коммутативно

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2. Сложение векторов ассоциативно

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

3. (свойства нулевого и противоположного векторов)

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}; \quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Вычитание векторов. Вычитание – действие, обратное сложению. *Разностью* $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, который при сложении с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает уменьшаемый вектор $\vec{a}$: $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$. Разность $\vec{a}-\vec{b}$ совпадает с суммой $\vec{a}+(-\vec{b})$, то есть $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Геометрически разность $\vec{a}-\vec{b}$ находиться так: для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ берутся их представители (O,A) и (O,B) с общим началом O, тогда $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 4).

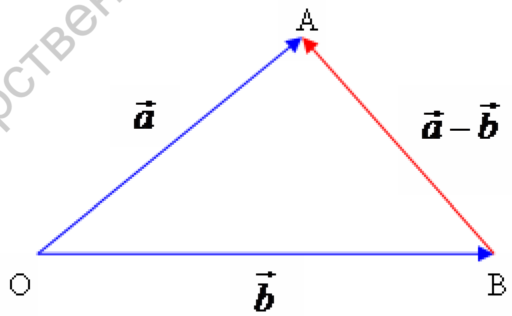

Рис. 4

Умножение вектора на число. Произведением $\lambda\vec{a}$ (или $\vec{a}\lambda$) вектора $\vec{a}\neq 0$ на действительное число $\lambda\neq 0$ называется новый вектор $\vec{c}$, такой, что:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на абсолютную величину числа λ: $|\vec{c}|=|\vec{a}||\lambda|$;

2) направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если λ – положительное число, или противоположно ему, если λ – число отрицательное: $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\lambda > 0$; $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Если $\vec{a} = 0$ или $\lambda = 0$, то произведение $\lambda\vec{a} = 0$. Обратно, из равенства $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ следует $\vec{a} = \vec{0}$ или $\lambda = 0$.

Линейная комбинация векторов. Вектор $\vec{u}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, если его можно представить следующим образом: $\vec{u} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – действительные числа, которые называются коэффициентами линейной комбинации.

Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, одновременно не равные нулю и такие, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Формальные свойства умножения вектора на число

1. Умножение вектора на число ассоциативно относительно числового множителя:

$$\mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}.$$

2. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно суммы векторов:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

3. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно суммы чисел:

$$\vec{a}(\lambda + \mu) = \vec{a}\lambda + \vec{a}\mu.$$

Геометрические свойства сложения векторов и умножения вектора на число

1 (первый признак коллинеарности векторов). Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое действительное число λ, чтобы выполнялось условие $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

2 (второй признак коллинеарности векторов). Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

3 (признак компланарности векторов). Три вектора в пространстве компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Ортом $\vec{a}^{\circ}$ ненулевого вектора $\vec{a}$ называется вектор, длина которого равна единице, одинаково направленный с $\vec{a}$.

Справедлива формула $\vec{a}^{\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Деление вектора на вектор. Операция деления вектора на вектор возможна только для коллинеарных векторов. Частным $\frac{\vec{c}}{\vec{a}} = \vec{c} : \vec{a}$ от деления вектора $\vec{c}$ на коллинеарный ему вектор $\vec{a} \neq 0$ называется число x, произведение которого с делителем $\vec{a}$ дает делимый вектор $\vec{c}$: $x\vec{a} = \vec{c}$.

`Пример 1.` Проверить на чертеже справедливость тождества:

$$\vec{a} - (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{b}.$$

`Решение.` Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ (рис. 5), тогда

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Имеем $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - (\vec{a} + \vec{b})$.

С другой стороны, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$.

`Пример 2.` В треугольнике ABC AM – медиана, O – точка пересечения медиан. Найти отношение $\overrightarrow{OM} : \overrightarrow{MA}$ (рис. 6).

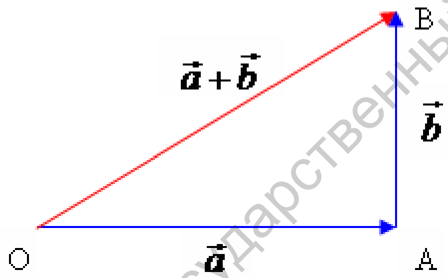

Рис. 5

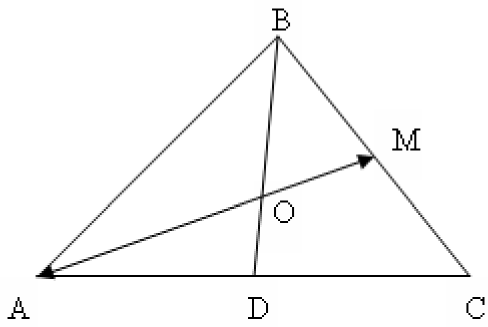

Рис. 6

`Решение.` Так как $\overrightarrow{OM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MA}$, то

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{MA}} = -\frac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{MA}|} = -\frac{1}{3}.$$

З А Д А Ч И

1. Даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EF}$. Найти вектор $\vec{u}$, если

1) $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$,
2) $\vec{u} = 4\vec{b} - \frac{3\vec{c}}{2}$.

2. Проверить на чертеже справедливость тождеств:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$,
2) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$,
3) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{c} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$,
4) $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$,
5) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} + \vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$,
6) $(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}) - (\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$,
7) $(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}) + (\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}) = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

3. Какой геометрической особенностью должны обладать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место равенство:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$,
2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$,
3) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$,
4) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

4. Какому геометрическому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$,
2) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$?

5. Какому геометрическому условию будут удовлетворять неколлинеарные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если представитель вектора $\vec{p} + \vec{q}$ с началом в некоторой точке делит пополам угол между представителем векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ с началом в той же точке?

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$, выразить через $\vec{c}$ и $\vec{d}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ определяемые сторонами этого параллелограмма.

7. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M есть точка пересечения диагоналей параллелограма.

8. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$ и $\overrightarrow{AL} = \vec{l}$, выразить через $\vec{k}$ и $\vec{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

9. В четырехугольнике $ABCD$ (плоском или пространственном) положим $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{q}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, где E и F середины диагоналей AC и BD соответственно.

10. В правильном 8-угольнике $ABCDEFGH$ положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$. Выразить каждый из векторов: $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{CA}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

11. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$, где M, P, R – середины ребер OA, OB, OC, а N, Q, S – середины противоположных ребер соответственно.

12. Показать, что: 1) из $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$, $\lambda \neq 0$ вытекает $\vec{a} = \vec{b}$; 2) из $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ вытекает $\lambda = \mu$ (сокращение равенств).

13. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти отношение векторов: $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{EF}}$, $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{AB}}$ и $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$, если они существуют.

14. В равностороннем треугольнике ABC M – середина стороны BC, O – центр треугольника. Имеет ли смысл и в случае утвердительного ответа чему равно каждое из выражений:

$$1)\overrightarrow{AO} : \overrightarrow{AM};$$

$$2)\overrightarrow{MO} : \overrightarrow{AO};$$

$$3)\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}?$$

15. $ABCD$ – параллелограмм, M – точка пересечения его диагоналей, O – точка пространства, отличная от M. Вычислить $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) : \overrightarrow{OM}$.

16. Показать, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеарны ($\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$), то

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} \cdot \frac{\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}}.$$

17. Дан собственный (то есть ненулевой и неразвернутый) угол AOB. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны сторонам угла OA и OB соответственно. Найти все векторы, параллельные биссектрисе угла AOB.

18. Точки F и E служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что

$$\overrightarrow{FE} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}.$$

Вывести отсюда теоремы: 1) о средней линии трапеции, 2) о средней линии треугольника.

19. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABML$, $BCPN$, $ACQR$. Доказать, что из векторов $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ можно составить треугольник.[1]

20. Проверить, что из векторов, определяемых медианами треугольника, можно составить другой треугольник.

21. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$, а из его медиан – треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны, и найти отношение подобия.

22. Как изменится сумма компланарных векторов, если все слагаемые векторы будут повернуты в одном и том же направлении на один тот же угол?

23. Доказать, что сумма парных произведений длины каждой стороны треугольника на единичный вектор, перпендикулярный к этой стороне, равна нулю. (Предполагается, что единичные векторы направлены от соответствующих сторон треугольника или все три во внутреннюю область треугольника, или все три – во внешнюю область).

24. Доказать, что сумма векторов, определяемых центром правильного n-угольника и его вершинами, равна нулю.

25. К точке приложены четыре различные компланарные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ одинаковой величины F. Зная, что углы между $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ равны 72°, найти величину и направление равнодействующей.

2. РАДИУС-ВЕКТОР ТОЧКИ

Фиксированную точку пространства O назовем *началом* или *полюсом. Радиусом-вектором* $\vec{r}_A$ точки A называется вектор $\overrightarrow{OA}$, определяемый точками O и A: $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ (рис. 7). Пишут $A(\vec{r}_A)$, если $\vec{r}_A$ является радиусом-вектором точки A.

Между точками пространства и их радиусами-векторами (при выбранном полюсе) существует взаимно-однозначное соответствие, то есть каждой точке пространства соответствует определенный радиус-вектор и разным точкам соответствуют разные радиусы-векторы.

[1]То есть существуют представители векторов $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ образующие треугольник.

Каждый вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности радиусов-векторов точек A и B (рис. 8):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

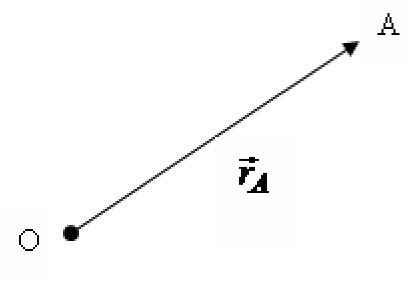

Рис. 7

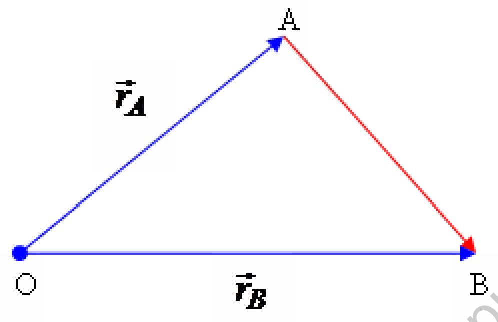

Рис. 8

Деление отрезка в данном отношении. Если даны две точки $A(\vec{r}_A)$ и $B(\vec{r}_B)$, то точка C делит отрезок AB в отношении λ, то есть $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$ (рис. 9), тогда и только тогда, когда

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}.$$

В частности, если M – середина отрезка AB, то

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

и обратно.

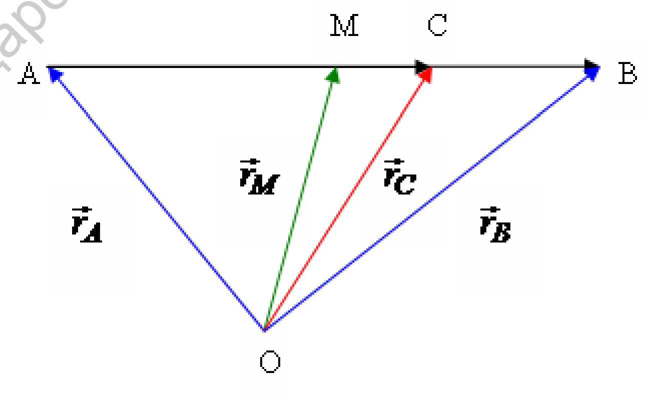

Рис. 9

Пример 1. Отрезок между точками $A(\vec{r}_A)$ и $B(\vec{r}_B)$ разделен на три равные части. Определить радиусы-векторы точек деления.

Решение. Обозначим точки деления через M_1 и M_2, а их радиусы-векторы через $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соответственно.

Для определения $\vec{r}_1$ найдем

$$\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{AM_1}}{\overrightarrow{M_1B}} = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{1}{2}.$$

Пользуясь формулой деления отрезка в данном отношении, получим:

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\vec{r}_A + \vec{r}_B}{3}.$$

Аналогично:

$$\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{AM_2}}{\overrightarrow{M_2B}} = \frac{AM_2}{M_2B} = 2 \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \frac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_B}{3}.$$

Пример 2. Зная, что между радиусами-векторами трех точек $A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$, $A_3(\vec{r}_3)$ существует линейная зависимость $2\vec{r}_1 - 5\vec{r}_2 + 3\vec{r}_3 = \vec{0}$,

1) показать, что эти три точки лежат на одной прямой,

2) найти отношение, в котором каждая из точек делит отрезок между двумя другими точками.

Решение. 1) Достаточно показать, что два из трех векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$, например, $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$, коллинеарны.

Из данного условия имеем: $\vec{r}_1 = \frac{5\vec{r}_2 - 3\vec{r}_3}{2}$ и, следовательно,

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \frac{5\vec{r}_2 - 3\vec{r}_3}{2} = \frac{3}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = \frac{3}{2}\overrightarrow{A_2A_3},$$

так что $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$ действительно коллинеарны.

2) Полученное выше выражение для $\vec{r}_1$ записываем в виде $\vec{r}_1 = \frac{5\vec{r}_2 - 3\vec{r}_3}{5-3} = \frac{\vec{r}_2 - \frac{3}{5}\vec{r}_3}{1-\frac{3}{5}}$, откуда видно, что точка A_1 делит отрезок A_2A_3 в отношении $\lambda = -\frac{3}{5}$.

Так же найдем, что точки A_2 и A_3 делят соответственно отрезки A_1A_3 и A_2A_1 в отношениях $\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{5}$. Заметим, что каждый из этих результатов вновь доказывает, что точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой.

Пример 3. Доказать с помощью векторной алгебры теорему: средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Решение. Выберем полюс O в некоторой точке плоскости. Тогда положение вершин треугольника будет характеризоваться их радиусами-векторами относительно выбранного полюса, а именно: $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$, $C(\vec{r}_3)$ (рис. 10).

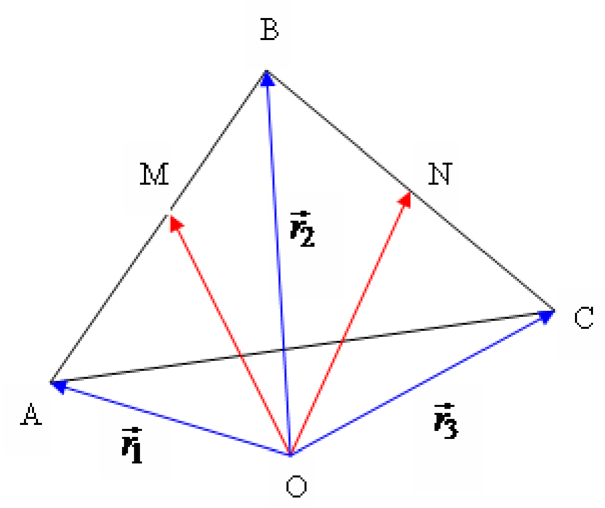

Рис. 10

Обозначим среднюю линию треугольника через MN. Имеем

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, \quad \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{2},$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{2} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

Таким образом, $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$. Полученное равенство показывает, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{AC}{2}$, что и требовалось доказать.

З А Д А Ч И

26. Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, ..., C_{n-1} на n равных частей. Найти отношения λ_1, λ_2,..., λ_{n-1}, в которых точки C_1, C_2, ..., C_{n-1} делят отрезок AB.

27. Найти радиус-вектор точки C, симметричной с точкой $A(\vec{r}_A)$ относительно точки $B(\vec{r}_B)$.

28. Даны радиусы-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ трех последовательных вершин A, B, C параллелограмма. Найти радиусы-векторы четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей M.

29. Зная радиусы-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

30. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

31. Даны три последовательные вершины трапеции $A_1(\vec{r}_1)$, $B_2(\vec{r}_2)$ и $C_3(\vec{r}_3)$. Найти радиусы-векторы: $\vec{r}_4$ – четвертой вершины D, $\vec{r}\,'$ – точки пересечения диагоналей и $\vec{r}\,''$ – точки пересечения боковых сторон, зная, что основание AD в λ раз больше основания BC.

32. Зная радиусы-векторы $\vec{r}_{A'}$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_D$, $\vec{r}_A$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиусы-векторы четырех остальных его вершин.

33. На стороне AD и на диагонале AC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Показать, что точки M, N и B лежат на одной прямой. В каком отношении делит точка N отрезок MB? Решить задачу в более общем виде, предполагая, что

$$AM = \frac{1}{n}AD, \quad AN = \frac{1}{n+1}AC.$$

34. В точках $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, ... $M_n(\vec{r}_n)$ помещены массы m_1, m_2, ..., m_n. Найти радиус-вектор центра тяжести этой системы материальных точек. Как выразится радиус-вектор центра тяжести для случая равных масс?

35. Показать, что сумма векторов, определяемых центром тяжести системы n материальных точек и каждой из этих точек, равна нулю, если во всех точках сосредоточены равные массы.

36. Доказать, что радиус-вектор центра правильного многоугольника есть среднее арифметическое радиусов-векторов вершин этого многоугольника.

37. Где выбрать полюс, чтобы сумма радиусов-векторов всех вершин параллелограмма равнялась нулю?

38. Доказать: для того, чтобы три точки $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$, $C(\vec{r}_3)$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно существование трех чисел α_1, α_2, α_3, не равных одновременно нулю и таких, что

$$\alpha_1\vec{r}_1 + \alpha_2\vec{r}_2 + \alpha_3\vec{r}_3 = \vec{0} \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Доказать с помощью векторной алгебры следующие теоремы элементарной геометрии:

39. Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали, пересекались и делились пополам.

40. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

41. Если в четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: 1) середины двух противоположных сторон, 2) середины двух других противоположных сторон, 3) середины диагоналей, то эти отрезки пересекаются в одной точке, которая служит их общей серединой. Перенести этот результат с четырехугольника на тетраэдр.

42. Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

43. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

44. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через одну и ту же точку и делятся в ней пополам.

45. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. ПРОЕКЦИЯ И ЧИСЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

На плоскости *проекцией вектора* $\vec{a}$ *на прямую* l (прямая проекции) или на вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$ параллельно направляющей прямой $h \neq l$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий двум условиям: 1) $\vec{c} \parallel l$ или, соответственно, $\vec{c} \parallel \vec{b}$ и 2) $\vec{a} - \vec{c} \parallel h$. Этот вектор обозначается соответственно символами $\mathit{Пр}_l \vec{a}(\parallel h)$ или $\mathit{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}(\parallel h)$.

Проекцией точки P *на прямую* l *параллельно направляющей* h называется точка P', являющаяся пересечением прямой проекции l и прямой, проведенной через точку P параллельно направляющей h (рис. 11, *a*). В пространстве при определении проекции вектора на прямую или вектор и проекции точки на прямую вместо направляющей прямой h нужно брать направляющую плоскость α (рис. 12, *a*). Проекция называется *ортогональной*, если прямая проекции и направляющая прямая (плоскость) взаимно перпендикулярны. Ортогональная проекция обозначается без указания направляющей. Проекция вектора и точки всегда существуют и определяются единственным образом. Если вектор $\vec{a}$ на плоскости (в пространстве), (A, B) – его представитель с началом в точке A, точки A', B' – проекции соответственно точек

A и B на прямую l параллельно прямой h (плоскости α), то

$$\textit{Пр}_l\vec{a}(\parallel h) = \overrightarrow{A'B'} \quad (\textit{Пр}_l\vec{a}(\parallel \alpha) = \overrightarrow{A'B'})$$

(рис. 11, *б* и 12, *б*).

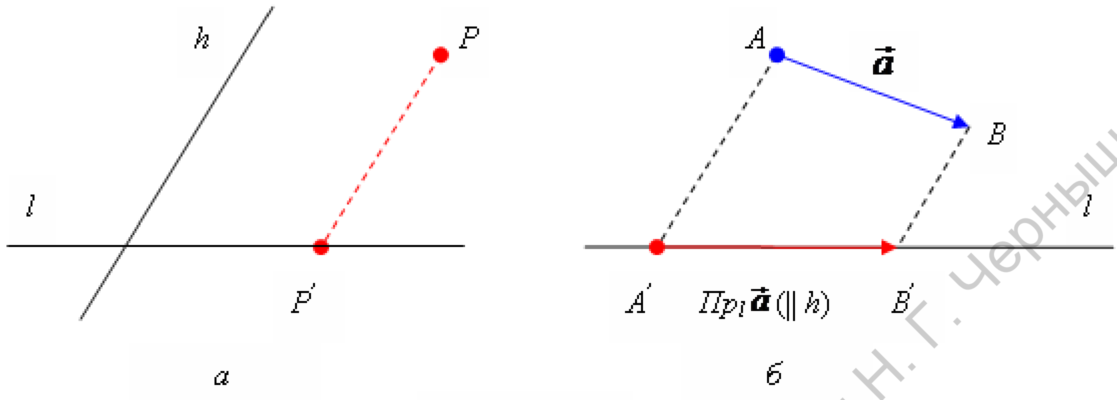

Рис. 11

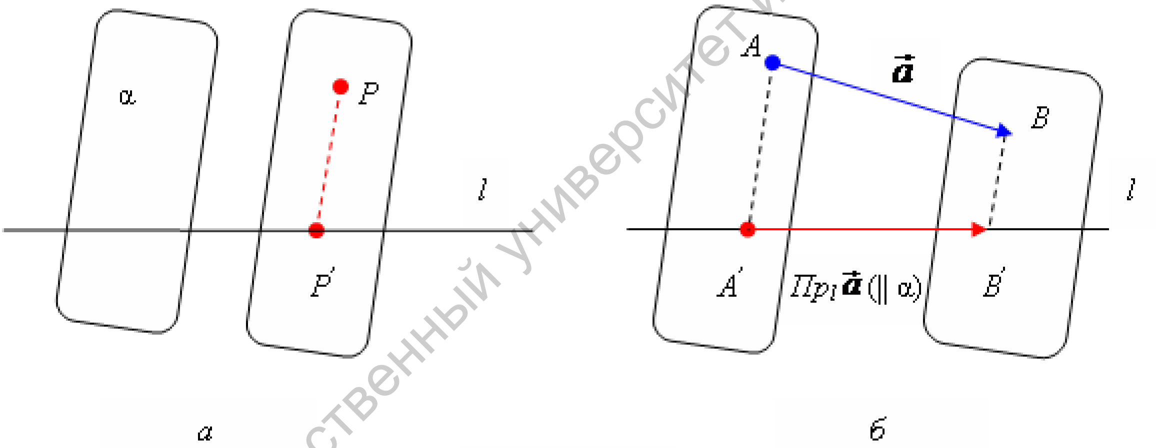

Рис. 12

На плоскости *численным значением проекции вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b} \neq 0$ *параллельно прямой* h называется число, обозначаемое $\textit{пр}_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h)$ и определяемое равенством

$$\textit{пр}_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h) = \frac{\textit{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}(\parallel h)}{\vec{b}}.$$

Аналогично определяется и обозначается численное значение проекции вектора в пространстве. Численное значение ортогональной проекции на плоскости и в пространстве на единичный вектор $\vec{i}$ вычисляется по формуле

$$\textit{пр}_{\vec{i}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\widehat{\vec{i}\vec{a}}.$$

Если l_1, l_2 – две пересекающиеся прямые на плоскости, то всякий вектор $\vec{a}$ плоскости может быть разложен по этим прямым, то есть представлен в виде суммы векторов $\vec{a}_1 \parallel l_1$ и $\vec{a}_2 \parallel l_2$. Это разложение единственно, причем

$$\vec{a}_1 = \textit{Пр}_{l_1}\vec{a}(\parallel l_2), \quad \vec{a}_2 = \textit{Пр}_{l_2}\vec{a}(\parallel l_1).$$

Аналогичное разложение имеет место в пространстве по трем некомпланарным пересекающимся в одной точке прямым. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарных вектора, то всякий вектор $\vec{u}$, компланарный с ними, может быть разложен по этим векторам, то есть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Это разложение единственно, причем

$$\alpha = \textit{пр}_{\vec{a}}\vec{u}(\parallel \vec{b}), \quad \beta = \textit{пр}_{\vec{b}}\vec{u}(\parallel \vec{a}).$$

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, то всякий вектор пространства $\vec{u}$ можно разложить по этим векторам, то есть представить как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Это разложение единственно, причем

$$\alpha = \textit{пр}_{\vec{a}}\vec{u}(\parallel \vec{b}, \vec{c}), \quad \beta = \textit{пр}_{\vec{b}}\vec{u}(\parallel \vec{c}, \vec{a}), \quad \gamma = \textit{пр}_{\vec{c}}\vec{u}(\parallel \vec{a}, \vec{b}).$$

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. *Координатами вектора* $\vec{a}$ на плоскости *относительно базиса* $(\vec{e}_1, \vec{e}_{2)}$ называются коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по базисным векторам, то есть числа a^1 и a^2 такие, что

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2.$$

Каждая координата вектора равна численному значению его проекции на соответствующий базисный вектор параллельно другому базисному вектору:

$$a^1 = \textit{пр}_{\vec{e}_1}\vec{a}(\parallel \vec{e}_2), \quad a^2 = \textit{пр}_{\vec{e}_2}\vec{a}(\parallel \vec{e}_1).$$

То, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты a^1, a^2 записывается так:

$$\vec{a}(a^1, a^2) \quad \text{или} \quad \vec{a} = \left\{a^1, a^2\right\}.$$

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. *Координатами вектора* $\vec{a}$ в пространстве *относительно базиса* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называются коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по базисным векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то есть числа a^1, a^2, a^3 такие, что

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3.$$

Каждая координата вектора равна численному значению его проекции на соответствующий базисный вектор параллельно двум другим векторам:

$$a^1 = np_{\vec{e}_1}\vec{a}(\parallel \vec{e}_2, \vec{e}_3), \quad a^2 = np_{\vec{e}_2}\vec{a}(\parallel \vec{e}_3, \vec{e}_1), \quad a^3 = np_{\vec{e}_3}\vec{a}(\parallel \vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

Базис на плоскости и в пространстве, образованный единичными попарно взаимно перпендикулярными векторами, называется *ортонормированным.* Базисные векторы обозначаются: $\vec{i}$, $\vec{j}$ в случае плоскости и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в случае пространства. Координаты вектора $\vec{a}$ относительно ортонормированного базиса называются *ортонормированными* и обозначаются a_x, a_y для вектора плоскости и a_x, a_y, a_z для вектора в пространстве. Справедливы следующие формулы:

$$a_x = a\cos\widehat{\vec{i}\vec{a}}, \quad a_y = a\cos\widehat{\vec{j}\vec{a}}, \quad a_z = a\cos\widehat{\vec{k}\vec{a}}.$$

Если вектор $\vec{u}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{m}$ с коэффициентами α, β, ..., μ, то каждая координата вектора $\vec{u}$ является линейной комбинацией соответствующих координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{m}$ с теми же коэффициентами и обратно, то есть

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + ... + \mu\vec{m}$$

равносильно тому, что

$$u^1 = \alpha a^1 + \beta b^1 + ... + \mu m^1,$$

$$u^2 = \alpha a^2 + \beta b^2 + ... + \mu m^2,$$

$$u^3 = \alpha a^3 + \beta b^3 + ... + \mu m^3,$$

В частности, если $\vec{u} = \vec{a} \pm \vec{b}$, то

$$u^1 = a^1 \pm b^1, \quad u^2 = a^2 \pm b^2, \quad u^3 = a^3 \pm b^3$$

и обратно; если $\vec{u} = \alpha\vec{a}$, то

$$u^1 = \alpha a^1, \quad u^2 = \alpha a^2, \quad u^3 = \alpha a^3$$

и обратно.

Признак коллинеарности векторов в координатах. Два ненулевых вектора на плоскости и в пространстве коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответственные координаты пропорциональны:

на плоскости: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2}$;

в пространстве: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3}{b^3}$.

Два ненулевых вектора на плоскости коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Два вектора в пространстве коллинеарны тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленный из их координат, меньше или равен 1.

Признак компланарности векторов в координатах. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

`Пример 1.` Какому условию удовлетворяют численные значения проекций векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ на вектор $\vec{a}$ параллельно направляющей h?

`Решение.` $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Следовательно, $np_{\vec{a}}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = np_{\vec{a}}\vec{0} = 0$. Но $np_{\vec{a}}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = np_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}+np_{\vec{a}}\overrightarrow{BC}+np_{\vec{a}}\overrightarrow{CA}$. Таким образом, $np_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} + np_{\vec{a}}\overrightarrow{BC} + np_{\vec{a}}\overrightarrow{CA} = 0$.

`Пример 2.` Дан параллелограмм $ABCD$. Разложить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ по двум векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

`Решение.` Складывая и вычитая одно из другого очевидные равенства $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, получаем соответственно

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Пример 3. Даны три вектора $\vec{a}(4,-2)$, $\vec{b}(8,22)$ и $\vec{c}(6,10)$. Доказать, что $\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

Решение. $\frac{1}{2}(a^1+b^1)=\frac{1}{2}(4+8)=6=c^1$, $\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}(-2+22)=10=c^2$. Таким образом, $c^1=\frac{1}{2}(a^1+b^1)$, $c^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, откуда следует $\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

ЗАДАЧИ

46. Дан треугольник ABC. Чему равна проекция вектора $\overrightarrow{BC}$ на сторону AC параллельно стороне AB?

47. Пусть в трапеции $ABCD$ AB и CD – боковые стороны. Чему равно численное значение проекции вектора $\overrightarrow{CD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ параллельно основанию трапеции?

48. При каком взаимном расположении вектора $\vec{a}$ и прямых l и h на плоскости проекция вектора $\vec{a}$ на прямую l параллельно прямой h равна: 1) нулевому вектору, 2) вектору $\vec{a}$?

49. Доказать, что два вектора будут равны, если проекции их на прямую l параллельно любой направляющей h (плоскости α) совпадают.

50. Определить фигуру, образованную концами представителей с общим началом всех векторов плоскости (пространства), имеющих одинаковые численные значения проекции на вектор $\vec{b}$ параллельно прямой h (плоскости α).

51. Зная, что длина вектора $\vec{c}$ равна 6, а численное значение его ортогональной проекции на единичный вектор $\vec{i}$ равна -3, найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$.

52. Численные значения ортогональных проекций векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ на вектор $\vec{e}$ соответственно равны 6, -1, -10, 5. Найти угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, если $\vec{u}\neq\vec{0}$.

53. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Найти ортогональную проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую SC и ортогональную проекцию вектора $\overrightarrow{SC}$ на прямую AB.

54. Дана равнобочная трапеция $ABCD$. Угол между нижним основанием AD и стороной AB равен $\frac{\pi}{3}$. Разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ векторы, определяемые сторонами и диагоналями трапеции.

55. На представителях трех некомпланарных векторов $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$ и $\overrightarrow{AA'}=\vec{r}$ построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Разложить по $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$

векторы, определяемые ребрами, диагоналями и диагоналями граней этого параллелепипеда.

56. Разложить вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по векторам $\vec{l}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{n}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

57. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, определяемые смежными сторонами параллелограмма $ABCD$, взяты в качестве базисных. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

58. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ двух сторон треугольника ABC приняты за базисные. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, определяемых медианами треугольника.

59. Векторы, определяемые двумя сторонами правильного шестиугольника, исходящими из одной вершины, приняты за базисные. Найти координаты векторов, определяемых диагоналями шестиугольника, исходящими из той вершины.

60. Найти коллинеарные между собой векторы среди векторов:

1) $\vec{a}(2,-7)$, $\vec{b}(-3,8)$, $\vec{c}(-3,-8)$, $\vec{d}(-4,14)$;
2) $\vec{a}(1,-1,1)$, $\vec{b}(2,2,2)$, $\vec{c}(1,2,-3)$, $\vec{d}(-3,-6,9)$.

61. При каком α векторы $\vec{a}(-2,3)$, $\vec{b}(1,\alpha)$ будут коллинеарными?

62. Даны три вектора $\vec{a}(2,4)$, $\vec{b}(-3,1)$ и $\vec{c}(5,-2)$. Найти координаты векторов: 1) $2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$; 2) $\vec{a}+24\vec{b}+14\vec{c}$.

63. Даны векторы $\vec{a}(-1,-2)$, $\vec{b}(3,5)$, $\vec{c}(4,-3)$. Можно ли из их представителей построить треугольник?

64. Зная векторы $\overrightarrow{AB}(-1,3)$ и $\overrightarrow{BC}(4,-5)$, найти координаты вектора $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

65. Будут ли линейно зависимыми векторы:

1) $\vec{a}(2,-7)$, $\vec{b}(4,-10)$;
2) $\vec{a}(-2,1,0$, $\vec{b}(3,2,-1)$, $\vec{c}(-1,4,-1)$.

66. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(4,-2)$, $\vec{b}(3,5)$, $\vec{c}(1,-7)$;
2) $\vec{a}(5,4)$, $\vec{b}(-3,0)$, $\vec{c}(19,8)$;
3) $\vec{a}(-6,2)$, $\vec{b}(4,7)$, $\vec{c}(9,-3)$.

67. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(2,3,1)$, $\vec{b}(5,7,0)$, $\vec{c}(3,-2,4)$, $\vec{d}(4,12,-3)$;

2) $\vec{a}(5,-2,0)$, $\vec{b}(0,-3,4)$, $\vec{c}(-6,0,1)$, $\vec{d}(25,-22,16)$;
3) $\vec{a}(3,5,6)$, $\vec{b}(2,-7,1)$, $\vec{c}(12,0,6)$, $\vec{d}(0,20,18)$.

68. Координаты вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ равны α и β. Каковы будут координаты этого вектора, если в качестве базисных векторов взять $\vec{e}^{\,\prime}_1 = -\frac{3}{4}\vec{e}_1$ и $\vec{e}^{\,\prime}_2 = 2\vec{e}_2$?

69. Вектор $\vec{a}$ относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ имеет координаты α, β, γ. Доказать, что векторы

$$\vec{e}^{\,\prime}_1 = \vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_1, \quad \vec{e}^{\,\prime}_2 = -\frac{2}{3}\vec{e}_3, \quad \vec{e}^{\,\prime}_3 = \vec{e}_3 + 2\vec{e}_2$$

образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a}$ относительно нового базиса.

4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин перемножаемых векторов и косинуса угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}};$$

если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то полагают $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Геометрические свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда сомножители взаимно перпендикулярны.

2. Скалярное произведение положительно, если угол между сомножителями острый, и отрицательно, если этот угол тупой.

3. Скалярное произведение ненулевых векторов равно длине одного из сомножителей, умноженной на численное значение ортогональной проекции другого сомножителя на орт первого сомножителя:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| np_{\vec{a}^\circ}\vec{b} = |\vec{b}| np_{\vec{b}^\circ}\vec{a}.$$

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на единичный вектор $\vec{i}$ совпадает со скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{i}$:

$$np_{\vec{i}}\vec{a} = (\vec{a}, \vec{i}).$$

4. Скалярное произведение $(\vec{a},\,\vec{a})$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

5. Косинус угла между двумя ненулевыми векторами равняется скалярному произведению данных векторов, деленному на произведение их длин:

$$\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{(\vec{a},\,\vec{b})}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\sqrt{\vec{b}^{\,2}}}.$$

Формальные свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение коммутативно

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}).$$

2. $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$.

3. Скалярное произведение дистрибутивно

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$$

Выражение скалярного произведения в координатах

1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскости, заданных своими координатами относительно базиса $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$: $\vec{a}(a^1,a^2)$, $\vec{b}(b^1,b^2)$ выражается формулой:

$$(\vec{a},\vec{b}) = g_{11}(a^1)^2 + 2g_{12}(a^1b^2 + a^2b^1) + g_{22}a^2b^2,$$

в частности:

$$\vec{a}^2 = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1a^2 + g_{22}(a^2)^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} – так называемые *метрические параметры базиса* $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, определяемые равенствами: $g_{11} = \vec{e}_1^{\,2}$, $g_{12} = (\vec{e_1},\,\vec{e_2})$, $g_{22} = \vec{e}_2^{\,2}$. Для ортонормированного базиса $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$ и

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_xb_x + a_yb_y,$$

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства, заданных своими координатами относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\vec{a}(a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b}(b^1, b^2, b^3)$ выражается формулой:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a^i b^j,$$

где g_{ij} – *метрические параметры базиса* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, определяемые равенствами: $g_{ij} = (\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Для ортонормированного базиса

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

в частности

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

2. Ортонормированные координаты вектора совпадают со скалярными произведениями этого вектора на соответствующие базисные векторы:

для случая плоскости: $a_x = (\vec{a}, \vec{i})$, $a_y = (\vec{a}, \vec{j})$;

для случая пространства: $a_x = (\vec{a}, \vec{i})$, $a_y = (\vec{a}, \vec{j})$, $a_z = (\vec{a}, \vec{k})$.

`Пример 1.` Вычислить выражение $(\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{b},\ \vec{c}) + (\vec{c},\ \vec{a})$, если известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

`Первое решение.` Согласно условию задачи, из представителей векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ можно составить равносторонний треугольник. Следовательно, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{c}\,\vec{a}} = \frac{2\pi}{3}$. Отсюда:

$$(\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{b},\ \vec{c}) + (\vec{c},\ \vec{a}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

`Второе решение.` Возводя обе части равенства $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ в квадрат, получаем: $\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2((\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{b},\ \vec{c}) + (\vec{c},\ \vec{a})) = 0$. Отсюда: $(\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{b},\ \vec{c}) + (\vec{c},\ \vec{a}) = -\frac{1}{2}(\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2}) = -\frac{3}{2}$.

`Пример 2.` К одной точке приложены две силы, равные по величине F_1 и F_2 и действующие под углом α. Найти величину равнодействующей.

`Решение.` Равнодействующая сила $\vec{F}$ определяется формулой: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Отсюда:

$$F = \sqrt{\vec{F}^2} = \sqrt{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2} = \sqrt{F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2}.$$

`Пример 3.` Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

Решение. Записывая условие перпендикулярности векторов $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$, получаем:

$$(\vec{a}+2\vec{b},\,5\vec{a}-4\vec{b})=5\vec{a}^2+6(\vec{a},\vec{b})-8\vec{b}^2=0.$$

Но по условию $\vec{a}^2=\vec{b}^2=1$, $(\vec{a},\,\vec{b})=\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}}$. Следовательно,

$$\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\frac{1}{2},\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\frac{\pi}{3}.$$

Пример 4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC высота CD, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые она делит гипотенузу.

Решение. Имеем: $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$. Перемножая оба равенства скалярно и учитывая, что $(\overrightarrow{CA},\,\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{CD},\,\overrightarrow{DA})=(\overrightarrow{CD},\,\overrightarrow{DB})=0$, получаем отсюда, $\overrightarrow{CD}^2+(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=0$ или $CD^2=DA\cdot DB$.

ЗАДАЧИ

70. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=4$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\frac{\pi}{4}$;
2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\frac{2\pi}{3}$;
3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$;
4) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

71. Верны ли равенства:

1) $\vec{a}a=\vec{a}^{\,2}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b})^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+2(\vec{a},\,\vec{b})+\vec{b}^{\,2}$;
3) $(\vec{a},\vec{b})^{\,2}=\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}$;
4) $(\vec{a}+\vec{b},\,\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}$;
5) $(\vec{a},\vec{b}):(\vec{a},\vec{c})=\vec{b}:\vec{c}$;
6) $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b},\vec{c})$;
7) $(\vec{a}+\vec{p},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b})$?

72. Как связаны между собой векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, удовлетворяющие условию $(\vec{a},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c})$, где $\vec{c}\neq\vec{0}$? Можно ли утверждать, что $\vec{a}=\vec{b}$?

73. Решить уравнение $(\vec{a},\vec{x})=\alpha$, где $\vec{x}$ – неизвестный вектор ($\vec{a}$, α – данные).

74. Доказать, что $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2(\vec{a},\vec{b}) + \vec{b}^2$. Какую теорему элементарной геометрии выражает это тождество? В частности при $\vec{a} \perp \vec{b}$?

75. Доказать, что $(\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2$. Какую теорему элементарной геометрии выражает это тождество?

76. Доказать, что векторы $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b},\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a},\vec{c})$ и $\vec{c}$ перпендикулярны друг другу.

77. В треугольнике ABC проведены медианы AL, BM, CN. Доказать, что $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AL}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BM}) = 0$.

78. Пусть ABC – треугольник, O – точка пространства (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OB}) = 0$.

79. Пусть ABC – треугольник, L, M и N – середины сторон BC, CA и AB соответственно, O – точка пространства (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OM}) = 0$.

80. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка пространства O (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})$.

81. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка пространства O (в плоскости треугольника или вне ее). Показать, что $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$.

82. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$. Доказать, что биссектриса угла B является высотой.

83. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

84. Доказать, что вписанный угол, опирающийся на диаметр круга, прямой.

85. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Доказать, что $AH : BH = AC^2 : BC^2$.

86. В параллелограмме $ABCD$ опущена высота BH на сторону AD. Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

87. Дана окружность и точка M внутри нее. Через точку M проведены две взаимно перпендикулярные секущие, первая секущая пересекает окружность в точках A и A_1, вторая – в точках B и B_1. Показать, что вектор $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ перпендикулярен прямой A_1B_1.

88. От одной точки отложены три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Зная, что расстояние между концами представителей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно расстоянию между концами представителей векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, показать, что векторы $\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{c}$ перпендикулярны друг другу.

89. Доказать, что если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, проведенным на плоскости, то она перпендикулярна и любой третьей прямой, проведенной на той же плоскости.

90. Доказать, что если прямая составляет равные углы с тремя различными попарно непараллельными прямыми, лежащими в некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

91. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

92. Доказать, что перпендикуляры, восстановленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

93. Вычислить длину диагонали параллелепипеда, выходящей из точки O, зная длины трех его ребер, выходящих из той же точки, и углы между этими ребрами.

94. Выразить длину медианы CD треугольника ABC через длины сторон этого треугольника.

95. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Доказать, что

$$CD = \frac{2BC \cdot CA \cdot \cos\frac{C}{2}}{BC + CA}.$$

96. Выразить длину биссектрисы CD угла треугольника ABC через длины сторон этого треугольника.

97. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Доказать, что $CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$.

98. Выразить длину высоты CD треугольника ABC через длины сторон этого треугольника.

99. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении λ. Выразить длину отрезка CD через три стороны треугольника и число λ.

100. В треугольнике ABC проведен отрезок $A'B'$ параллельно AB (A' лежит на AC, B' на BC). Показать, что если $AB' = BA'$, то треугольник ABC – равнобедренный.

101. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника относится к сумме квадратов его сторон как $3 : 4$.

102. В треугольнике ABC точки D, E, F делят соответственно стороны BC, CA, AB в отношении λ. Показать, что

$$\frac{AD^2 + BE^2 + CF^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1 + \lambda)^2}.$$

103. Зная длины 6 ребер тетраэдра, определить длины трех отрезков, соединяющих попарно середины противоположных ребер.

104. Зная длины a и b сторон прямоугольника, найти косинус угла между диагоналями.

105. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ обозначим через M и N соответственно середины сторон CD и DE. Под каким углом пересекаются прямые AM и BN?

106. Подобрать α так, чтобы векторы $2\vec{l} - 4\vec{m}$ и $\alpha\vec{l} + \vec{m}$, где $|\vec{l}| = 2$, $|\vec{m}| = 3$, $\widehat{\vec{l}\vec{m}} = \frac{2\pi}{3}$, были взаимно перпендикулярны.

107. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

108. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

109. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α. Найти угол между медианами углов при основании.

110. Медианы AL и BM треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Показать, что $\cos C \geq \frac{4}{5}$.

111. Показать, что во всяком треугольнике ABC

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S}$$

где S – площадь треугольника ABC.

112. Векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ попарно ортогональны. Показать, что $\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = a^2 : b^2 : c^2$ (A, B, C – углы треугольника ABC).

113. Зная длины 6 ребер тетраэдра, найти угол между двумя противоположными ребрами.

114. Доказать, что в прямоугольном треугольнике катет является средним пропорциональным между всей гипотенузой и ортогональной проекцией этого катета на гипотенузу.

115. Зная длины сторон треугольника ABC, найти численное значение ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

116. Зная длины сторон треугольника ABC, найти численное значение ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{CM}$, определяемого медианой, на вектор $\overrightarrow{AB}$.

117. Зная длины сторон треугольника ABC, найти численное значение ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{CN}$, определяемого биссектрисой, на вектор $\overrightarrow{AB}$.

В следующих задачах, если не оговорено противное, базис предполагается ортонормированным.

118. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(4,3)$, $\vec{b}(1,7)$;
2) $\vec{a}(6,-8)$, $\vec{b}(12,9)$;
3) $\vec{a}(7,2)$, $\vec{b}(-4,5)$.

119. Даны три вектора: $\vec{a}(5,2)$, $\vec{b}(7,-3)$ и $\vec{c}(0,4)$.

1) Вычислить выражение $3(\vec{a},\vec{b})+3(\vec{a},\vec{c})-4\vec{c}^{\,2}$;

2) Найти координаты вектора $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}-\vec{a}(\vec{b},\vec{c})$.

120. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на представителях векторов $\vec{a}(5,10)$ и $\vec{b}(3,-4)$.

121. При каком x векторы $\vec{a}(x,3)$ и $\vec{b}(-8,5)$ являются взаимно перпендикулярными?

122. Найти орт вектора $\vec{a}(6,-8)$.

123. Из одной точки отложены векторы $\vec{a}(-12,16)$ и $\vec{b}(12,5)$. Найти координаты какого-нибудь вектора, который, будучи отложен из той точки, делил бы угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пополам.

124. Определить внутренние углы треугольника ABC, зная векторы $\overrightarrow{AB}(2,-6)$ и $\overrightarrow{BC}(1,7)$.

125. Найти численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}(10,2)$ на вектор $\vec{b}(5,-12)$.

126. Известны длины базисных векторов $|\vec{e}_1|=4$, $|\vec{e}_2|=2$ и угол между ними $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\frac{\pi}{3}$. Вычислить угол между векторами $\vec{a}(0,-3)$ и $\vec{b}(1,-2)$.

127. Вычислить косинус угла между векторами в каждом из следующих случаев:

1) $\vec{a}(2,4,6)$, $\vec{b}(-3,7,1)$;
2) $\vec{a}(-1,0,2)$, $\vec{b}(10,2,5)$;
3) $\vec{a}(3,3,1)$, $\vec{b}(-2,1,1)$;

128. Даны три вектора: $\vec{a}(5,-6,1)$, $\vec{b}(-4,3,0)$ и $\vec{c}(5,-8,10)$.

1) Вычислить выражение $\vec{a}^{\,2}-2(\vec{a},\,\vec{b})+3\vec{c}^{\,2}$;

2) Найти координаты вектора $\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}+\vec{b}^{\,2}\,\vec{c}+\vec{c}^{\,2}\,\vec{a}$.

129. Даны три вектора: $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(4,3,1)$ и $\vec{c}(-1,1,1)$. Показать, что $\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}+\vec{b}^{\,2}\,\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

130. Из одной точки отложены векторы $\vec{a}(-3,0,4)$ и $\vec{b}(5,-2,-14)$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен из той же точки, делил бы угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пополам.

131. Определить внутренние углы треугольника ABC, зная векторы $\overrightarrow{AB}(2,1,-2)$ и $\overrightarrow{BC}(3,2,6)$.

132. Найти численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}(8,4,1)$ на орт вектора $\vec{b}(2,-2,1)$.

133. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей.

134. Дан куб. Найти углы, которые образуют: 1) диагональ куба с его ребром; 2) диагонали двух граней, исходящие из одной точки.

135. Дан прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b, c. Найти углы, которые образуют: 1) диагональ параллелепипеда с его ребром; 2) диагонали двух граней, исходящие из одной точки.

135. Даны длины базисных векторов $|\vec{e}_1|=4$, $|\vec{e}_2|=5$, $|\vec{e}_3|=3$ и углы между ними $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3}=\frac{\pi}{2}$. Найти угол между векторами $\vec{a}(1,-2,1)$ и $\vec{b}(3,7,0)$.

5. КОСОСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Плоскость, в которой задано положительное направление вращения, называется *ориентированной*. Принято за положительное направление вращения считать направление вращения против стрелки часов.

Направленный угол от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ в ориентированной плоскости определяется, как в тригонометрии, и обозначается символом $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ (рис. 13).

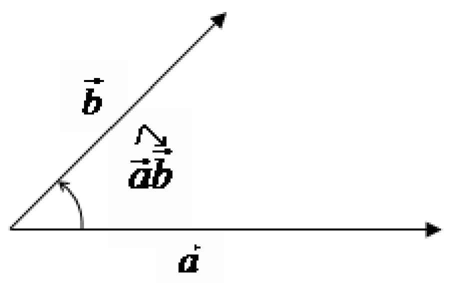

Рис. 13

Кососкалярным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ ненулевого вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин перемножаемых векторов и синуса направленного угла от $\vec{a}$ к $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}\ \vec{b}};$$

если по крайней мере один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то кососкалярное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ полагается равным нулю.

Геометрические свойства кососкалярного произведения

1. Кососкалярное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы коллинеарны, то есть если $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$, и обратно.

2. Абсолютная величина кососкалярного произведения двух векторов равна площади параллелограмма, построенного на представителях сомножителей с общим началом как на сторонах:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{парал-ма}}.$$

Площадь треугольника, построенного на представителях векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом как на сторонах, равна половине абсолютной величине кососкалярного произведения данных векторов:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

3. Синус направленного угла между двумя ненулевыми векторами на плоскости равняется отношению кососкалярного произведения данных векторов к произведению их длин:

$$\sin \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Для любых двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ориентированной плоскости $\sin \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = -\sin \widehat{\vec{b}\,\vec{a}}$.

4. Связь кососкалярного и скалярного произведений выражается формулой:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}\,', \vec{b}),$$

где вектор $\vec{a}\,'$ определяется условиями: 1) $\vec{a}\,' = |\vec{a}|$, 2) $\widehat{\vec{a}\,a'} = \frac{\pi}{2}$ и называется *„повернутым вектором $\vec{a}$“*.

Формальные свойства кососкалярного произведения

1. Кососкалярное произведение антикоммутативно

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$.

3. Кососкалярное произведение дистрибутивно относительно суммы векторов

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Выражение кососкалярного произведения в координатах

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскости заданы своими координатами относительно *положительного (правого)* базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix},$$

где $g = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$ и называется дискриминантом метрических параметров базиса. Положительный базис характеризуется условием $\widehat{\vec{e}_1\,\vec{e}_2} < \pi$. Для положительного ортонормированного базиса

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

`Пример 1.` Упростить $\left(\frac{1}{3}\vec{a} - 4\vec{b}\right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}\right)$.

Решение. Пользуясь формальными свойствами кососкалярного произведения, получаем:

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a}-4\vec{b}\right)\times\left(\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}\right)=\frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{a})+(\vec{a}\times\vec{b})-2(\vec{b}\times\vec{a})-12(\vec{b}\times\vec{b})=3(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Пример 2. Показать, что из $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ следует $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$. Выяснить геометрический смысл этого утверждения.

Решение. Умножим обе части равенства $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ кососкалярно на вектор $\vec{b}$. Учитывая, что $\vec{b}\times\vec{b}=0$, $\vec{c}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{c}$, получаем $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$.

Умножая данное равенство кососкалярно на $\vec{c}$, аналогично получаем $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

Равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют треугольник (рис. 14). Учитывая ориентацию плоскости, получаем

$$\pm 2S_{\Delta}=\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}.$$

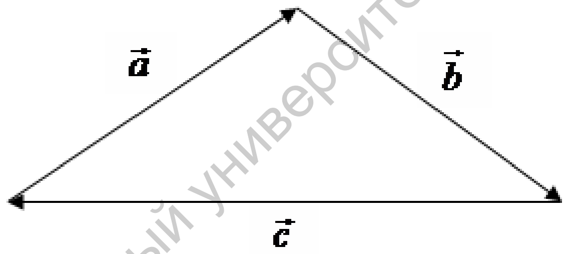

Рис. 14

Итак, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют треугольник, то все члены равенства $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$ с точностью до знака совпадают с удвоенной площадью этого треугольника.

Пример 3. Найти отношение площадей треугольников ABC и $A'B'C'$, если известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}(1,1)$, $\overrightarrow{AC}(-2,3)$, $\overrightarrow{A'B'}(8,-2)$ и $\overrightarrow{A'C'}(2,2)$ относительно базиса $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Решение. По формуле площади треугольника имеем:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,|\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}|=\frac{5}{2}\sqrt{g}$$

и

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,\left|\begin{vmatrix}8 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right| = 10\sqrt{g},$$

где g — дискриминант метрических параметров базиса. Отсюда

$$S_{ABC} : S_{A'B'C'} = 1 : 4.$$

`Пример 4.` Показать, что координаты вектора относительно положительного ортонормированного базиса можно вычислять по формулам

$$a_x = \vec{a}\times\vec{j}, \quad a_y = \vec{i}\times\vec{a}.$$

`Решение.` Умножая равенство

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

кососкалярно сначала справа на $\vec{j}$, а затем слева на $\vec{i}$ и, пользуясь тем, что $\vec{i}\times\vec{j} = 1$, $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = 0$, получаем $a_x = \vec{a}\times\vec{j}$ и $a_y = \vec{i}\times\vec{a}$.

В задачах этого раздела предполагается, что все рассматриваемые геометрические фигуры и векторы принадлежат некоторой плоскости. В случае, если в задаче рассматриваются координаты векторов без указания базиса, то он считается положительным и ортонормированным.

З А Д А Ч И

137. Упростить:

1) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$;

2) $(3\vec{a}+2\vec{b})\times\frac{1}{2}(\vec{a}-3\vec{b})$.

138. Доказать тождества:

1) $\vec{a}\,' \times \vec{b}\,' = \vec{a}\times\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b}\,' = \vec{b}\times\vec{a}\,'$;

3) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}\,'-\vec{b}\,') = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$;

4) $(\vec{a}\times\vec{b})^2 + (\vec{a},\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$.

139. Задан ненулевой вектор $\vec{a}$. Что можно сказать о векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$?

140. Что можно сказать о векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если существуют такие ненулевые векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, что выполняются одновременно равенства: $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{c}\times\vec{b}$ и $\vec{d}\times\vec{a}=\vec{d}\times\vec{b}$?

141. При какой зависимости между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соотношение $\vec{a}\times\vec{x}=(\vec{b},\vec{x})$ имеет место для всякого вектора $\vec{x}$ плоскости?

142. Каким свойствам определителей второго порядка соответствуют следующие свойства кососкалярного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{a}=0$;
2) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}$;
3) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
5) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{b}+\lambda\vec{a})=(\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{b}$.

143. На плоскости два базиса $(\vec{a},\vec{b})$ и $\vec{a}^*,\vec{b}^*$ называются *взаимными*, если $(\vec{a},\,\vec{a}^*)=(\vec{b},\,\vec{b}^*)=1$, $(\vec{a},\,\vec{b}^*)=(\vec{a}^*,\,\vec{b})=0$. Показать, что: а) всякому базису $(\vec{a},\vec{b})$ соответствует единственный взаимный, определенный равенствами:

$$\vec{a}^*=\frac{-\vec{b}'}{\vec{a}\times\vec{b}};\quad \vec{b}^*=\frac{-\vec{a}'}{\vec{a}\times\vec{b}};$$

б) базис, взаимный базису $(\vec{a}^*,\,\vec{b}^*)$, совпадает с исходными базисом $(\vec{a},\vec{b})$; в) $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}^*\times\vec{b}^*)=1$.

144. Когда базис $(\vec{a},\vec{b})$ взаимен самому себе?

145. Доказать, что если $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, то разложение любого вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид:

$$\vec{c}=(\vec{c},\,\vec{a}^*)\vec{a}+(\vec{c},\,\vec{b}^*)\vec{b}.$$

146. Доказать тождество:

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})=0.$$

147. Радиусы-векторы вершин треугольника $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$. Получить следующую формулу для площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}|(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)+(\vec{r}_2\times\vec{r}_3)+(\vec{r}_3\times\vec{r}_1)|.$$

148. На двух сторонах треугольника ABC, вне его, построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Доказать, что продолжение медианы CM треугольника ABC является высотой треугольника DCF.

149. Зная длины a и b непараллельных сторон параллелограмма и угол α между ними, найти угол между диагоналями.

150. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ продолжены до пересечения в точке O. Обозначая M и N соответственно середины диагоналей BD и AC, показать, что $S_{OMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

151. Стороны AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ разделены соответственно точками E, F, G и H в одном и том же отношении λ. Доказать, что $EFGH$ параллелограмм и найти отношение площадей параллелограммов $ABCD$ и $EFGH$.

152. В треугольнике ABC точки M, N и P делят стороны AB, BC и CA в отношениях α, β и γ соответственно. Выразить площадь треугольника MNP через площадь треугольника ABC.

153. Доказать, что площадь треугольника, вершинами которого служат основания медиан исходного треугольника, равна 1/4 площади исходного треугольника.

154. Найти отношение площади треугольника, вершинами которого служат основания биссектрис исходного треугольника, к площади исходного треугольника.

155. Доказать, что два треугольника, вписанные в данный треугольник, вершины которых симметричны относительно середин сторон исходного треугольника, равновелики. (Треугольник называется вписанным в данный, если его вершины лежат на различных сторонах данного треугольника или на их продолжениях).

156. Точки M, N и P делят стороны AB, BC и CA треугольника ABC соответственно в отношениях α, β и γ. Доказать, что равенство $\alpha\beta\gamma = -1$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы точки M, N и P лежали на одной прямой (теорема Менелая).

157. Стороны AB, BC, CA треугольника ABC делятся соответственно точками C', A' и B' в одном и том же отношении λ. Найти отношение площади треугольника, образованного пересечением прямых AA', BB', CC', к площади треугольника ABC.

158. Базисные вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имеют соответственно длины 1 и 3 и $\widehat{\vec{e}_1\,\vec{e}_2} = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}(2,1)$ и $\overrightarrow{AC}(-2,3)$.

159. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известны координаты векторов $\overrightarrow{AB}(-3,8)$, $\overrightarrow{BC}(2,-6)$ и $\overrightarrow{CD}(-4,4)$.

160. Дан вектор $\vec{a}(6,8)$. Найти единичный вектор $\vec{x}^\circ$, образующий прямой угол с вектором $\vec{a}$ и направленный так, что базис $(\vec{a},\vec{x}^\circ)$ является положительным.

161. Найти базис, взаимный базису $(\vec{a},\vec{b})$, где $\vec{a}(4,1)$ и $\vec{b}(3,-3)$.

162. Базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ удовлетворяет условиям $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $\widehat{\vec{e}_1\,\vec{e}_2} = \frac{5\pi}{6}$. Даны два вектора $\vec{a}(1,2)$ и $\vec{b}(2,2)$. Найти $\vec{a}\times\vec{b}$.

6. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ в пространстве называется *положительно ориентированным*, короче – *положительным (правым)*, если для представителей векторов с общим началом направление кратчайшего вращения от представителя вектора $\vec{e}_1$ к представителю вектора $\vec{e}_2$ (при условии, что смотрят с конца представителя вектора $\vec{e}_3$) противоположно направлению вращения часовой стрелки (рис. 15, а). В противном случае базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ называется *отрицательно ориентированным*, короче – *отрицательным (левым)* (рис. 15, б).

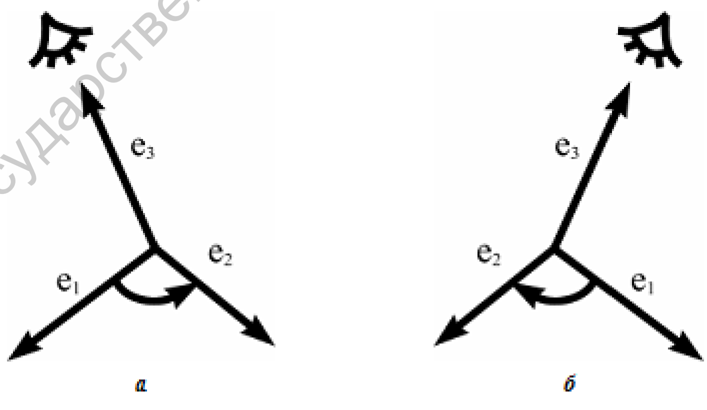

Рис. 15

При транспозиции двух векторов базиса его ориентация меняется на противоположную.

Базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ одинаково (противоположно) ориентирован с базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат векторов первого базиса относительно второго, положителен (отрицателен).

Пространство с выделенным классом положительных базисов называется *ориентированным.*

Векторным произведением $[\vec{a}\vec{b}]$ двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор, который удовлетворяет трем условиям:

а) длина его равна произведению длин перемножаемых векторов и синуса угла между ними:

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\vec{b}},$$

б) векторное произведение перпендикулярно обоим сомножителям:

$$[\vec{a}\vec{b}]\perp\vec{a} \quad \text{и}[\vec{a}\vec{b}]\perp\vec{b},$$

в) базис $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}\vec{b}])$ положительный.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то полагают $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$.

Геометрические свойства векторного произведения

1. Векторное произведение обращается в нуль только тогда, когда сомножители коллинеарны.

2. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на представителях сомножителей с общим началом, как на сторонах:

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = S_{\text{парал-ма}}.$$

Площадь треугольника в пространстве, построенного на представителях векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом, равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|[\vec{a}\vec{b}]|.$$

3. Синус угла между двумя неколлинеарными векторами в пространстве равняется отношению абсолютной величины векторного произведения данных векторов к произведению их длин:

$$\sin\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{|[\vec{a}\vec{b}]|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Формальные свойства векторного произведения

1. Векторное произведение антикоммутативно

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}].$$

2. $\lambda[\vec{a}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a})\vec{b}] = [\vec{a}(\lambda\vec{b})]$.

3. Векторное произведение дистрибутивно

$$[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}],$$

$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}].$$

4. Двойные векторные произведения $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ и $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$ выражаются равенствами: $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\,\vec{b})$ и $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a},\,\vec{c}\,) - \vec{a}(\vec{b},\,\vec{c})$.

Выражение векторного произведения в координатах

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами относительно положительного ортонормированного базиса $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то

$$[\vec{a}\vec{b}]\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

и

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В механике векторное произведение применяется для вычисления момента $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы с полюсом в данной точке.

Смешанным произведением $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению двух векторов: векторного произведения первых двух сомножителей $[\vec{a}\vec{b}]$ и третьего вектора $\vec{c}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$.

Геометрические свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.

2. Смешанное произведение положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда сомножители образуют положительный (отрицательный) базис, то есть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ равносильно тому, что базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – положительный и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ равносильно тому, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – отрицательный.

3. Абсолютная величина смешанного произведения некомпланарных векторов равна объему параллелепипеда, построенного на представителях сомножителей с общим началом, как на ребрах:

$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{парал-да}}.$$

Объем тетраэдра, ребрами которого, выходящими из его общей вершины, служат представители векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен:

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Формальные свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}.$$

2. Смешанное произведение меняет знак при перестановке двух сомножителей:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}.$$

3. $\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c})$.

4. Смешанное произведение дистрибутивно:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c};$$

$$\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c}$$

и

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1 + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_2.$$

Выражение смешанного произведения в координатах

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ пространства, заданных координатами $\vec{a}(a^1, a^2, a^3)$, $\vec{b}(b^1, b^2, b^3)$ и $\vec{c}\,(c^1, c^2, c^3)$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \sqrt{g}\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix},$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

и называется дискриминантом метрических параметров базиса.

В случае положительного ортонормированного базиса:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

`Пример 1.` Доказать, что $[(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})] = -2\vec{b}$. Какой геометрический смысл имеет это тождество?

`Решение.` Пользуясь формальными свойствами векторного произведения, имеем: $[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})] = [\vec{a}\vec{a}]+[\vec{b}\vec{a}]-[\vec{a}\vec{b}]-[\vec{b}\vec{b}] = -2[\vec{a}\vec{b}]$. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы, то $|[\vec{a}\vec{b}]|$ есть площадь параллелограмма S, построенного на этих векторах, а $|[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]|$ – площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма. Таким образом, доказанное тождество дает теорему: площадь параллелограмма, построенного на диагоналях некоторого параллелограмма Q, равна удвоенной площади этого параллелограмма Q.

`Пример 2.` Доказать, что если к точке P приложено n сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, то момент их равнодействующей относительно некоторой точки пространства O будет равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки O.

`Решение.` Если обозначить через $\vec{F}$ равнодействующую данной системы сил, то ее момент $\vec{M}$ относительно точки O есть вектор $[\overrightarrow{OP}\vec{F}]$, момент $\vec{M}_i$ составляющий силы $\vec{F}_1$ относительно O есть вектор $[\overrightarrow{OP}\vec{F}_i]$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Так как

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad \text{то} \quad \vec{M} = [\overrightarrow{OP}\vec{F}] = [\overrightarrow{OP}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{n}[\overrightarrow{OP}\vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i.$$

`Пример 3.` Вычислить смешанное произведение

$$(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j})(\beta\vec{j} + \gamma\vec{k})(\gamma\vec{k} + \alpha\vec{i}),$$

знаая, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют положительный ортонормированный базис.

`Решение.` Пользуясь формальными свойствами смешанного произведения, находим

$$(\alpha\vec{i}+\beta\vec{j})(\beta\vec{j}+\gamma\vec{k})(\gamma\vec{k}+\alpha\vec{i})=\alpha\beta\gamma(\vec{i}\vec{j}\vec{k})+\alpha\beta\alpha(\vec{i}\vec{j}\vec{i})+$$

$$+\alpha\gamma\gamma(\vec{i}\vec{k}\vec{k})+\alpha\gamma\alpha(\vec{i}\vec{k}\vec{i})+\beta\beta\gamma(\vec{j}\vec{j}\vec{k})+\beta\beta\alpha(\vec{j}\vec{j}\vec{i})+$$

$$+\beta\gamma\gamma(\vec{j}\vec{k}\vec{k})+\beta\gamma\alpha(\vec{j}\vec{k}\vec{i})=2\alpha\beta\gamma(\vec{i}\vec{j}\vec{k}).$$

Так смешанное произведение $\vec{i}\vec{j}\vec{k}=1$ ($\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ равно объему куба, построенного на ортах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), то получаем окончательно, что данное смешанное произведение равно $2\alpha\beta\gamma$.

`Пример 4.` Найти объем тетраэдра, зная длины трех его ребер, выходящих из общей вершины, и углы между ними.

`Решение.` Рассмотрим тетраэдр $SABC$; пусть $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\gamma$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}}=\alpha$, $\widehat{\vec{c}\vec{a}}=\beta$. Тогда $V_T=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Используя тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2=\begin{vmatrix}\vec{a}^{\,2} & (\vec{a},\,\vec{b}) & (\vec{a},\,\vec{c})\\ (\vec{b},\,\vec{a}) & \vec{b}^{\,2} & (\vec{b},\,\vec{c})\\ (\vec{c},\,\vec{a}) & (\vec{c},\,\vec{b}) & \vec{c}^{\,2}\end{vmatrix}.$$

Находим

$$V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta\\ ba\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha\\ ca\cos\beta & cb\cos\alpha & c^2\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\frac{abc}{6}\begin{vmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

`Пример 5.` Найти единичный вектор, образующий острый угол с ортом $\vec{k}$ и ортогональный к плоскости треугольника AOC, зная векторы $\overrightarrow{OA}(1,2,3)$ и $\overrightarrow{OC}(2,3,1)$.

`Решение.` Векторное произведение $[\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}](-7,5,-1)$ ортогонально плоскости данного треугольника и образует с $\vec{k}$ тупой угол (последнее следует из того, что его третья координата отрицательна). Следовательно, искомым единичным вектором будет

$$\vec{n}=-\frac{[\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}]}{|[\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}]|},$$

то есть вектор

$$\vec{n} = \left(\frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right).$$

`Пример 6.` Решить уравнение $[\vec{a}\vec{x}] = \vec{b}$, где $\vec{x}$ – искомый, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – данные векторы.

`Решение.` Возможны два случая: 1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ неперпендикулярны и 2) $\vec{a} \perp \vec{b}$. В первом случае уравнение $[\vec{a}\vec{x}] = \vec{b}$ не имеет решения, так как левая часть уравнения при любом векторе $\vec{x}$ перпендикулярна $\vec{a}$. Во втором случае $\vec{x}$ компланарен векторам $\vec{a}$ и $[\vec{a}\vec{b}]$, следовательно, $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta[\vec{a}\vec{b}]$, где α, β – действительные числа. Подставляя $\vec{x}$ в исходное уравнение, получаем: $\beta = -\frac{1}{a^2}$. Окончательно имеем

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \frac{1}{a^2}[\vec{b}\vec{a}],$$

где α – действительное число. Проверка очевидна.

З А Д А Ч И

163. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют положительный базис. Определить ориентацию базиса в каждом из следующих случаев:

1) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a})$,
2) $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}, -\vec{a} + \vec{b}, -\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c})$.

164. Будут ли базисы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ одинаково или противоположно ориентированы, если:

$\vec{a}(3, -1, 4)$, $\vec{b}(-2, 3, -3)$, $\vec{c}(-9, 1, 7)$;
$\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(-3, 0, 2)$, $\vec{w}(5, 1, -2)$.

165. Показать, что два базиса, один из которых получается из другого с помощью отражения от плоскости π, имеют противоположную ориентацию.

166. Вычислить длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $a = 10$, $b = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$.

167. Показать, что $|[\vec{a}\vec{b}]| \leq ab$. Когда $|[\vec{a}\vec{b}]| = ab$?

168. Вычислить:

1) $[(2\vec{i} + 3\vec{j})(\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j})]$;
2) $[(\vec{i} + 3\vec{j})(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})]^2$.

169. Найти синус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $AB = 1$, $AD = 2$ и $\angle A = \frac{\pi}{3}$.

170. Доказать: векторное произведение двух неколлинеарных векторов равно произведению длины первого сомножителя и повернутой проекции второго сомножителя, построенной на плоскости π, перпендикулярной к первому сомножителю:

$$[\vec{a}\vec{b}] = a(\mathit{Пр}_{\pi}\vec{b}), \quad (\pi \perp \vec{a}).$$

171. Выразить векторное произведение двух неколлинеарных векторов, лежащих в ориентированной плоскости π, через их кососкалярное произведение и орт, ортогональный к этой плоскости.

172. Доказать тождество:$[\vec{a}\vec{b}]^2 + (\vec{a},\, \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}$.

173. Проверить справедливость равенств: $[(\vec{a} + \lambda\vec{b})\vec{b}] = [\vec{a}(\vec{b} + \beta\vec{a})] = [\vec{a}\vec{b}]$ и дать им геометрическое истолкование.

174. В каком случае равенства $[\vec{a}\vec{x}] = [\vec{b}\vec{x}]$ и $\vec{a} = \vec{b}$ эквивалентны?

175. Доказать, что если ненулевые векторы $[\vec{a}\vec{b}\,]$ и $[\vec{c}\vec{d}\,]$ коллинеарны , то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ компланарны.

176. Доказать, что из равенств $[\vec{a}\vec{b}\,] = [\vec{c}\vec{d}\,]$ и $[\vec{a}\vec{c}\,] = [\vec{b}\vec{d}\,]$ следует коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

177. Доказать, что если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, то равенства $[\vec{a}\vec{b}\,] = [\vec{b}\vec{c}\,] = [\vec{c}\vec{a}]$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ эквивалентны.

178. Доказать: площадь выпуклого плоского четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей и синуса угла между ними.

179. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

180. Доказать, что момент силы относительно точки сохранится, если силу переместить по прямой, вдоль которой она действует.

181. *Парой сил* называется совокупность двух противоположных сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$. *Моментом пары* относительно некоторой точки называется сумма моментов сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ относительно этой точки. Доказать, что момент пары не зависит от точки, относительно которой он взят.

182. Доказать коллинеарность векторов $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ и $\vec{b} - \vec{c}$ при условии, что вектор $\vec{a}$ перпендикулярен разности $\vec{b} - \vec{c}$.

183. При каких условиях для ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = [[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$?

184. Доказать тождества:

$$1)\ [\,\vec{a}\,[\,\vec{b}\,\vec{c}\,]] + [\,\vec{b}\,[\,\vec{c}\,\vec{a}\,]] + [\,\vec{c}\,[\vec{a}\,\vec{b}\,]] = \vec{0} \quad (\text{\textit{тождество Якоби}}),$$

$$2)\ [\,\vec{a}\,[\,\vec{b}\,[\,\vec{c}\,\vec{d}\,]\,]\,] = [\,\vec{a}\,\vec{c}\,](\vec{b},\, \vec{d}) + [\,\vec{a}\,\vec{d}\,](\vec{b},\, \vec{c}),$$

$$3)\ [\,\vec a\,\vec b\,][\,\vec c\,\vec d\,] = \begin{vmatrix}(\vec a,\,\vec c) & (\vec a,\,\vec d)\\ (\vec b,\,\vec c) & (\vec b,\,\vec d)\end{vmatrix}.$$

185. Доказать тождества:

$$1)\ [\,[\,[\,\vec a\,\vec b\,]\,\vec a\,]\vec b\,] = -(\vec a,\,\vec b)[\vec a\vec b],$$

$$2)\ [\,[\,[\,[\,\vec a\,\vec b\,]\vec a\,]\vec b\,]\vec a\,] = (\vec a,\,\vec b)\begin{vmatrix}\vec a & \vec b\\ a^2 & (\vec a,\,\vec b)\end{vmatrix}.$$

и обобщить их (по числу скобок) на все натуральные n:

$$\underbrace{[[\ldots[}_{n}[[\vec a\vec b]\vec a]\vec b]\ldots\vec a]\vec b] = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(\vec a,\,\vec b)^{\frac{n-1}{2}}[\vec a\vec b], \quad n \geq 3$$

– нечетное число,

$$[\underbrace{[\ldots[[}_{n}\,\vec a\vec b]\vec a]\ldots\vec b]\vec a] = (-1)^{\frac{n}{2}}(\vec a,\,\vec b)^{\frac{n}{2}-1}\begin{vmatrix}\vec a & \vec b\\ a^2 & (\vec a,\,\vec b)\end{vmatrix}, \quad n \geq 2$$

– четное число.

186. Доказать, что если $\vec a \perp \vec b$, то $[\vec a[\vec a[\vec a[\vec a\vec b]]]] = a^4\vec b$ и выяснить геометрический смысл этого утверждения.

187. В треугольнике ABC проведена высота AD. Полагая $\overrightarrow{AC} = \vec b$, $\overrightarrow{CB} = \vec a$ и $\overrightarrow{AD} = \vec h$, выразить $\vec h$ через $\vec a$ и $\vec b$.

188. Доказать, что $|\,\vec a\vec b\vec c\,| \leq abc$.

189. Показать, что $\left(\frac{\vec a+\vec b}{2}\right)\left(\frac{\vec b+\vec c}{2}\right)\left(\frac{\vec c+\vec a}{2}\right) = \frac{1}{4}\vec a\vec b\vec c$ и выяснить геометрический смысл этого равенства при условии, что векторы $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ некомпланарны.

190. Доказать, что смешанное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить линейную комбинацию двух других.

191. Доказать, что векторы $\alpha\vec a - \beta\vec b$, $\gamma\vec b - \alpha\vec c$ и $\beta\vec c - \gamma\vec a$ компланарны.

192. От одной точки отложены три некомпланарных вектора $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы представителей векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, перпендикулярна вектору $[\vec a\vec b\,] + [\vec b\,\vec c\,] + [\vec c\,\vec a\,]$.

193. Доказать тождество

$$[\vec a[\vec b\vec c]]\,[\vec b[\vec c\,\vec a\,]]\,[\vec c\,[\vec a\vec b\,]] = \vec 0$$

и вывести из него следствие: если через боковые ребра треугольной пирамиды провести плоскости, перпендикулярные противоположным боковым граням, то они пересекутся по одной прямой.

194. Решить уравнения:

$$1)\, \vec{x} - [\vec{a}\vec{x}] = [\vec{a}\vec{b}];$$

$$2)\, \vec{x} - [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$ — данные, а $\vec{x}$ — неизвестный вектор.

195. Найти вектор $\vec{x}$ и число α из системы уравнений:

$$(\vec{a},\, \vec{x}) = 0, \quad \alpha\vec{a} - [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}.$$

196. Доказать тождества:

1) $[[\,\vec{a}\vec{b}\,][\,\vec{c}\vec{d}\,]] = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d} = (\vec{a}\vec{c}\vec{d})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}\vec{d})\vec{a}$;
2) $[\vec{a}\vec{b}][\vec{b}\vec{c}][\vec{c}\vec{a}] = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
3) $[\vec{a}\vec{b}]^2 = \vec{a}[\vec{b}\vec{a}]\vec{b} = \vec{b}[\vec{a}\vec{b}]\vec{a}$.

197. Показать, что из компланарности векторов $[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{b}\vec{c}]$ и $[\vec{c}\vec{a}]$ следует их коллинеарность.

198. Для базиса $(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})$ базис $(\vec{a}^*,\, \vec{b}^*\, \vec{c}^*)$ называется *взаимным*, если имеют место равенства:

$$(\vec{a},\, \vec{a}^*) = 1, \quad (\vec{a},\, \vec{b}^*) = 0, \quad (\vec{a},\, \vec{c}^*) = 0,$$

$$(\vec{b},\, \vec{a}^*) = 0, \quad (\vec{b},\, \vec{b}^*) = 1, \quad (\vec{b},\, \vec{c}^*) = 0,$$

$$(\vec{c},\, \vec{a}^*) = 0, \quad (\vec{c},\, \vec{b}^*) = 0, \quad (\vec{c},\, \vec{c}^*) = 1,$$

Доказать, что

$$\vec{a}^* = \frac{[\,\vec{b}\vec{c}\,]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \quad \vec{b}^* = \frac{[\,\vec{c}\vec{a}\,]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}, \quad \vec{c}^* = \frac{[\,\vec{a}\vec{b}\,]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}.$$

199. Доказать, что базис совпадает с ему взаимным тогда и только тогда, когда он образован из единичных попарно взаимно перпендикулярных векторов.

200. Найти взаимный базис для базиса:

$$1)\, (\vec{i} + \vec{j},\, \vec{j} + \vec{k},\, \vec{k} + \vec{i}),$$

$$2)\, (\vec{a},\, [\vec{a}\vec{b}],\, [\vec{a}[\vec{a}\vec{b}]]), \quad (\vec{a} \nparallel \vec{b}).$$

201. Доказать, что разложение произвольного вектора $\vec{x}$ пространства по базису $(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c})$ может быть представлено в виде (*формула Гиббса*):

$$\vec{x} = (\vec{x},\, \vec{a}^*)\vec{a} + (\vec{x},\, \vec{b}^*)\vec{b} + (\vec{x},\, \vec{c}^*)\vec{c},$$

где $(\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ – взаимный базис для базиса $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

202. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$(\vec{a}, \vec{x}) = \alpha, \quad (\vec{b}, \vec{x}) = \beta, \quad (\vec{c}, \vec{x}) = \gamma.$$

203. Решить систему:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{x} = \alpha, \quad \vec{b}\vec{c}\vec{x} = \beta, \quad \vec{c}\vec{a}\vec{x} = \gamma, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0,$$

где α, β, γ – действительные числа.

204. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Зная, что $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, найти вектор $\vec{x} = \overrightarrow{SC}$ при условии $\vec{a}\vec{b}\vec{x} > 0$.

205. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Зная, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AS}} = \alpha$, найти вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AS}$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{x} > 0)$.

206. Дан прямой круглый конус. Орты $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ параллельны образующим одного из осевых сечений конуса. Найти орты, параллельные образующим осевого сечения конуса, перпендикулярного первому.

207. Найти ненулевое решение системы:

$$\vec{x}^2 + \vec{a}\vec{x}\vec{b} = 0, \quad (\vec{a}, \vec{x}) = 0, \quad (\vec{b}, \vec{x}) = 0 \quad (\vec{a} \nparallel \vec{b}).$$

208. Решить систему:

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0, \quad (\vec{b}, \vec{x}) = 0, \quad \vec{x}[\vec{a}\vec{x}]\vec{b} + (\vec{c}, \vec{x}) + [\vec{b}\vec{x}]^2 = 0 \quad ([\vec{a}\vec{b}] \neq \vec{0}).$$

209. Решить систему:

$$(\vec{a}, \vec{x}) = \alpha, \quad [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b}, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \perp \vec{b}).$$

210. Решить систему:

$$[\vec{a}[\vec{x}\vec{b}]] = \vec{c}, \quad \vec{x}\vec{b}\vec{c} = 0 \quad \text{при условии} \quad (\vec{a}, \vec{c}) = 0, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0, \quad (\vec{a}, \vec{b}) \neq 0.$$

211. Доказать тождество:

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]][\vec{c}[\vec{b}\vec{a}]] = \begin{vmatrix} [\vec{a}\vec{b}] & [\vec{c}\vec{b}] & [\vec{c}\vec{a}] \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{b}) & 0 \\ 0 & (\vec{c}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{a}) \end{vmatrix}.$$

212. Решить уравнение:

$$[[\vec{a}\vec{x}\,][\,\vec{b}\vec{x}\,]] = \vec{c}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0.$$

213. Показать, что уравнение:

$$\vec{x} = [\vec{a}\vec{x}\,] + [\vec{a}\,[\vec{b}\vec{x}\,]]$$

имеет только нулевое решение.

214. Показать, что система

$$[\vec{a}\,[\vec{x}\vec{b}]] = \vec{c}, \quad [\vec{c}\,[\vec{x}\vec{b}]] = \vec{b}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$$

не имеет решений.

215. Найти векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из системы

$$[[\,\vec{a}\vec{x}\,][\,\vec{b}\vec{x}\,]] = \vec{y}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{y} = 0, \quad [\vec{a}\vec{b}] \neq 0.$$

216. Доказать, что уравнение

$$[[\vec{i}\vec{x}\,][\vec{j}\vec{x}\,]] = [\vec{k}[\vec{k}\vec{x}\,]],$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – векторы ортонормированного базиса, имеет только нулевое решение.

217. Решить уравнение:

$$[\vec{x}\,[\vec{a}\,\vec{x}\,]] = \vec{b}, \quad [\vec{a}\vec{b}] \neq 0, \quad (\vec{a},\,\vec{b}) > 0.$$

218. Решить уравнение:

$$\vec{x} - [\vec{a}\vec{x}] - [\vec{a}[\vec{b}\vec{x}]] = \vec{b}, \quad [\vec{a}\vec{b}] \neq 0.$$

219. Показать, что система

$$[\vec{a}\,[\vec{a}\vec{x}\,]] = \vec{y}, \quad [\vec{b}\,[\vec{b}\vec{y}]] = \vec{z}, \quad [\vec{c}\,[\vec{c}\vec{z}\,]] = \vec{x}, \quad \vec{a}^{\circ}\vec{b}^{\circ}\vec{c}^{\circ} = 1$$

имеет только нулевое решение.

220. Истолковать геометрически тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 & m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 \\ m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 & m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 \end{vmatrix}.$$

221. Какие свойства определителей третьего порядка выражают формальные свойства смешанного произведения?

222. Найти координаты векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$, если

1) $\vec{a}(3,-1,4)$ и $\vec{b}(-2,3,-3)$;
2) $\vec{a}(5,-2,1)$ и $\vec{b}(4,0,6)$.

223. Вычислить площадь треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(-5,2,3)$, $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$.

224. Найти какой-либо вектор, ортогональный плоскости треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(-4,-3,-1)$, $\overrightarrow{AC}(-3,3,-1)$.

225. Найти длину высоты AD треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(-5,-8,-7)$, $\overrightarrow{AC}(-1,-5,-5)$.

226. Вектор $\vec{x}$, ортогональный к векторам $\vec{a}(4,-2,-3)$ и $\vec{b}(0,1,3)$, образует с вектором $\vec{j}$ ортонормированного базиса тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=26$, найти его координаты.

227. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}(2,-3,1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

228. Даны векторы: $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(-3,1,2)$, $\vec{c}(1,2,3)$. Найти координаты векторов: 1. $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$; 2. $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$.

229. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в каждом из случаев:

1) $\vec{a}(1,2,-1)$, $\vec{b}(-1,1,1)$, $\vec{c}(2,1,0)$,
2) $\vec{a}(-2,0,3)$, $\vec{b}(1,-1,0)$, $\vec{c}(0,3,-2)$,
3) $\vec{a}(1,-1,3)$, $\vec{b}(-2,2,1)$, $\vec{c}(3,-2,5)$,

230. Доказать, что векторы $\vec{a}(-1,3,3)$, $\vec{b}(1,1,-1)$ и $\vec{c}(2,6,0)$ компланарны.

231. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если $\overrightarrow{AB}(3,0,3)$, $\overrightarrow{AC}(1,1,-2)$, $\overrightarrow{AD}(4,1,0)$.

232. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно: $\overrightarrow{AB}(-1,2,-3)$, $\overrightarrow{AC}(-3,1,-1)$, $\overrightarrow{AD}(3,9,-6)$. Найти длину высоты тетраэдра, опущенной из точки A.

233. В четырехугольнике $ABCD$ дано: $\overrightarrow{AB}(-1,3,4)$, $\overrightarrow{AC}(0,4,3)$, $\overrightarrow{AD}(3,3,-3)$. Доказать, что четырехугольник плоский, и найти его площадь.

234. Найти объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, если $\overrightarrow{AB}(2,-3,1)$, $\overrightarrow{AD}(1,-4,-3)$, $\overrightarrow{AA'}(0,3,2)$.

235. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Основание тетраэдра – треугольник ABC. Известны векторы $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}(0,-2,4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD}$, если его орт имеет координаты $(2/7, 6/7, 3/7)$.

236. Для базиса $\vec{a}(2,1,-1)$, $\vec{b}(-3,0,2)$, $\vec{c}(5,1,-2)$ найти взаимный базис.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1

3. 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$, 2) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, 3) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ и $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, 4) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

4. 1) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, 2) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой.

5. $|\vec{p}|=|\vec{q}|$.

6. $\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{c}-\vec{d}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{\vec{d}-\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$.

7. $\overrightarrow{MA}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{MB}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{MC}=\frac{\vec{b}+\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.

8. $\overrightarrow{BC}=\frac{4\vec{l}-2\vec{k}}{3}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{2\vec{l}-4\vec{k}}{3}$.

9. $\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{m}+\vec{p}}{2}=-\frac{\vec{n}+\vec{q}}{2}$.

10. $\overrightarrow{BF}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BG}=-\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$, $\overrightarrow{FD}=\vec{a}-\vec{d}$, $\overrightarrow{DG}=\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{DH}=\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\overrightarrow{CG}=\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=-\vec{a}-\vec{b}$.

11. $\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{RS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{3}$.

13. $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}=\frac{1}{2}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{EF}}=-1$, $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{AB}}=2$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$ не имеет смысла.

14. 1) 2/3, 2) -1/2, 3) отношение не имеет смысла.

15. 4.

17. $\overrightarrow{OM}=\lambda(b\vec{a}+a\vec{b})$.

21. 3/4.

22. Вектор суммы повернется на тот же угол в том же направлении, длина его не изменится.

25. Модуль равнодействующей равен F, равнодействующая делит угол между силами $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ пополам.

2

26. $\lambda_1=\frac{1}{n-1}$, $\lambda_2=\frac{2}{n-2}$, ..., $\lambda_{n-1}=n-1$.

27. $\vec{r}_C=2\vec{r}_B-\vec{r}_A$.

28. $\vec{r}_D=\vec{r}_1+\vec{r}_3-\vec{r}_2$, $\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_3}{2}$.

29. $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}$.

30. $\overrightarrow{AD}=\frac{|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$.

31. $\vec{r}_4=\vec{r}_1+\lambda(\vec{r}_3-\vec{r}_2)$, $\vec{r}\,'=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_3}{1+\lambda}$, $\vec{r}\,''=\frac{\vec{r}_1-\lambda\vec{r}_2}{1-\lambda}$.

32. $\vec{r}_C=\vec{r}_B+\vec{r}_D-\vec{r}_A$, $\vec{r}_{B'}=\vec{r}_B-\vec{r}_A-\vec{r}_{A'}$, $\vec{r}_{C'}=\vec{r}_B+\vec{r}_D-\vec{r}_{A'}$, $\vec{r}_{D'}=\vec{r}_D-\vec{r}_A+\vec{r}_{A'}$.

34. $\vec{r}=\frac{m_1\vec{r}_1+...+m_n\vec{r}_n}{m_1+...+m_n}$.

37. В точке пересечения диагоналей параллелограмма. Решение единственное.

38. Смотри пример 2.

40. Смотри пример 3.

41. Указание: найти радиусы-векторы середин указанных отрезков.

3

46. $\overrightarrow{AC}$.

47. -1.

48. 1) $\vec{a} \parallel h$, 2) $\vec{a} \parallel l$.

50. Прямая, параллельная направляющей прямой, в случае плоскости и плоскость, параллельная направляющей плоскости, в случае пространства.

51. $2\pi/3$.

52. $\pi/2$.

53. Обе проекции равны нулевому вектору.

54. $\overrightarrow{BC} = -\frac{b}{a}\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

55. $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{p} + \vec{r}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$.

57. $(1, 1)$, $(1, -1)$.

58. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2}, -1)$; $(-1, \frac{1}{2})$.

59. $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$.

60. 1) $\vec{a}$ и $\vec{d}$.

61. $\alpha = -3/2$.

62. 1) $(-30, 21)$.

66. 1) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

67. 1) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

68. $(-\frac{4}{3}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$.

4

70. 1) $14\sqrt{2}$; 2) 5; 3) 24; 4) -1.

71. 1) нет; 2) да; 3) верно тогда и только тогда, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 4) да; 5) верно тогда и только тогда, когда $\vec{b} \parallel \vec{c}$; 6) верно тогда и только тогда, когда $\vec{a} \parallel \vec{c}$ или $\vec{b} \perp \vec{a}, \vec{c}$; 7) верно тогда и только тогда, когда $\vec{p} \perp \vec{b}$.

72. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{p}$, где $\vec{p} \perp \vec{c}$.

73. $\vec{x} = \frac{\alpha \vec{a}}{\vec{a}^2} + \vec{b}$, где $\vec{b}$ – любой вектор, перпендикулярный $\vec{a}$.

74. Теорему косинусов. Теорему Пифагора.

75. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

77. Указание: выразить векторы медиан через векторы сторон.

78. Указание: выразить векторы сторон через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

79. Указание: выразить все векторы через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

80. Указание: выразить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$.

81. Указание: выразить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$.

86. $\overrightarrow{BH} = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}{\overrightarrow{AD}^2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

91. Указание: воспользоваться результатом задачи 78.

92. Указание: воспользоваться результатом задачи 79.

93. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta}$.

94. $CD^2 = \frac{2BC^2+2AC^2-AB^2}{4}$.

96. $CD^2 = \frac{BC \cdot AC(AB+BC+CA)(BC+AC-AB)}{(BC+AC)^2}$.

97. Указание: выразить $\overrightarrow{CD}$ из треугольников ACD и BCD.

98. $CD^2 = \frac{(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)(BC+CA-AB)(CA+AB-BC)}{4AB^2}$.

99. $CD^2 = \frac{\lambda}{1+\lambda}BC^2 + \frac{1}{1+\lambda}AC^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}AB^2$.

103. $MM'^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 + a'^2 + b'^2 - c'^2)$.

104. $\cos\varphi = (a^2 - b^2) : (a^2 + b^2)$.

105. $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

106. $\alpha = 2, 1$.

107. $\cos C = \frac{4}{5}$.

108. $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$.

109. $\cos\varphi = \frac{5\cos\alpha-4}{5-4\cos\alpha}$.

111. Указание: доказать сначала, что $\operatorname{ctg} A = -\frac{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})}{2S}$.

112. Указание: доказать сначала, что $\operatorname{ctg} A = \frac{a^2}{2S}$.

113. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b^2+b'^2-a^2-a'^2}{2cc'}$.

115. $\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = (CA^2 + AB^2 - BC^2) : 2AB^2$.

116. $\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CM} = (BC^2 - CA^2) : 2AB^2$.

117. $\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CN} = (BC-CA)(BC-CA-AB)(BC+CA+AB) : 2AB^2(BC+CA)$.

118. 1) 25; 2) 0; 3) -18.

119. 1) 47; 2) (60; 140).

120. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

121. $x = \frac{15}{8}$.

122. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

123. $(3, 11)$.

124. $A = \frac{\pi}{2}$, $\cos B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

125. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{2}{13}$.

126. $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\pi}{3}$.

127. 1) $\frac{14}{\sqrt{826}}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{\sqrt{114}}$.

128. 1) 705; 2) (822, -1148, -61).

130. $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

131. $\cos A = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\cos B = \frac{4}{21}$, $\cos C = \frac{9}{7\sqrt{2}}$.

132. $\text{пр}_{\vec{b}^\circ}\vec{a} = 3$.

133. 5.

134. 1) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi = 60^\circ$.

135. 1) $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; 2) $\cos\varphi = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$.

136. $\cos\varphi = -\frac{274}{\sqrt{97}\sqrt{1789}}$.

5

137. 1) $2(\vec{b}\times\vec{a})$; 2) $10(\vec{b}\times\vec{a})$.

139. Разность $\vec{b}-\vec{c}$ коллинеарна $\vec{a}$.

140. Если векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ неколлинеарны, то $\vec{a}=\vec{b}$. Если же $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, то разность $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарна $\vec{c}$.

141. $\vec{b} = \vec{a}\,'$.

144. Если базис $(\vec{a}, \vec{b})$ ортонормированный.

149. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2ab\sin\alpha}{b^2-a^2}$.

151. $\frac{(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}$.

152. $\left|\frac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\right| S_{ABC}$.

153. Указание: воспользоваться формулой, выведенной в предыдущей задаче.

154. См. указание к задаче 153.

155. См. указание к задаче 153.

156. См. указание к задаче 153.

157. $\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}$.

158. $6\sqrt{2}$.

159. 3.

160. $\vec{x} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

161. $\vec{a}^* = (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $\vec{b}^* = (\frac{1}{15}, -\frac{4}{15})$.

162. $\frac{5\pi}{3}$.

6

163. 1. Положительный. 2. Отрицательный.

164. Противоположно.

165. Указание: вычислить координаты векторов данных базисов относительно базиса, два первых вектора которого лежат в плоскости π, а третий вектор перпендикулярен π.

166. 16.

168. 1) $3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$; 2) 35.

169. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

171. Если $\vec{k}$ – орт, ортогональный ориентированной плоскости π и направлен так, что положительное вращение в ней, рассматриваемое с конца вектора $\vec{k}$, противоположно направлению вращения часовой стрелки, то $[\vec{a}\vec{b}] = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{k}$.

173. Геометрическое истолкование: площади двух параллелограммов с одинаковыми основаниями и равными высотами равны.

174. Если область определения $\vec{x}$ содержит по меньшей мере два неколлинеарных вектора.

177. Решение. Из $[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{c}]$ следует $[(\vec{a} + \vec{c})\vec{b}] = \vec{0}$, то есть $\vec{a} + \vec{c} = \lambda\vec{b}$. Умножая последнее равенство слева векторно на $\vec{c}$, находим $\lambda = -1$. Обратно: умножая равенство $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ слева векторно на $\vec{c}$, а затем справа на $\vec{b}$, получим требуемое.

179. Когда прямая, определяемая вектором силы, проходит через эту точку.

181. Момент пары относительно любой точки пространства равен $[\overrightarrow{P_2P_1}\vec{F}]$, где P_2 и P_1 – точки приложения сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ соответственно.

183. Указание: рассматриваемое равенство равносильно следующему $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}\vec{c})\vec{a}$.

186. Геометрический смысл: так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то согласно задаче 170, построение $[\vec{a}\vec{b}]$ сводится к повороту вектора $\vec{b}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ в плоскости α, перпендикулярной вектору $\vec{a}$, и умножению на a. Построение 4-кратного векторного произведения, данного в примере, равносильно повороту вектора $\vec{b}$ в плоскости α на угол 2π и умножению на a^4.

187. $\vec{h} = \frac{1}{a^2}[\vec{a}\,[\vec{b}\vec{a}\,]]$.

189. Геометрический смысл: если в тетраэдре из любой вершины провести медианы боковых граней и принять их за ребра нового тетраэдра, то объем последнего равен четверти объема исходного тетраэдра.

193. Указание: воспользоваться тождеством Якоби задачи 184. Геометрическая интерпретация: пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, тогда они определяют тетраэдр $OABC$. Плоскость π, проходящая через OA перпендикулярно грани OBC, параллельна вектору $[\vec{b}\vec{c}]$, а вектор $[\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]$ является ее нормальным вектором. Аналогично находятся нормальные векторы двух других плоскостей. Эти нормальные векторы компланарны, следовательно, рассматриваемые плоскости, имея общую точку, проходят через одну прямую.

194. 1) Если $[\vec{a}\vec{b}\,] = \vec{0}$, то $\vec{x} = \vec{0}$; если $[\vec{a}\vec{b}\,] \neq \vec{0}$, то

$$\vec{x} = \frac{[\vec{a}\vec{b}\,] + [\vec{a}[\vec{a}\vec{b}\,]]}{1 + a^2}.$$

2) Если $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$, то $\vec{x} = \vec{b}$; если $[\vec{a}\vec{b}\,] \neq \vec{0}$, то

$$\vec{x} = \frac{(\vec{a}\vec{b})\vec{a} + \vec{b} + [\vec{a}\vec{b}]}{1 + a^2}.$$

195. $\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{a^2}$, $\vec{x} = \frac{[\vec{a}\vec{b}\,]}{a^2}$.

197. Указание: воспользоваться тождеством 2) предыдущей задачи.

198. Решение: из второго и третьего равенств первого столбца следует, что $\vec{a}^* \parallel [\,\vec{b}\vec{c}]$, то есть $\vec{a}^* = \lambda[\,\vec{b}\vec{c}]$; подставляя $\vec{a}^*$ в первое равенство, получим $\lambda = \frac{1}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$. Имеем $\vec{a}^* = \frac{[\vec{b}\vec{c}]}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$. Аналогично из равенств второго и третьего столбцов найдем $\vec{b}^*$ и $\vec{c}^*$ соответственно.

200. 1) $\vec{a}^* = \frac{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{2}$, $\vec{b}^* = \frac{\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}}{2}$, $\vec{c}^* = \frac{\vec{k}+\vec{i}-\vec{j}}{2}$;

2) $\vec{a}^* = \frac{\vec{a}}{a^2}$, $[\vec{a}\vec{b}]^* = \frac{[\vec{a}\vec{b}]}{[\vec{a}\vec{b}]^2}$, $[\vec{a}[\vec{a}\vec{b}]]^* = \frac{[\vec{a}[\vec{a}\vec{b}]]}{\vec{a}^2[\vec{a}\vec{b}]^2}$.

201. Указание: для нахождения коэффициентов разложения $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ умножить это равенство скалярно соответственно на векторы взаимного базиса $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$.

202. $\vec{x} = \frac{1}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}(\alpha[\,\vec{b}\vec{c}\,] + \beta[\,\vec{c}\vec{a}\,] + \gamma[\,\vec{a}\vec{b}\,])$.

203. $\vec{x} = \frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$.

204. $\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\frac{2\sqrt{2}}{a}[\,\vec{a}\vec{b}\,])$.
205. $\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{a\cos\alpha}[\,\vec{a}\vec{b}\,])$.
206. $\vec{x}^{\circ}_{1,2}=\frac{1}{2}(\vec{n}_1+\vec{n}_2\pm\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}[\vec{n}_1\vec{n}_2])$, $\alpha=\widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}$.
207. $\vec{x}=[\vec{a}\vec{b}]$.
208. $\vec{x}=\frac{\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}}{(\vec{b}^2+(\vec{a},\vec{b})^2)[\vec{a}\vec{b}]^2}[\vec{a}\vec{b}]$.
209. $\vec{x}=\frac{\alpha\vec{a}+[\vec{b}\vec{a}]}{a^2}$.
210. $\vec{x}=\frac{\vec{c}}{(\vec{a},\vec{b})}+\lambda\vec{b}$, где λ – действительное число.
212. $\vec{x}=\frac{\vec{c}}{\sqrt{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}}$.
215. $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, $\vec{y}=\vec{0}$, где α, β – действительные числа.
217. $\vec{x}=\frac{-b^2\vec{a}+(\vec{a},\vec{b})\vec{b}}{|[\vec{a}\vec{b}]|\sqrt{\vec{a}\vec{b}}}$.
218. $\vec{x}=\frac{(\vec{a},\vec{b})\vec{a}+(1+(\vec{a},\vec{b}))^2\vec{b}+(1+(\vec{a},\vec{b}))[\vec{a}\vec{b}]}{a^2+(1+(\vec{a},\vec{b}))^2}$.
222. 1) $(-9,1,7)$, 2) $(-12,-26,8)$.
223. $S=\frac{1}{2}\sqrt{107}$.
224. Например, $\vec{N}(6,-1,-21)$.
225. $\sqrt{22}$.
226. $(-6,-24,8)$.
227. (7, 5, 1).
228. 1) (10, 13, 19), 2) $(-7,14,-7)$.
229. 1) 6; 2) 5; 3) -7.
231. 1/2.
232. $h=3$.
233. Площадь $ABCD$ равна $2\sqrt{74}$.
234. 11.
235. $\overrightarrow{AD}=(2,6,3)$.
236. $\vec{a}^*=(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-1)$, $\vec{b}^*=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)$, $\vec{c}^*=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$.

Оглавление