Министерство образования и науки Российской федерации
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
Кафедра математики и методики её преподавания

Капитонова Т.А.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел – тригонометрия

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100 – Педагогическое образование (Профиль подготовки – Математическое образование)

Саратов, 2013

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

К 20 **Капитонова Т.А. Элементарная математика. Раздел – тригонометрия**: Учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100 – Педагогическое образование (профиль подготовки – Математическое образование) / Т.А.Капитонова – Саратов, 2013. – 64 с.

Учебно-методическое пособие разработано для бакалавров педагогического образования по профилю «Математическое образование» в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Элементарная математика. Раздел – тригонометрия».

Пособие содержит теоретический материал по основным темам курса, задачи обучающе-контролирующего характера и варианты контрольной работы.

Пособие ориентировано прежде всего на самостоятельное изучение раздела «Тригонометрия», самоконтроль и самооценку результатов, для чего в пособии предусмотрена рейтинговая система оценки достижений студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие содержит задачи обучающе-контролирующего характера, рассчитанные на самостоятельное решение студентами второго курса, как на аудиторных занятиях, так и в ходе внеаудиторной работы.

Система задач представлена четырьмя группами: тестовые задания, задачи I уровня сложности – математические алгоритмизованные, задачи II уровня сложности – математические эвристические, задачи III уровня сложности – практические.

Тестовые задания предполагают запись в пустой строке своего варианта ответа. Тестовые задания выполняются непосредственно в Пособии. На зачёте/экзамене преподаватель может попросить обосновать выбор ответа любого тестового задания.

Задачи I уровня сложности можно считать тренировочными, так как их выполнение требует знания соответствующего теоретического материала и известных алгоритмов решения. Студенту не следует «увлекаться» выполнением тренировочных задач, как правило, достаточно решить несколько задачи этой группы (определённого вида), чтобы вспомнить или сформировать нужный алгоритм решения.

Задачи II уровня сложности требуют умелого сочетания ряда известных алгоритмов решения, а иногда и нестандартного подхода к задаче. Большая часть задач, решаемых студентом, должна быть из этой группы задач.

Задачи III уровня сложности требуют сформированности ряда компонентов информационной культуры, главным из которых можно считать умения, связанные с информационным (в том числе математическим) моделированием. Процесс оформления решения данного вида задач должен включать описание всех этапов информационного моделирования.

Задачи I-III уровней сложности выполняются в отдельной тетради и сдаются для проверки преподавателю в установленные преподавателем сроки (до проведения зачёта).

Каждая задача имеет свой «вес» – V. Вес тестового задания – 10 баллов, вес задачи I уровня – 20 баллов, II уровня – 30 баллов, III уровня – 40 баллов.

Для получения зачёта по модулю «Тригонометрия» студенту достаточно пройти тестирование по каждой теме (с результатом, не менее 70% верных ответов) и набрать 900 баллов, причём каждая тема должна быть «представлена» не менее чем 150 баллами.

За каждое правильно решённое задание студент получает максимальное количество баллов V только в том случае, если он единственный из группы включает это задание в свою контрольную работу. В противном случае максимальное количество баллов V за правильно решённое задание, делится на количество решающих N, и каждый получает за это задание $V/$ N баллов.

Задачи, решённые на аудиторных занятиях под руководством преподавателя, оцениваются по 5-балльной шкале для студента, решающего у доски, и в 1 балл для всех остальных.

В качестве методической поддержки обучающихся в Пособии предусмотрен теоретический материал и образцы рассуждения и оформления некоторых типов задач (примеры), предваряющие систему заданий по каждой теме курса.

Отчёт о выполнении заданий по каждой теме представляется в форме таблицы, в которой фиксируются ответы на тестовые задания и номера решённых заданий I-III уровней сложности, например:

Тема 3. Тригонометрические уравнения, работа ______________________ (Ф.И.О.)									
Тестовые задания									
233	234	235	236	237	238	239	240	241	…
ответ	*ответ*	*ответ*	*ответ*	*ответ*	*ответ*	*ответ*	*ответ*	*ответ*	
Задания I уровня сложности – 20 б.									
№№	250	255	260	269	27095				
баллы									
Задания II уровня сложности – 30 б.									
№№	297	298	299	305	345				
баллы									
Задания III уровня сложности – 40 б.									
№№	375	376	377	378					
баллы									

1. Определение тригонометрических функций. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

1.1. Числовая окружность.

Рассмотрим окружность единичного радиуса, центр которой совпадает с началом координат на координатной плоскости. Будем считать, что точкой отсчета на этой окружности является точка А – точка пересечения окружности с положительным направлением оси абсцисс.

Любому действительному числу α можно поставить в соответствие точку М(α) такую, что дуга с началом в точке отсчета и концом в точке М по величине будет равна действительному числу α. Причем, если движение от начала отсчета до точки М происходит против часовой стрелки, то направление *положительное*; по часовой стрелке – *отрицательное*.

Количество дуг, начало которых совпадает с точкой А, а конец – с точкой М, бесконечно; причем все они отличаются друг от друга по величине на число, кратное 2π, где 2π – полный оборот по окружности. Среди этих дуг можно всегда выбрать кратчайшую, тогда величины этих дуг можно записать следующим образом: $x+2\pi k$, k – любое целое число, а x – величина кратчайшей дуги.

Числовой окружностью называется единичная окружность с выбранной на ней точкой отсчета и положительным направлением обхода.

Наглядно можно представить этот процесс следующим образом: множество действительных чисел R однозначно отображается на числовую прямую, а числовая прямая, в свою очередь, «наматывается» на числовую окружность так, что начало отсчета числовой прямой совпадает с началом отсчета самой числовой окружности; положительное направление числовой прямой «наматывается» на числовую окружность против часовой стрелки, а отрицательное – по часовой стрелке.

1.2. Определение тригонометрических функций с использованием числовой окружности.

Пусть на числовой окружности задана некоторая точка М.

Синусом подвижной точки числовой окружности будем называть ординату этой точки, а абсциссу точки будем называть косинусом.

Обозначение: sinα, cosα.

tgα=sinα/cosα, cosα≠0, α≠π/2+πk,

ctgα=cosα/sinα, α≠πn,

secα=1/cosα, α≠π/2+πk,

cosecα=1/sinα, α≠πn.

1.3. Определение тригонометрических функций с использованием прямоугольного треугольника.

Рассмотрим прямоугольный треугольник с острым углом α (0< α < π/2). (гипотенуза – c, прилежащий катет – b, противолежащий катет – a).

1. Синусом острого угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

2. Косинусом острого угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

3. Тангенсом острого угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему: $tg\alpha = \frac{a}{b}$.

4. Котангенсом острого угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему: $ctg\alpha = \frac{b}{a}$.

5. Секансом острого угла α называется отношение гипотенузы к прилежащему катету: $\sec\alpha = \frac{c}{b}$.

6. Косекансом острого угла α называется отношение гипотенузы к противолежащему катету: $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$.

1.4. Градусная и радианная мера углов.

Каждой дуге числовой окружности можно поставить в соответствие центральный угол, опирающийся на эту дугу. Поэтому тригонометрические функции можно рассматривать не только от числового аргумента, но и от углового. Углы измеряются в градусах и радианах.

Замечание. Тригонометрические функции от числового аргумента соответствуют тригонометрическим функциям от углового аргумента, выраженного в радианах, т.е. эти величины равнозначны.

Центральный угол, величина которого равна 1 радиану, есть угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

1 радиан = 180°/π ≈ 57°.

1.5. Значения тригонометрических функций для некоторых углов.

α / функция	0 0°	$\pi/6$ 30°	$\pi/4$ 45°	$\pi/3$ 60°	$\pi/2$ 90°	π 180°	$3\pi/2$ 270°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	-1
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
secα	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	–	-1	–
cosecα	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	–	-1

1.6. Знаки тригонометрических функций

четверть / функция	I	II	III	IV
sinα,cosecα	+	+	-	-
cosα, secα	+	-	-	+
tgα,ctgα	+	-	+	-

1.7. Линия тангенсов и котангенсов

Очень часто для решения уравнений и неравенств целесообразно воспользоваться геометрической интерпретацией – линией тангенсов и котангенсов.

Рассмотрим прямую *l*, параллельную оси *Oy* и проходящую через точку (1;0). Выберем на тригонометрическом круге точку М(α), причем cosα≠0. Через точки О и М проведем прямую до пересечения с *l* в точке К. Так как прямая ОМ проходит через начало координат, то общий вид уравнения прямой: *y=kx*, где *k=tgα*. Рассмотрим точку К: абсцисса точки К равна 1 (т.к. точка К принадлежит прямой *l*), следовательно, ордината точки М равна *tgα*. Так как точка М выбрана произвольно, то прямая *l* будет образовывать, так называемую, *линию тангенсов.*

Рассмотрим прямую *l*, параллельную оси *Ox* и проходящую через точку (0;1). Выберем на тригонометрическом круге точку М(α), причем sinα≠0. Через точки О и М проведем прямую до пересечения с *l* в точке К. Так как прямая ОМ проходит через начало координат, то общий вид уравнения прямой: *y=kx*, где *k=tgα*. Рассмотрим точку К: ордината точки К равна 1 (т.к. точка К принадлежит прямой *l*), следовательно, абсцисса точки М равна *ctgα*. Так как точка М выбрана произвольно, то прямая *l* будет образовывать, так называемую, *линию котангенсов.*

1.8. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \qquad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1, \alpha\neq\frac{\pi k}{2};$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k; \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha\neq\pi k;$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k; \quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha\neq\pi k, \quad k\in Z.$$

1.9. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z;$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\pi k, \quad k\in Z.$$

1.10. Формулы двойных и тройных аргументов.

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \pi n, n \in Z;$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z;$$

$$ctg 3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{3}, \ n \in Z;$$

1.11. <u>Формулы половинного аргумента.</u>

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$tg^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z; \qquad ctg^2\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha};$$

1.12. <u>Формулы приведения.</u>

Функция	Аргумент x						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tgx	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctgx$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Для облегчения запоминания формул приведения можно применить следующее правило:

1. Если значение угла содержит π или 2π, то название функции сохраняется, а если значение угла содержит $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то функции синус, косинус, тангенс и котангенс меняются соответственно на косинус, синус, котангенс и тангенс.
2. Считая угол α острым, определяют, какой четверти принадлежит исходный угол, и перед полученной функцией ставят такой знак, какой знак имеет заданная функция в этой четверти.

1.13. <u>Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.</u>

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;$$

$$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\pi n,\ \beta\neq\pi k.$$

1.14. <u>Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.</u>

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Пример 1. Упростите выражение $y(\alpha)=\dfrac{\sin^3(\alpha-270^\circ)\cos(360^\circ-\alpha)}{tg^3(\alpha-90^\circ)\cos^3(\alpha-270^\circ)}$.

<u>Решение</u>. Используя четность функции $y=\cos x$, и нечетность функций $y=\sin x$ и $y=tgx$, получаем: $y(\alpha)=\dfrac{(-\sin(270^\circ-\alpha))^3\cos(360^\circ-\alpha)}{(-tg(90^\circ-\alpha))^3\cos^3(270^\circ-\alpha)}$.

Применяя затем формулы приведения, получаем:

$$y(\alpha)=\frac{(\cos\alpha)^3\cos\alpha}{(-ctg\alpha)^3(-\sin\alpha)^3}=\cos\alpha.$$

Пример 2. Докажите равенство $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=\cos 7^\circ$.

<u>Решение</u>. Сгруппируем слагаемые в левой части следующим образом:

$(\sin 47^\circ+\sin 61^\circ)-(\sin 11^\circ+\sin 25^\circ)=2\sin 54^\circ\cos 7^\circ-2\sin 18^\circ\cos 7^\circ=2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=$
$=2\cos 7^\circ\cdot 2\sin 18^\circ\cos 36^\circ$.

Если полученное выражение умножить и разделить на $\cos 18^\circ$ и использовать формулу $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=\sin 36^\circ$, то получаем:

$2\cos 7^\circ\cdot\dfrac{\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}=\cos 7^\circ\cdot\dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}=\cos 7^\circ\cdot\dfrac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\cos 7^\circ$. Равенство доказано.

Пример 3. Докажите неравенство: $a\sin^2\alpha+\dfrac{b}{\sin^2\alpha}\geq 2\sqrt{ab}$, если $a>0,\quad b>0,\quad \alpha\neq\pi m$.

<u>Решение</u>. Используем неравенство Коши, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел: $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$. Пусть: $a\sin^2\alpha=a_1$, $\dfrac{b}{\sin^2\alpha}=a_2$, тогда получаем:

$\dfrac{a\sin^2\alpha+\dfrac{b}{\sin^2\alpha}}{2}\geq\sqrt{a\sin^2\alpha\cdot\dfrac{b}{\sin^2\alpha}}$, откуда $a\sin^2\alpha+\dfrac{b}{\sin^2\alpha}\geq 2\sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

<u>Тестовые задания</u> *<u>(по 10 баллов)</u>*

1. Радианная мера угла, равного 10°, равна ______.
2. Радианная мера угла, равного $1'$, равна _______.
3. Длина дуги сектора вдвое меньше его периметра. Найти радианную меру угла сектора.
4. Определите знак числа $\dfrac{\sin 1{,}3 \cdot \cos(-1{,}5)}{\cos 1{,}6 \cdot \sin(-3{,}3)}$.
5. Определите знак числа $\dfrac{\sin 6{,}3 \cdot tg(-1{,}57)}{\cos 3{,}14 \cdot \sin(-3{,}15)}$.
6. Определите знак числа $\dfrac{ctg 1{,}58 \cdot \cos 6{,}28}{\cos 4{,}71 \cdot \sin(-4{,}73)}$.
7. Каким четвертям должен принадлежать аргумент x, если $\sin x = 6\cos x$.
8. Каким четвертям должен принадлежать аргумент x, если $\sin x = \cos^2 x$.
9. Каким четвертям должен принадлежать аргумент x, если $\sin^4 x = \cos x$.
10. Каким четвертям должен принадлежать аргумент x, если $|\sin x| = |\cos x|$.
11. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \dfrac{3}{4}$, $AC = 6\sqrt{7}$. Найдите AB.
12. Найдите $tg\alpha$ если $\sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
13. Найдите $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.
14. Найдите значение выражения $2 - 5tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0{,}6$.
15. Найдите $tg\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $tg\,\alpha = 3$.
16. Найдите $\cos(\beta + \alpha)$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ и углы α и β лежат в первой четверти.
17. Упростите выражение: $\sin^3\alpha(1 + ctg\alpha) + \cos^3\alpha(1 + tg\alpha)$.
18. Вычислите $tg2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
19. Вычислите $\dfrac{ctg\alpha + 1}{ctg\alpha - 1}$, если $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
20. Доказать тождество: $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.
21. Найдите значения остальных пяти тригонометрических функций, если $ctg\,\alpha = -3$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

***<u>Задачи I уровня</u>** <u>(по 20 баллов)</u>*

22. Найти радианную меру дуги окружности, радиус которой равен 12 см, если длина дуги равна: а) 4 см; б) 4 дм; в) 4 мм.
23. Упростить выражение: $(tg\alpha + ctg\alpha) \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot (1 - \cos\alpha)$.
24. Вычислить числовое значение выражения: $8\sin\dfrac{\pi}{6} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} \cdot tg\dfrac{4\pi}{3} \cdot ctg\dfrac{7\pi}{4}$.

25. Вычислить числовое значение выражения: $10\sin\frac{5\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot ctg\frac{3\pi}{4}$.

26. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=a$.

27. Найдите $\frac{2\sin x+3\cos x}{-5\cos x+3\sin x}$, если $tgx=3$.

28. Вычислить $\frac{5\sin x+7\cos x}{6\cos x-3\sin x}$, если $tgx=\frac{4}{15}$.

29. Известно, что $\frac{\sin x-\cos x}{\cos x+2\sin x}=\frac{1}{5}$. Найдите tgx.

30. Проверить, что при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ справедливо равенство:

$$\sin\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+tg^{-2}\alpha}}.$$

31. Упростить: $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)tg(-\alpha)}{\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})ctg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})}$.

32. Доказать тождество: $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-ctg\alpha}=2tg^2\alpha$.

33. Упростите выражение: $\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+tg\frac{7\pi}{4}$.

34. Доказать тождество: $\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x=4\sin 3x\cos 2x\cos x$.

35. Упростить выражение: $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

36. Вычислить, не пользуясь калькулятором: $\frac{\sin 70^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}$.

37. Найти значение выражения: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

38. Если $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ и $tg\alpha<0$, то выражение $ctg\frac{\alpha}{2}$ равно______.

39. Если $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $ctg\alpha<0$, то выражение $tg\frac{\alpha}{2}$ равно______.

40. Найдите $\cos\alpha$, если $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}$ и углы $\alpha+\beta$ и β лежат в первой четверти.

41. Докажите тождество: $\frac{1}{1+tg^2\alpha}\cdot\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=1$.

42. Докажите, что функция $y(x)=\frac{2\sin^2 4x-1}{2ctg(\frac{\pi}{4}+4x)\cdot\cos^2(\frac{5\pi}{4}-4x)}$ есть константа, то есть не зависит от x. Найдите значение этой функции.

43. Докажите справедливость равенства: $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$.

44. Докажите справедливость равенства: $\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{1}{8}$.

45. Вычислить $\arcsin\left(\dfrac{\sin 15^\circ - \sqrt{3}\cos 15^\circ}{2}\right)$.

46. Известно, что $tg\,2\alpha = -\dfrac{3}{4}$. Найдите $tg\,\alpha$.

47. Найдите $tg^3 x + ctg^3 x$, если $\sin x + \cos x = a$.

48. Доказать тождество $\dfrac{\sin x}{(1+\sin x)\cdot tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})} = tgx$.

49. Упростите выражение $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)tg(\pi-\alpha)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}$.

50. Упростите выражение $\dfrac{ctg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{2}}{ctg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}}$.

51. Упростите выражение $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

52. Упростите выражение: $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

53. Докажите тождество: $(\cos\alpha+\sin\beta)^2 + (\sin\alpha-\cos\beta)^2 = 4\cos^2\left(45^0+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

54. Упростите выражение: $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

55. Упростите выражение: $\dfrac{\sin(60^0+\alpha)}{4\sin\left(15^0+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^0-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

56. Докажите тождество: $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3$.

***<u>Задачи II уровня</u>* (по 30 баллов)**

57. Построить график функции $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

58. Построить график функции $y = tgx\cdot ctgx$.

59. Вычислить $\dfrac{\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ\cdot\sin 3^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 90^\circ}{\sin 91^\circ\cdot\sin 92^\circ\cdot\sin 93^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 179^\circ}$.

60. Вычислить $\dfrac{\sin 1^\circ\cdot\sin 2^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 45^\circ}{\cos 46^\circ\cdot\cos 47^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 89^\circ}$.

61. Вычислить $ctg1^\circ\cdot\ldots\cdot ctg179^\circ$.

62. Вычислить $tg1^\circ \cdot tg2^\circ \cdot ... \cdot tg89^\circ$.

63. Докажите, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ и углы α и β лежат в первой четверти.

64. Вычислить $\cos20^\circ \cdot \cos40^\circ \cdot \cos80^\circ$.

65. Вычислить $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$.

66. Вычислить $\sin10^\circ \cdot \sin30^\circ \cdot \sin50^\circ \cdot \sin70^\circ \cdot \sin90^\circ$.

67. Вычислить $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$.

68. Упростите выражение: $\frac{2}{\sin4\alpha}-ctg2\alpha$.

69. Докажите тождество: $3-4\cos2x+\cos4x=8\sin^4 x$.

70. Упростите выражение: $\frac{tg^2(45^0+\alpha)-1}{tg^2(45^0+\alpha)+1}$.

71. Упростите выражение: $\frac{2}{\sin4\alpha}-ctg2\alpha$.

72. Докажите тождество: $tg3\alpha=tg\alpha\cdot tg(60^\circ+\alpha)\cdot tg(60^\circ-\alpha)$.

73. Упростите выражение: $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos2\alpha\cos2\beta$.

74. Докажите тождество: $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}+ctg\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}$.

75. Упростите выражение: $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

76. Докажите тождество: $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-3+4\sin^2\alpha$.

77. Упростите выражение: $\frac{\sqrt{2}-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

78. Докажите тождество: $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=tg\alpha-ctg\alpha$.

79. Докажите тождество: $\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos3\alpha-\frac{1}{2}\cos5\alpha=8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

80. Упростите выражение: $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

81. Докажите тождество: $2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)$.

82. Вычислить $\sin10^\circ\cdot\cos11^\circ+\cos35^\circ\cdot\cos54^\circ-\sin46^\circ\cdot\sin65^\circ$.

83. Вычислить $\sin^2 70^\circ + \frac{1}{2} tg 20^\circ \cdot \sin 140^\circ$.

84. Вычислить $\frac{2\cos 10^\circ - \sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin^2 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} + \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ$.

85. Вычислить $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$.

86. Вычислить $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$.

87. Вычислить $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

88. Доказать равенство: $tg^2\frac{\pi}{18} + tg^2\frac{5\pi}{18} + tg^2\frac{7\pi}{18} = 9$.

89. Доказать равенство: $\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$.

90. Доказать равенство: $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{15}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{15}} - \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{15}} + \frac{1}{\sin\frac{8\pi}{15}} = 4\sqrt{3}$.

<u>Задачи III уровня</u> *(по 40 баллов)*

91. Построить график функции $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$.

92. Построить график функции $y = \sin x + |\sin x|$.

93. Построить график функции $y = \sin x + \sin|x|$.

94. Построить график функции $y = |tgx| + tg|x|$.

95. Построить график функции $y = |\cos x| \cdot tgx$.

96. Построить график функции $y = \frac{1}{2}\left(\frac{|\sin x|}{\cos x} + \frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$.

97. Построить график функции $y = |\sin|x||$.

98. Построить график функции $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

99. Построить график функции $y = \frac{|tgx|}{tgx}$.

100. Построить график функции $y = |(\cos x) tgx|$.

101. Построить график функции $y = |(ctgx) tgx|$.

102. Построить график функции $y = e^{\ln\cos x}$.

103. Построить график функции $y = e^{\ln\sin x}$.

104. Построить график функции $y = e^{\ln tgx}$.

105. Построить график функции $y = 10^{\lg\sin x}$.

106. Доказать равенство: $\cos\frac{\pi}{15} \cdot \cos\frac{2\pi}{15} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{7\pi}{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$.

Решение. Умножим обе части равенства на $\sin\frac{\pi}{15}$. Начнем постепенно «сворачивать» левую часть. Пара $\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{15}$ заменится на $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{15}$. Появилась новая пара $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}$, которую заменим на $\frac{1}{2^2}\sin\frac{4\pi}{15}$.

Далее, $\frac{1}{2^2}\sin\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}=\frac{1}{2^3}\sin\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{2^3}\sin\frac{7\pi}{15}$.

И наконец, $\frac{1}{2^3}\sin\frac{7\pi}{15}\cdot\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^4}\sin\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{2^4}\sin\frac{\pi}{15}$.

Таким образом, $\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{12}\cdot\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Осталось доказать, что $\cos\frac{3\pi}{15}\cdot\cos\frac{5\pi}{15}\cdot\cos\frac{6\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, или, так как $\cos\frac{5\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, что $\cos\frac{3\pi}{15}\cdot\cos\frac{6\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Умножая обе части на $\sin\frac{\pi}{5}$, аналогично предыдущему будем иметь: $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$, или $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$, или $\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$.

Что и требовалось доказать.

107. Доказать, что если $\alpha,\beta,\gamma-$углы треугольника, то $ctg\alpha\cdot ctg\beta+ctg\beta\cdot ctg\gamma+ctg\gamma\cdot ctg\alpha=1$.

Решение. Используя формулу $ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, а также формулы приведения и сложения, получаем:

$$ctg\beta\cdot ctg\gamma+ctg\gamma\cdot ctg\alpha=ctg\gamma(ctg\beta+ctg\alpha)=ctg\gamma\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=ctg\gamma\frac{\sin(\pi-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=1-ctg\alpha\cdot ctg\beta,$$ откуда следует требуемое равенство.

108. Докажите, что $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

109. Докажите, что $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

110. Докажите тождество:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

111. Построить график функции $y=\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}-\frac{1}{2}\sin 2x$.

112. Построить график функции $y=\dfrac{tgx}{(tg2x-tgx)\cos 2x}$.

113. Докажите, что $\arcsin\dfrac{3}{5}+\arccos\dfrac{5}{13}=\arcsin\dfrac{63}{65}$.

114. Докажите, что $4arctg\dfrac{1}{5}-arctg\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$.

115. Докажите, что $arctg\dfrac{1}{3}+arctg\dfrac{1}{5}+arctg\dfrac{1}{7}+arctg\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

116. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, то $tg\alpha\cdot tg\beta+tg\beta\cdot tg\gamma+tg\gamma\cdot tg\alpha=1$.

117. Доказать, что если $\alpha,\beta,\gamma-$углы треугольника, то $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma$.

118. Докажите тождество:
sinα + sinβ + sinγ = $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, если α + β + γ = π.

119. Докажите тождество: $\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}}\sin\alpha=\sqrt{2}$, если 0 < α < π.

120. Доказать неравенство: $\sqrt{\cos\alpha}<\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

121. Доказать неравенство: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\geq\dfrac{1}{4}$.

122. Доказать неравенство: $\alpha-\dfrac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

2. Основные свойства и графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций

2.1. <u>Функция *y=sinx*</u>.

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, так как движение точки по тригонометрическому кругу неограниченно как в положительном, так и в отрицательном направлениях и для каждого положения точки можно определить значение ее ординаты. $D(\sin x)=R$.

2. *Множество значений* функции совпадает с отрезком [-1; 1], так как для любой точки М тригонометрического круга при ее движении ордината изменяется от (-1) до 1.

3. *Функция периодическая*, с основным периодом Т=2π (основным периодом называется наименьший из множества всех положительных периодов функции), так как $\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x-2\pi)=...=\sin(x+2\pi n)$, $n\in Z$. (Положения точек, соответствующих рассматриваемым числам на тригонометрическом круге, будут совпадать).

4. *Четность и нечетность.* Функция нечетная: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, так как точки $M(\alpha)$ и $N(-\alpha)$ симметричны относительно оси Ox, и область определения функции симметрична относительно начала отсчета/начала координат.

5. *Точки пересечения с осями координат.*

С осью Ox: $\sin x=0, x=\pi k,$ где $k\in Z$.

С осью Oy: $\sin 0 = 0,$ точка $(0; 0).$

6. *Промежутки знакопостоянства и монотонности.* Пусть точка движется от $A(0)$ до $B(\pi/2)$, при этом ордината увеличивается от 0 до 1.

Пусть точка движется от $B(\pi/2)$ до $C(\pi)$, при этом ордината положительно уменьшается от 1 до 0.

Пусть точка движется от $C(\pi)$ до $D(3\pi/2)$, при этом ордината отрицательно уменьшается от 0 до -1.

Пусть точка движется от $D(3\pi/2)$ до $E(2\pi)$, при этом ордината отрицательно увеличивается от -1 до 0.

7. *Экстремумы функции.*

Максимальное значение функции совпадает с максимальным значением ординаты $y = 1 \ (x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k).$

Минимальное значение функции совпадает с минимальным значением ординаты $y = -1 \ (x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k).$

8. *Построение графика.*

Так как функция периодическая, то достаточно построить график на промежутке $[0; 2\pi].$

Необходимы контрольные значения: $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2},$ далее за счет симметрии и периодичности – остальную часть графика.

9. *Функция непрерывная на* R и имеет производную в каждой точке $x \in R$: $(\sin x)' = \cos x.$

2.2. <u>Функция *y=cosx*</u>.

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, так как движение точки по тригонометрическому кругу неограниченно как в положительном, так и в отрицательном направлениях и для каждого положения точки можно определить значение ее абсциссы. $D(\cos x) = R.$

2. *Множество значений* функции совпадает с отрезком [-1; 1], так как для любой точки М тригонометрического круга при ее движении абсцисса изменяется от (-1) до 1.

3. *Функция периодическая*, наименьший положительный период функции равен 2π: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$.

4. *Четность и нечетность.* Функция четная: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, так как точки $M(\alpha)$ и $N(-\alpha)$ симметричны относительно оси Ox, и область определения функции симметрична относительно начала отсчета/начала координат.

5. *Точки пересечения с осями координат.*

С осью Ox: $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$ где $k \in Z$.

С осью Oy: $\cos 0 = 1,$ точка $(0; 1).$

6. *Промежутки знакопостоянства.*

$\cos x > 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), \ k \in Z.$

$\cos x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in Z.$

7. *Непрерывность и дифференцируемость.*

Функция $y = \cos x$ непрерывна и имеет производную в каждой точке $x \in R$: $(\cos x)' = -\sin x.$

8. *Возрастание и убывание.*

Функция $y = \cos x$ возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k),\ k \in Z;$ убывает при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in Z.$

9. *Экстремумы функции.*

Функция $y = \cos x$ принимает максимальное значение, равное 1 при $x = 2\pi k,\ k \in Z.$

Функция $y = \cos x$ принимает минимальное значение -1 при $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$

2.3. <u>Функция *y=tgx*</u>.

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, исключая $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$ $D(tgx) = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\}.$

2. *Множество значений* функции – множество всех действительных чисел.

3. *Функция периодическая*, наименьший положительный период функции равен π: $tgx = tg(x+\pi)$.

4. *Четность и нечетность.* Функция нечетная: $tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg(x).$

5. *Точки пересечения с осями координат.*

С осью Ox: $tgx = 0, x = \pi k,$ где $k \in Z$.

С осью Oy: $tg0 = 0,$ точка $(0; 0).$

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

Функция $y = tgx$ возрастает при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ k \in Z.$

$tgx > 0$ при $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ k \in Z.$

$tgx < 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k),\ k \in Z.$

2.4. <u>Функция *y=ctgx*</u>.

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, исключая $x = \pi k, k \in Z.$ $D(ctgx) = R \setminus \{\pi k, k \in Z\}.$

2. *Множество значений* функции – множество всех действительных чисел.

3. *Функция периодическая*, наименьший положительный период функции равен π: $ctgx = ctg(x+\pi)$.

4. *Четность и нечетность.* Функция нечетная: $ctg(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -ctg(x).$

5. *Точки пересечения с осями координат.*

С осью Ox: $ctgx = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

Точек пересечения с осью Oy нет.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

Функция $y = ctgx$ убывает при $x \in (\pi k; \pi(k+1)),\ k \in Z.$

$ctgx > 0$ при $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k),\ k \in Z.$

$ctgx < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)),\ k \in Z.$

2.5. <u>Функция *y=secx*</u>.

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, исключая $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$ $D(\sec x) = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\}.$

2. *Множество значений* функции – $(-\infty; -1] \cup [1; \infty).$

3. *Функция периодическая*, наименьший положительный период функции равен 2π: $\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$.

4. *Четность и нечетность.* Функция четная: $\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec(x).$

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Точек пересечения с осью Ox нет, так как $y \neq 0$ при любом $x \in D(\sec x).$

С осью Oy: если $x = 0$, то $y = \sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = 1,$ точка $(0; 1).$

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

Функция $y = \sec x$ возрастает в промежутках $(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ и $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in Z.$

Функция $y = \sec x$ убывает в промежутках $(-\pi + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ и $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k),\ k \in Z.$

$\sec x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in Z.$

$\sec x > 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in Z.$

2.6. <u>Функция *y=cosecx*</u>.

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, исключая $x = \pi k, k \in Z.$ $D(\operatorname{cosec} x) = R \setminus \{\pi k, k \in Z\}.$

2. *Множество значений* функции – $(-\infty; -1] \cup [1; \infty).$

3. *Функция периодическая*, наименьший положительный период функции равен 2π: $\operatorname{cosec}(x + 2\pi) = \operatorname{cosec} x$.

4. *Четность и нечетность.* Функция нечетная: $\mathrm{cosec}(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-\sin x} = -\mathrm{cosec}(x).$

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Точек пересечения с осью Ox нет, так как $y \neq 0$ при любом $x \in D(\sec x)$.

С осью Oy: если $x = 0$, то $y = \mathrm{cosec}0 = \frac{1}{\sin 0} = \infty$, следовательно, точек пересечения с осью Oy нет.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

Функция $y = \mathrm{cosec}x$ убывает в промежутках $(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ и $(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z.$

Функция $y = \mathrm{cosec}x$ возрастает в промежутках $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и $(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in Z.$

$\mathrm{cosec}x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in Z.$

$\mathrm{cosec}x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1)),\ k \in Z.$

2.7. <u>Функция *y=arcsinx*</u>.

1. $D(\arcsin x) = [-1; 1]$, так как функция является обратной для функции $y = \sin x$, где $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq y \leq 1$. А по свойству взаимно-обратных функций, их области определения и множества значений меняются местами.

2. Множество значений функции – $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3. Функция не периодическая.

4. Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x.$

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Если $x = 0$, то $y = \arcsin 0 = 0$, следовательно, $(0;0)$ – точка пересечения с осями координат, так как при $y = 0$, имеем $0 = \arcsin x \Leftrightarrow x = 0.$

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

По свойству обратной функции, функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастает на области определения, так как функция $y = \sin x$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ непрерывна и является монотонно возрастающей.

7. *График функции.*

По свойству взаимно-обратных функций, график функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, где $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, относительно прямой $y = x.$

2.8. <u>Функция *y=arccosx*</u>.

1. $D(\arccos x) = [-1; 1]$, так как функция является обратной для функции $y = \cos x$, где $0 \le x \le \pi$, $-1 \le y \le 1$. А по свойству взаимно-обратных функций, их области определения и множества значений меняются местами.

2. Множество значений функции $-$ $[0; \pi]$.

3. Функция не периодическая.

4. Функция не является четной, не является нечетной.
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Если $x = 0$, то по определению, $y = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $(0; \frac{\pi}{2})$ – точка пересечения с осью Oy; если $y = 0$, то $0 = \arccos x \Leftrightarrow x = 1$, следовательно, $(1; 0)$ – точка пересечения с осью Ox.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

По свойству обратной функции, функция $y = \arccos x$ монотонно убывает на области определения, так как функция $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$ непрерывна и является монотонно убывающей.

7. *График функции.*

По свойству взаимно-обратных функций, график функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, где $0 \le x \le \pi$, относительно прямой $y = x$.

2.9. <u>Функция *y=arctgx*</u>.

1. $D(arctg\, x) = R$, так как функция является обратной для функции $y = tgx$, где $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < +\infty$. А по свойству взаимно-обратных функций, их области определения и множества значений меняются местами.

2. Множество значений функции $-$ $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

3. Функция не периодическая.

4. Функция нечетная: $arctg(-x) = -arctgx$.

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Если $x = 0$, то $y = arctg0 = 0$, следовательно, $(0; 0)$ – единственная точка пересечения с осями координат, так как при $y = 0$, имеем $0 = arctgx \Leftrightarrow x = 0$.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

По свойству обратной функции, функция $y = arctgx$ монотонно возрастает на области определения, так как функция $y = tgx$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ непрерывна и является монотонно возрастающей.

7. *График функции.*

По свойству взаимно-обратных функций, график функции $y = arctgx$ симметричен графику функции $y = tgx$, где $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, относительно прямой $y = x$.

2.10. <u>Функция *y=arcctgx*</u>.

1. $D(arcctg\,x)=R$, так как функция является обратной для функции $y=ctgx$, где $0<x<\pi$, $-\infty<y<+\infty$. А по свойству взаимно-обратных функций, их области определения и множества значений меняются местами.

2. Множество значений функции – $(0;\pi)$.

3. Функция не периодическая.

4. Функция не является четной, не является нечетная. $arcctg(-x)=\pi-arcctgx.$

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Если $x=0$, то $y=arcctg0=\dfrac{\pi}{2}$, следовательно, $(0;\dfrac{\pi}{2})$ – точка пересечения с осью Oy. С осью Ox точек пересечения нет, так как $0<y<\pi$.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

По свойству обратной функции, функция $y=arcctgx$ монотонно убывает на области определения, так как функция $y=ctgx$ на промежутке $(0;\pi)$ непрерывна и является монотонно убывающей.

7. *График функции.*

По свойству взаимно-обратных функций, график функции $y=arcctgx$ симметричен графику функции $y=ctgx$, где $0<x<\pi$, относительно прямой $y=x$.

2.11. <u>Функция *y=arcsecx*</u>.

1. $D(arc\sec x)=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

2. Множество значений функции – $[0;\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2};\pi]$.

3. Функция не является периодической.

4. Функция не является четной, не является нечетной.

5. *Точки пересечения с осями координат.*

Если $x=0$, то $arc\sec 0$ не существует; если $y=0$, то $x=1$, следовательно, $(1;0)$ – точка пересечения с осью Ox.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

По свойству обратной функции, функция $y=arc\sec x$ является монотонно возрастающей на каждом из промежутков $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

7. *График функции.*

График функции $y=arc\sec x$ симметричен графику функции $y=\sec x$, где $x\in[0;\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2};\pi]$, относительно прямой $y=x$.

2.12. <u>Функция *y=arccosecx*</u>.

1. $D(\mathrm{arccos}ec\,x)=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

2. Множество значений функции – $[-\dfrac{\pi}{2};0)\cup(0;\dfrac{\pi}{2}]$.

3. Функция не является периодической.

4. Функция не является четной, не является нечетной.

5. Точек пересечения с осями координат нет.

6. *Промежутки монотонности и знакопостоянства.*

По свойству обратной функции, функция $y = \operatorname{arccosec} x$ является монотонно убывающей на каждом из промежутков $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

7. *График функции.*

График функции $y = \operatorname{arccosec} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{cosec} x$, где $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}]$., относительно прямой $y = x$.

2.13. Основные соотношения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Тригонометрические операции над аркфункциями		
№	Соотношения	Условия
1	$\sin(\arcsin x) = x$	$[-1; 1]$
2	$\operatorname{coss}(\arccos x) = x$	$[-1; 1]$
3	$tg(arctgx) = x$	R
4	$ctg(arcctgx) = x$	R
5	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$[-1; 1]$
6	$tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1; 1)$
7	$ctg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$[-1; 0) \cup (0; 1]$
8	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$[-1; 1]$
9	$tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$[-1; 0) \cup (0; 1]$
10	$ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1; 1)$
11	$\sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	R
12	$\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	R
13	$ctg(arctgx) = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
14	$\sin(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	R
15	$\cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	R
16	$tg(arcctgx) = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

Пример 1. Вычислите $\sin\left(\frac{1}{2} arcctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение. Пусть $\alpha = arcctg\left(-\frac{3}{4}\right)$. Тогда $0 < \alpha < \pi$ и $ctg\alpha = -\frac{3}{4}$. Более того, так как $-\frac{3}{4} < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Для вычисления $\sin\frac{\alpha}{2}$ используем формулу: $\frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, сначала находим $\cos\alpha$. Так как $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, и $tg\alpha = -\frac{4}{3}$, то находим: $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Так как в интервале $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\cos\alpha < 0$, то $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

Тогда $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}$, и так как $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, а в этом промежутке синус принимает положительные значения, то $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Таким образом, $\sin\left(\frac{1}{2}arcctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Тестовые задания *(по 10 баллов)*

123. Докажите неравенства: $-\sqrt{2} \le \sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$.

124. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{\sin x}$.

125. Найдите область определения функции $y = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x}$.

126. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{tg^2 x + 1}$.

127. Найдите область значений функции $y = \sin^2 x$.

128. Найдите область значений функции $y = \sin x \cos x$.

129. Вычислить $\sin(\arcsin\frac{\pi}{6})$.

130. Вычислить $\arcsin(\sin\frac{\pi}{6})$

131. Вычислить $\sin\arcsin\sin\frac{\pi}{6}$.

132. Вычислить $\sin\arcsin\sin\frac{5\pi}{6}$.

133. Вычислить $\sin 2arctg3$.

134. Вычислить $\cos\arcsin\frac{1}{3}$.

135. Вычислить $tg\arccos\frac{3}{5}$.

136. Найдите $\arcsin x$, если $arctgx = \frac{\pi}{4}$.

137. Вычислить $\sin\arcsin\sin\frac{\pi}{6}$

138. Значение выражения $ctg(\arccos(-\frac{4}{7}))$ равно

139. Значение выражения $\sin(arcctg\frac{7}{4})$ равно

140. Упростить выражение $\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$

141. Упростить выражение $2\sin 55^\circ\cdot\cos 10^\circ+2\sin^2 12^\circ 30'+\frac{\sqrt{2}}{2}$

142. Построить график функции $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$.

143. Построить график функции $y=\frac{|tgx|}{tgx}$.

144. Доказать равенство: $arctg\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$.

145. Вычислите: $tg\left(5arctg\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

146. Вычислите: $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$.

147. Вычислите: $\arcsin\left(-\sin\frac{7}{3}\pi\right)$.

148. Вычислите: $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

<u>Задачи I уровня</u> *<u>(по 20 баллов)</u>*

149. Постройте график функций: $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

150. Постройте график функций: $f(x)=ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

151. Постройте график функций: $f(x)=3-4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$.

152. Постройте график функций: $f(x)=tg\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)$.

153. Постройте график функций: $f(x)=-\operatorname{cosec}4x+1$.

154. Вычислите: $\sin\left(3arctg\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

155. Вычислите: $arctg\left(-tg\frac{13\pi}{8}\right)+arcctg\left(ctg\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

156. Вычислите: $\cos\left(2arctg\frac{1}{4}+\arccos\frac{3}{5}\right)$.

157. Проверьте равенство: $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=arctg(3+2\sqrt{2})$.

158. Вычислите: $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)$.

159. Вычислите: $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

160. Вычислите: $\arcsin\left(\sin\frac{33\pi}{7}\right)+\arccos\left(\cos\frac{46\pi}{7}\right)$.

161. Вычислите: $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$.

162. $\sin\left(2\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}-\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$.

163. Доказать равенство: $\sin(2arctg\frac{1}{2})+tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

164. Доказать равенство: $\arccos(\cos(2arctg(\sqrt{2}-1)))=\frac{\pi}{4}$.

165. Доказать равенство: $tg(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13})=-\frac{119}{120}$.

166. Доказать равенство: $tg142^\circ30'=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

167. Доказать равенство: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

168. Доказать равенство: $2\arcsin|x|=\arccos(1-2x^2)$.

169. Доказать равенство: $arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{7}+arctg\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

170. Доказать равенство: $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

171. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $tg\alpha=\frac{3}{4}$ и что $\pi<\alpha<2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

172. Вычислите $\dfrac{tg\dfrac{\pi}{10}-ctg\dfrac{\pi}{10}}{ctg\dfrac{\pi}{5}}$. Докажите, что это число – целое.

173. Вычислите $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$, если $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

174. Докажите тождество: $\arccos x=\left[\begin{array}{l} arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ если\ 0<x\le 1, \\ \pi+arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ если\ -1\le x<0 \end{array}\right.$.

175. Докажите тождество: $arcctgx=\left[\begin{array}{l} arctg\dfrac{1}{x},\ если\ x>0, \\ \pi+arctg\dfrac{1}{x},\ если\ x<0 \end{array}\right.$.

176. Докажите тождество: $arctgx=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

177. Докажите тождество: $\arcsin x=\left[\begin{array}{l} \arccos\sqrt{1-x^2},\ если\ 0\le x\le 1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2},\ если\ -1\le x\le 0 \end{array}\right.$.

178. Докажите тождество: $\arccos x=\left[\begin{array}{l} \arcsin\sqrt{1-x^2},\ если\ 0\le x\le 1, \\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2},\ если\ -1\le x\le 0 \end{array}\right.$.

179. Докажите тождество:

$$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+tg(\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)=0.$$

180. Докажите тождество: $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=8\cos 2\alpha$.

181. Докажите тождество: $1+ctg\dfrac{\alpha}{2}+ctg\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)=ctg\dfrac{\alpha}{2}ctg\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

182. Докажите тождество: $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha-\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha}{1-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha}=tg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

183. Докажите тождество:

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\left[\begin{array}{l} 2tg\alpha,\ если\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ -2tg\alpha,\ если\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k \end{array}\right..$$

184. Найдите область определения функции $y=\frac{1}{\sin x^2}$.

185. Найдите область определения функции $y=\frac{1}{\sin(x^2-2x)}$.

186. Найдите область определения функции $y=\arcsin 2x$.

187. Найдите область определения функции $y=\frac{\arcsin 4x}{6x-1}$.

188. Найдите область определения функции $y=\sqrt{arctgx+\frac{\pi}{4}}$.

189. Найдите область определения функции $y=\arcsin x+\arccos\frac{1}{x}$.

190. Найдите область определения функции $y=\arcsin(x^2-4x+4)$.

191. Найдите множество значений функции $y=2\sin x+3\cos x$.

192. Найдите множество значений функции $y=9\sin 2x+12\cos 2x$.

193. Найдите множество значений функции $y=3\cos\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+1$.

194. Найдите множество значений функции $y=4\cos x-3\sin x+2$.

195. Найдите множество значений функции $y=\sin x-\cos x+4$.

196. Найдите множество значений функции $y=4\sin x\cos x-3\cos 2x+5$.

197. Найдите множество значений функции $y=|\sin x-2\cos x|+1$.

198. Найдите множество значений функции $y=|5\sin x-4\cos x|-2$.

199. Найдите множество значений функции $y=3-|\sin x-\cos x|$.

200. Найдите множество значений функции $y=4-|\sin x-4\cos x|$.

201. Найдите множество значений функции $y=5-|5\sin x-\cos x|$.

202. Найдите множество значений функции $y=|4-|\sin x-4\cos x||$.

203. Найдите область значений функции $y=\cos^2 x-6\cos x+5$.

204. Найдите область значений функции $y=2\sin^2 x-\sin x$ на $[0;\pi]$.

205. Найдите область значений функции $y=tg^2x-3tgx$ на $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}]$.

206. Найдите область значений функции $y=\frac{1}{\cos^2 x}$.

207. Найдите область значений функции $y=arctg|tgx|$.

208. Исследуйте функцию $f(x)=\cos 2x$ на периодичность. Укажите наименьший период, если он есть.

Решение. Так как функция $y=\cos x$ периодична с периодом 2π, функция f периодична с периодом π. В самом деле, для любого x имеем $\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$. Докажем, что $\pi-$ наименьший период данной функции. Предположим противное: пусть $T-$ период данной функции и $0<T<\pi$. Тогда для всех x имеем $\cos 2(x+T)=\cos 2x$. В том числе это равенство должно выполняться и для $x=0$, отсюда $\cos 2T=1$, но таких $T\in(0;\pi)$ нет – противоречие.

Ответ. Данная функция периодическая, наименьший период π.

209. Исследуйте функцию $y = \sin 2x$ на периодичность. Укажите наименьший период, если он есть.

210. Исследуйте функцию $y = \sin x + \cos x$ на периодичность. Укажите наименьший период, если он есть.

<u>Задачи II уровня</u> *<u>(по 30 баллов)</u>*

211. Найдите область значений функции $y = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x - 3}$.

212. Найдите область значений функции $y = \sqrt{\cos x + 1}$.

213. Найдите область значений функции $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

214. Найдите область значений функции $y = \sqrt{4\cos^2 x - \cos x}$.

215. Построить график функции $y = \cos \arcsin x$.

216. Построить график функции $y = \sin 2arctgx$.

217. Построить график функции $y = \cos 2\arcsin x$.

<u>Решение</u>. Данная функция определена при $-1 \le x \le 1$. По определению $\arcsin x$: если обозначить $\arcsin x = \alpha$, то $\sin\alpha = x, -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, $y = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2x^2$. Графиком функции будет дуга параболы $y = 1 - 2x^2$ на отрезке $[-1;1]$.

218. Построить график функции $y = \sin(\arcsin x)$.

219. Построить график функции $y = tg(arctgx)$.

220. Построить график функции $y = \cos(\arccos x)$.

221. Построить график функции $y = ctg(arcctgx)$.

222. Построить график функции $y = \arcsin(\arcsin x) + \arccos\dfrac{2\arccos x}{\pi - 2}$.

<u>Задачи III уровня</u> *<u>(по 40 баллов)</u>*

223. Найдите область значений функции $y = \dfrac{\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2\sin x}{\sin x - 1}$.

224. Построить график функции $\arcsin x = \arcsin y$.

225. Построить график функции $\arcsin x = \arccos y$.

226. Построить график функции $y = \sin(\arccos x)$.

227. Построить график функции $y = tg(arcctgx)$.

228. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

229. Построить график функции $y = arctg(tgx)$.

230. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

<u>Решение</u>. Данная функция является периодической, ее значения не меняются при замене x на $x + 2\pi$. Построим сначала ее график для $0 \le x \le x + 2\pi$.

Если $0 \le x \le \pi$, то $y = x$. Это следует из определения арккосинуса: если $y = \arccos\cos x$, то $\cos y = \cos x$ и $0 \le y \le \pi$. А поскольку на отрезке $[0;\pi]$ каждое значение косинуса достигается в одной точке, то $y = x$.

Пусть $\pi \le x \le 2\pi$. Поскольку $\cos x = \cos(2\pi - x)$, а при $\pi \le x \le 2\pi$ будем иметь $0 \le 2\pi - x \le \pi$, то из определения арккосинуса получим $y = 2\pi - x$ при $\pi \le x \le 2\pi$. Пользуясь периодичностью, получаем график.

231. Построить график функции $y = arcctg(ctgx)$.

232. Построить график функции $y = \dfrac{arcctg(ctgx)}{\sin x}$.

3. Тригонометрические уравнения

3.1. Простейшие тригонометрические уравнения.

Общие формулы решений простейших тригонометрических уравнений	
$\sin x = a, \quad \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z$
$\cos x = a, \quad \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$tgx = a$	$x = arctga + \pi k, \quad k \in Z$
$ctgx = a$	$x = arcctga + \pi k, \quad k \in Z$

Решение тригонометрических уравнений некоторых частных видов:

Уравнение	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$	$x = \pi k, \quad k \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\cos x = a$	$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$	$x = 2\pi k, \quad k \in Z$

Методы решения тригонометрических уравнений:

- метод разложения на множители;
- метод введения новой переменной:

а) однородные уравнения.

Метод введения новой переменной используется при решении однородных уравнений, то есть уравнений вида:

$a\sin x + b\cos x = 0$, где $a, b \ne 0$ одновременно, – однородное уравнение 1-ой степени; $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, где $a, b, c \ne 0$ одновременно, – однородное уравнение 2-ой степени; $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$, где $a, b, c, d \ne 0$ одновременно, – однородное уравнение 3-ой степени и т.д.

В случае $a \ne 0$ делим обе части первого уравнения на $\cos x$, второго – на $\cos^2 x$, третьего – на $\cos^3 x$, и т.д. В результате получим уравнения относительно tgx, решаемые подстановкой $t = tgx$. При $a \ne 0$ однородному уравнению не удовлетворяют значения x, при которых $\cos x = 0$. Поэтому деление на $\cos x$ однородного уравнения в случае $a \ne 0$ не приводит к потере корней.

б) уравнения, сводимые к квадратным уравнениям.

Если уравнение имеет вид: $F(\sin x, \cos^2 x) = 0$ или $F(\cos x, \cos^2 x) = 0$, то подстановка $t = \cos x$.

Если уравнение имеет вид: $F(\sin x, \sin^2 x) = 0$ или $F(\cos x, \sin^2 x) = 0$, то подстановка $t = \sin x$.

в) универсальная тригонометрическая подстановка.

Если $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z,$ то подстановка $t = tg\frac{x}{2}$, называемая универсальной, используется для уравнения вида $F(\sin x, \cos x) = 0$, где $F(\sin x, \cos x)$ – рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$; при этом:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при условии $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z,$ то нужно проверить, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z,$ решениями заданного уравнения.

• метод введения вспомогательного аргумента.

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c,$ где $a, b, c \neq 0$, преобразуется следующим образом: $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Так как точка с координатами $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ лежит на единичной окружности $\left(\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1\right)$, то существует, так называемый, вспомогательный аргумент $\alpha \in [0; 2\pi)$, такой, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,$ $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha.$ Исходное уравнение примет вид: $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

<u>Тестовые задания</u> *<u>(по 10 баллов)</u>*

233. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

234. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{10}-1}{2}$.

235. Решить уравнение $\cos(x^2 - 2) = \frac{1}{2}$.

236. Решите уравнение $\cos^2 2x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

237. Решите уравнение $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

238. Решить уравнение $2\sin x + 3\cos x = 0$.

239. Решить уравнение $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$.

240. Решить уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$.

241. Найдите наименьший корень уравнения
$\sin(3\pi x) + tg(\pi x)\cos(3\pi x) = \sin(4\pi x)$ на промежутке (1; 3).

242. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

243. Решить уравнение $\sin 3x = \sin\frac{\pi}{15}$.

244. Решите уравнение $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$.

245. Решить уравнение $5\sin x = 3\cos x$.

246. Решить уравнение $\sin(x^2 - 4x)\cos(x+1) = 0$.

247. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$.

248. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x = 0$.

249. Решить уравнение $3\sin 4x = 4\sin^3 2x$.

<u>Задачи I уровня</u> *<u>(по 20 баллов)</u>*

250. Решите уравнение $\sin 4x = \sin\frac{\pi}{16}$.

251. Решите уравнение $\frac{\cos x}{\cos 3x} = 0$.

252. Решите уравнение $\frac{2\sin x - 3}{3\sin x + 1} = -\frac{4}{5}$.

253. Решите уравнение $2\sin^2 \pi\sqrt{x} = 1$.

254. Решите уравнение $\cos 2x = \sin x$.

255. Решите уравнение $3\cos^2 x + 4\sin x = 0$.

256. Решите уравнение $ctgx + \frac{1}{\sin x} = 1$.

257. Решите уравнение $\frac{2}{\cos^2 x - 1} + \frac{\sqrt{2}}{2\cos x - 1} = \frac{1}{\cos x - 1}$.

258. Решите уравнение $1 - \sin 3x = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$.

259. Решите уравнение $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$.

260. Решите уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

261. Решите уравнение $8\cos 2x + 16\cos x + 7 = 0$.

262. Решите уравнение $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0$.

263. Решите уравнение $3\cos 2x + 5\cos x = 5$.

264. Решить уравнение $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$.

265. Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos^2 x = 1$.

266. Решите уравнение $\cos x = 1 + tg\frac{x}{2}$. В ответе укажите те x, которые удовлетворяют двойному неравенству $-\pi < x < \pi$.

267. Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{2}\cos x - 3$.

268. Решить уравнение $tg(x+\frac{\pi}{4}) + 2tg(x-\frac{\pi}{4}) = 1$.

269. Решить уравнение $\frac{tgx}{1+tg^2 x} + 4\cos 2x = -2$.

270. Решить уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

Решение. Группируем слагаемые, расположенные в левой части, в пары. (В данном случае любой способ группировки приводит к цели). Применяя формулу $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, получаем:

$$2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0,\quad 2\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\right) = 0,\quad 2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}\cdot\cos x = 0.$$

Возникают три случая:

1) $\cos\frac{x}{2} = 0,\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad x = \pi + 2\pi k;$

2) $\cos\frac{5x}{2} = 0,\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5};$

3) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$

Так как вторая серия включает в себя первую, получаем ответ.

Ответ. $\{\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5};\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\}$

271. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 6x + \cos 3x - \cos 5x = 0.$

272. Решить уравнение $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = 1.$

273. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

274. Решить уравнение $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

275. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos 4x + 1.$

276. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x.$

277. Решить уравнение $\sin x + \sin 3x = \sin 2x.$

278. Решить уравнение $tg 3x = tg 7x.$

279. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

280. Решить уравнение $\frac{2\cos^2 x + 3\sin x - 3}{\sqrt{-4tgx}} = 0.$

281. Решите уравнение $\cos 6x + 4\cos 2x = 0.$

282. Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\sin 3x = \sin 2x.$

283. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$

284. Решите уравнение $\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \sin 5x$.

285. Решите уравнение $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x$.

286. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

287. Решите уравнение $8\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin x - 4 = 0$

288. Решите уравнение $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$

289. Решите уравнение $5\cos 4x + 5 = 22(\cos x + \sin x)^2.$

290. Решите уравнение $5 - \frac{1}{4}\sin^2 x + \cos 2x = 9\cos^2 x + \cos^4 x + x^2 + 5x + 8\sin^2 x.$

291. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1.$

292. Решите уравнение $5+\frac{1}{\sin^2(3x)}=7ctg(3x).$

293. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\pi(x^2+x))=\sin(\pi(x+1)).$

294. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2+3\cos^2(2x+\frac{\pi}{6}).$

295. Решите уравнение $\sin x\cdot\sin(60^\circ-x)\cdot\sin(60^\circ+x)=\frac{1}{8}.$

296. Решить уравнение $\cos 4x\cdot\cos 5x=\cos 6x\cdot\cos 7x.$

Решение. При решении данного уравнения используем схему, состоящую из двух этапов. На первом произведения преобразуются в суммы. На втором, наоборот, суммы преобразуются в произведения.

$\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos x)=\frac{1}{2}(\cos 13x+\cos x),\quad \cos 9x-\cos 13x=0,\quad 2\sin 11x\cdot\sin 2x=0.$

1) $\sin 11x=0,\quad x=\frac{\pi n}{11};$ 2) $\sin 2x=0,\quad x=\frac{\pi k}{2}.$

Ответ. $\{\frac{\pi n}{11},\ \frac{\pi k}{2},\ n,k\in Z\}$

Задачи II уровня *(по 30 баллов)*

297. Решите уравнение $\cos 3x\cdot\cos^3 x+\sin 3x\cdot\sin^3 x=\frac{1}{2}\cos 6x.$

298. Решите уравнение $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\sqrt{tgx}=0.$

299. Решите уравнение $3\cdot 2^{\cos x+3\sqrt{1+\sin^2 x}}+11\cdot 2^{2\cos x}-34=0.$

300. Решите уравнение $\left|\sin^3 x\right|+13\cos^3 x-\cos x=0.$

301. Решите уравнение $\sin^5 x-\cos^5 x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}.$

302. Решите уравнение $\frac{6\sin x-2\cos 2x-4\cos^2 x-3}{\sqrt{7}\sin x-3\cos x}=0.$

303. Решите уравнение $\sin 2x-\sin 4x=(\cos 2x+1)\cos 3x.$

304. Решите уравнение $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x\left(\cos x-\frac{2}{3}\right).$

305. Решите уравнение $\cos^2 x-\cos 2x=0{,}75.$ Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}].$

306. Решите уравнение $\sin^2 x+\cos 2x=0{,}5.$ Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}].$

307. Решите уравнение $\cos^2 x-\cos 2x=0{,}5.$ Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}].$

308. Решите уравнение $4\sin^3 x = 3\cos(x+\frac{3\pi}{2})$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}]$.

309. Решите уравнение $4\cos^3 x = \sin(x-\frac{3\pi}{2})$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$.

310. Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$. В ответе укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$.

311. Решите уравнение $2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0$. В ответе укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}]$.

312. Решите уравнение $3\sin 2x - 3\cos x + 2\sin x - 1 = 0$. В ответе укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

313. Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$. В ответе укажите корни, принадлежащие отрезку $[\pi;\ \frac{5\pi}{2}]$.

314. Решите уравнение $5\sin 2x + 5\cos x - 8\sin x - 4 = 0$. В ответе укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2}]$.

315. Решите уравнение $tgx + \sqrt{3}\sin x = 0$.

316. Решите уравнение $\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2$.

317. Решите уравнение $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-4\pi;\ -3\pi]$.

318. Решите уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3\pi;\ 4\pi]$.

319. Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 2$. В ответе укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi;\ \frac{5\pi}{2}]$.

320. Найдите сумму всех корней уравнения $\sqrt{\pi^2 - x^2}(4\sin 2x + 6 - 9\cos x - 9\sin x) = 0$.

321. Найдите сумму всех корней уравнения $\sqrt{\pi^2 - x^2}(5 + 7\sin x - 7\cos x - 3\sin 2x) = 0$.

322. Решите уравнение $\frac{1}{tg^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$. В ответе укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}]$.

323. Решите уравнение $2\sin^2 x+\cos x-1=0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi;\ -4\pi]$.

324. Решите уравнение $\frac{1}{tg^2 x}-\frac{2}{tgx}-3=0$. В ответе укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}]$.

325. Решите уравнение $\frac{2}{tg^2 x}-\frac{1}{tgx}-3=0$. В ответе укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}]$.

326. Решите уравнение $\frac{2}{tg^2 x}+\frac{7}{tgx}+5=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[3\pi;\ 4\pi]$.

327. Решите уравнение $(2x^2-5x-12)(2\cos x+1)=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{\pi}{2};\ \pi]$.

328. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{2}\cos x$. В ответе укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi;\ -5\pi]$.

329. Решите уравнение $\cos 2x-\cos x=0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\ \frac{5\pi}{2}]$.

330. Решите уравнение $\cos 4x+\cos 2x=0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ \frac{\pi}{3}]$.

331. Решите уравнение $\cos 2x-\sin x=0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\ \frac{5\pi}{2}]$.

332. Решите уравнение $\cos 4x-\sin 2x=0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\ \pi]$.

333. Решите уравнение $\cos 6x-\sin 3x=0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\ \pi]$.

334. Найдите корни уравнения $\sin x\, tg2x+\sqrt{3}(\sin x-\sqrt{3}tg2x)=3\sqrt{3}$, удовлетворяющие неравенству $2+\log_{\frac{1}{2}} x\geq 0$.

335. Дан треугольник, каждый из углов которого удовлетворяет уравнению $tgx-tg\frac{x}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$. Показать, что треугольник равносторонний.

336. Показать, что уравнение $ctg2x+ctg3x+\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x}=0$ не имеет

корней.

337. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $8\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)+16$ и $16\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{2x}{3}\right)$ принимают равные значения.

338. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $\sin^2 x+9$ и $9\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-6\sin x\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ принимают равные значения.

339. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x-\sqrt{2\sin^2 x-\sin 2x+3\cos^2 x}=0$.

340. Решите уравнение $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$.

341. Решите уравнение $\sin x+\cos x=\sqrt{2}+\sin^4 4x$.

342. Решите уравнение $\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x$.

343. Решите уравнение $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin 3x$.

344. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x\sin 3x=2$.

345. Решите уравнение: $|6x-5|=4\sin\frac{\pi x}{3}$.

346. Решите уравнение: $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$.

347. Решите уравнение: $3^{|x|}=\cos\frac{x}{3}$.

348. Решите уравнение: $-2\sqrt{3}\pi\sin x=|x+\pi|+|x-2\pi|$.

349. Решите уравнение: $2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6}=\frac{1}{x^2}+x^2$.

350. Решите уравнение: $3^{\left|\sin\sqrt{x}\right|}=|\cos x|$.

351. Решите уравнение: $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=5+4\sin 2\pi x$.

352. Решите уравнение $3\cos x+4\sin x=5\sin 5x$.

Решение. Преобразуем левую часть:

$$3\cos x+4\sin x=5\cdot\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x\right)=5\cos(x-\varphi),\ \text{где }\ \varphi=arctg\frac{4}{3}.$$

Заменим $\sin 5x$ на $\cos(\frac{\pi}{2}-5x)$, получаем: $\cos(x-\varphi)-\cos(\frac{\pi}{2}-5x)=0$,

$$2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-2x)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+3x)=0.$$

Возникли два случая:

1) $\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-2x)=0,\ \frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-2x=\pi k,\ x=\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}-\frac{\pi k}{2},\ x=\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}$

2) $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+3x)=0,\ x=\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}$

Ответ. $\{x = \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n, k \in Z\}$.

353. Решить уравнение $\arccos x = arctgx$.

Решение. По определению обратных тригонометрических функций $\cos(\arccos x) = x$. Найдем $\cos(arctgx)$. Эта задача сводится к следующей: найти $\cos\alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $tg\alpha = x\ (\alpha = arctgx)$.

Поскольку $\cos\alpha > 0$, то $\cos\alpha = \sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.

Получаем уравнение $x = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$, откуда $x^4 + x^2 - 1 = 0$. Решая его, находим: $x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Второе значение для x не подходит, так как $x_2 < 0$.

Замечание. Данное уравнение можно решать иначе. Обозначим левую и правую части данного уравнения через y. Тогда $\cos y = tgy$. Для y имеем тригонометрическое уравнение, сводящееся к квадратному относительно $z = \sin y \quad (\cos^2 y = \sin y, \sin^2 y + \sin y - 1 = 0)$.

По смыслу задачи $0 < y < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\sin y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, значит, $x = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ. $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

354. Решить уравнение $2\arccos x + \arcsin\frac{x}{2} = \pi$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2\arccos x = \pi - \arcsin\frac{x}{2}$. Если равны углы, то равны и тригонометрические функции от них. (Обратное неверно.) Осталось удачно выбрать эту функцию. Понятно, что выбирать нужно между синусом и косинусом. В данном случае предпочтительнее оказывается косинус. Убедимся в этом на практике.

Итак, имеем $\cos 2\arccos x = \cos(\pi - \arcsin\frac{x}{2})$.

Поскольку $\cos 2\arccos x = 2x^2 - 1, \cos(\pi - \arcsin\frac{x}{2}) = -\cos(-\arcsin x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, то получаем уравнение $2x^2 - 1 = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$ (два других корня, получающиеся при возведении в квадрат данного –посторонние).

Ответ. $x = 0$.

355. Решить уравнение $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Возьмем синус от обеих частей уравнения, получим уравнение $\sin(\arccos x - \arcsin x) = \frac{1}{2}$, являющееся следствием данного уравнения. Далее получаем: $\sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) - \cos(\arccos x)\sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - x \cdot x = \frac{1}{2}$, $1-2x^2 = \frac{1}{2}$, откуда $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Проверка. Выполним ее подстановкой. Получаем: $\arccos x_1 - \arcsin x_1 = \arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Таким образом, $x_1 = \frac{1}{2}$ – корень уравнения. Далее, $\arccos x_2 - \arcsin x_2 = \arccos(-\frac{1}{2}) - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) \neq \frac{\pi}{6}$. Таким образом, $x_2 = -\frac{1}{2}$ – посторонний корень.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$.

356. Решить уравнение $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Возьмем косинус от обеих частей уравнения, получим $\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \cos\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} - 2x \cdot x = \frac{1}{2}$, откуда $7x^2 = \frac{3}{4}$, то есть $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}, x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Проверка. Положим $\alpha = \arcsin 2x_1 + \arcsin x_1$. Тогда $\cos\alpha = \cos(\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right))$, откуда $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{3}{7}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{7}} - \sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}$, то есть $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Так как далее $0 < \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $0 < \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\pi}{4}$ и $0 < \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\pi}{4}$. Но тогда $0 < \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) < \frac{\pi}{2}$, то есть $\alpha \in$ I четверти.

Итак, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, но в таком случае $\alpha = \frac{\pi}{3}$, а значит, $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ – корень уравнения.

Проверим теперь значение $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$. Положим $\beta = \arcsin 2x_2 + \arcsin x_2$, тогда $\arcsin(-\sqrt{\frac{3}{7}}) + \arcsin(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}) = \beta$. Так как $-1 < -\sqrt{\frac{3}{7}} < 0$ и $-1 < -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} < 0$, то

$-\pi < \arcsin(-\sqrt{\frac{3}{7}}) + \arcsin(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}) < 0$ или $-\pi < \beta < 0.$ Значит $\beta \neq \frac{\pi}{3}$, откуда следует, что $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ – посторонний корень.

Ответ. $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}.$

357. Решить уравнение $2\arccos x \cdot \arcsin x = 3\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}.$

358. Решить уравнение $\cos x 2\arcsin x = x^2 + 2 + 6x tg\frac{5\pi}{3}.$

359. Решить уравнение $2\arcsin x = \arccos 3x.$

360. Решите уравнение $arctg(x-1) = 3\arccos(x+1).$

361. Решите уравнение $\arcsin(-x)^2 + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$

362. Решить уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = -1.$

363. Решите уравнение $\arcsin\left(tg\frac{\pi}{4}\right) - \arcsin\sqrt{\frac{3}{x} - \frac{\pi}{6}} = 0.$

364. Решите уравнение $\arcsin\frac{x}{2} + \arccos\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$

365. Решите уравнение $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}.$

366. Решите уравнение $\arcsin\cos x = \cos 2\arccos x.$

367. Решите уравнение $\arccos(\frac{2}{\pi}\arccos x) = \arcsin(\frac{2}{\pi}\arcsin x).$

368. Решить уравнение $\arcsin(1 + |\sin x|) = \arccos(1 + \cos\frac{x}{10}).$

369. Решить уравнение $arctg\frac{1}{x-1} - arctg\frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{12}.$

370. Решить уравнение $\arcsin x = 2 arctg x.$

371. Решить уравнение $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{4}.$

372. Решить уравнение $2\arcsin x + \arccos 2x = \frac{6\pi}{7}.$

373. Решите уравнение $\frac{2}{\sin 2x} = ctg 2x + ctg 3x.$

374. Решите уравнение $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x.$

<u>Задачи III уровня</u> *(по 40 баллов)*

375. Решите уравнение $\left|ctg(2x - \frac{\pi}{2})\right| = \frac{1}{\cos^2 2x} - 1.$

376. Решите уравнение $\left|\sqrt{2}\cos x - 1\right| + \left|1 + \sqrt{2}\sin x\right| = 1, -\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}.$

377. Решите уравнение $|\cos x| = \cos(x + \frac{\pi}{5}).$

378. Решите уравнение $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x$

379. Найти число корней уравнения $tg\pi\sqrt{x+90}=tg\pi\sqrt{x}$.

380. Решить уравнение $\sin 5x-2\cos 2x=3$.

Решение. Поскольку $\sin 5x\le 1,\quad -\cos 2x\le 1,$ то левая часть не превосходит 3 и равна 3, если $\begin{cases}\sin 5x=1,\\ \cos 2x=-1.\end{cases}$

Для нахождения значений x, удовлетворяющих обоим уравнениям, поступим следующим образом. Решим одно из них. Затем среди найденных значений отберем те, которые удовлетворяют и другому.

Начнем со второго уравнения: $\cos 2x=-1,\quad x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k.$

Тогда $\cos 2x=-1,\quad 5x=\dfrac{5\pi}{2}+5\pi k,\quad \sin 5x=\sin(\dfrac{5\pi}{2}+5\pi k)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\pi k).$

Понятно, что лишь для четных k будет $\sin 5x=1.$

Ответ. $\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z\}$

381. Решить уравнение $\sin^8 x-\cos^5 x=1.$

382. Решить уравнение $3\sin x+4\cos 3x\cdot\cos x+2\sin 5x=7.$

Решение. Поскольку $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\varphi),$ то из этого равенства следует, что $a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}.$

Применим это неравенство к первым двум слагаемым в левой части нашего уравнения и, учитывая, что $|\cos 3x|\le 1,\quad 2\sin 5x\le 2,$ получим: вся левая часть не превосходит 7.

Для того, чтобы выполнялось равенство, необходимо, чтобы $|\cos 3x|=1,\quad \sin 5x=1.$ Последние два уравнения несовместимы. (Докажите!) Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Ответ. Ø

383. Решить уравнение $4\cos^2 x-4\cos^2 3x\cos x+\cos^2 3x=0.$

Решение. Будем рассматривать левую часть данного уравнения как квадратный трехчлен относительно $\cos x.$ Пусть $D-$дискриминант этого трехчлена: $\dfrac{D}{4}=4(\cos^4 3x-\cos^2 3x).$

Из неравенства $D\ge 0$ следует $\cos^2 3x\le 0$ или $\cos^2 3x\ge 1.$ Значит возникают две возможности: $\cos 3x=0$ и $\cos 3x=\pm 1.$

Если $\cos 3x=0$, то из уравнения следует, что и $\cos x=0,$ откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z.$ Эти значения x удовлетворяют уравнению

Если $\cos 3x=\pm 1,$ то из уравнения $\cos x=\dfrac{1}{2}$ находим $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n.$ Эти значения также удовлетворяют уравнению.

Ответ. $\{\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ n,k\in Z\}$

384. Решить уравнение $5\sin^5 x-3\cos^3 x=5.$

385. Решить уравнение $2\sin^5 x + 3\cos^8 x = 5.$

386. Решить уравнение $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3.$

387. Решить уравнение $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x.$

388. Решить уравнение $\sin^2 2x + 1 = \cos^2 3x.$

389. Решить уравнение $1 + \dfrac{1}{4}\sin^2 4x + \cos^2 2x = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x.$

390. Решить уравнение $\dfrac{1}{4}\cos^2 x + \cos^2 3x = \cos 3x \cos^4 x.$

391. Решить уравнение $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x.$

392. Решить уравнение $\sin^5 x + \cos^5 x + 3\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 0.$

393. Решить уравнение $\sin^{2m} x + \cos^{2n} x = 1$ (m и $n-$ натуральные числа, хотя бы одно из которых больше единицы).

394. Решить уравнение $\sin^{2n+1} x + \dfrac{1}{\cos^{2m+1} x} = \cos^{2n+1} x + \dfrac{1}{\sin^{2m+1} x}$ (m и $n-$целые положительные числа).

395. Найдите общие корни уравнений $\sin\dfrac{3\pi}{x} - \cos\dfrac{3\pi}{x} - 2\cos 5\pi x = 0,$ $\sqrt{3}\sin 10\pi x - 3\cos 10\pi x - \sin\dfrac{6\pi}{x} = 0.$

396. Найдите все корни уравнения $10x^3 - 63x^2 + 48x - 9 = 0,$ при подстановке каждого из которых в уравнение $(7x - 1{,}1)\sin y + \dfrac{3}{x} - 9 = (x + 3{,}7)y^2 + {}$ $+\sqrt{\dfrac{169}{x+1} - 100x^2 + 160x - 169} \cdot \cos 2y$ получится уравнение относительно y, имеющее более одного корня.

4. Тригонометрические неравенства.

При решении неравенств с тригонометрическими функциями следует использовать периодичность этих функций: следует сначала решить это неравенство на одном периоде, например для $0 \le x \le T,$ где $T-$период, а затем получившееся решение периодически продолжить.

Тригонометрические неравенства можно решать, используя графики тригонометрических функций или числовую окружность. Выписываем ответ для одного периода, а затем к обеим частям полученного неравенства прибавляем $kT,$ где $T-$период. Решение тригонометрических неравенств сводится к решению простейших неравенств:

Неравенство	Решения
$\sin x < a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\sin x \le a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le x \le \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\sin x > a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\sin x \ge a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$\arcsin a + 2\pi k \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$

$\cos x < a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\cos x \le a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$\arccos a + 2\pi k \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\cos x > a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$\cos x \ge a, \quad \lvert a \rvert < 1$	$-\arccos a + 2\pi k \le x \le \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$tgx < a$	$-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < arctga + \pi k, \quad k \in Z$
$tgx \le a$	$-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x \le arctga + \pi k, \quad k \in Z$
$tgx > a$	$arctga + \pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$
$tgx \ge a$	$arctga + \pi k \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$
$ctgx < a$	$arcctga + \pi k < x < \pi + \pi k, \quad k \in Z$
$ctgx \le a$	$arcctga + \pi k \le x < \pi + \pi k, \quad k \in Z$
$ctgx > a$	$\pi k < x < arcctga + \pi k, \quad k \in Z$
$ctgx \ge a$	$\pi k < x \le arcctga + \pi k, \quad k \in Z$

Основным методом решения тригонометрических неравенств является *метод интервалов*.

Пример 1. Решить неравенство: $\dfrac{\sin 3x \cos(2x - \frac{\pi}{6})}{\sin 2x} \le 0.$

<u>Решение</u>. Функция, расположенная в левой части неравенства, имеет наименьший период, равный 2π. Найдем, где на отрезке $[0, 2\pi]$ меняют знаки отдельные множители числителя и знаменателя: $\sin 3x = 0,\ x = \dfrac{\pi k}{3},\ k = 0,1,2,3,4,5;$

$\cos(2x - \dfrac{\pi}{6}) = 0,\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi k}{2},\ k = 0,1,2,3;$ $\qquad \sin 2x = 0,\ x = \dfrac{\pi k}{2},\ k = 0,1,2,3.$

Внутри первого промежутка $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ все три функции положительны. Далее расставляем знаки. Затем выписываем ответ для одного периода (включая в него те граничные значения x, для которых обращается в нуль числитель, но не равен нулю знаменатель). Получаем:
$x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{6} \le x < \pi,\ \pi < x < \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{3} \le x \le \dfrac{11\pi}{6}.$ После чего окончательный ответ получаем, прибавляя $2\pi k$ к граничным значениям.

<u>Ответ</u>. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x \le \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \le x < \pi + 2\pi k,$

$$\pi + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2\pi k.$$

Иногда при решении тригонометрических неравенств могут возникнуть проблемы, связанные с упорядочением корней тригонометрических функций.

Пример 2. Решить неравенство: $(3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x - 2 - \sqrt{3}) \cdot (2\sin 2x - 1) \ge 0.$

Решение. Период функции, расположенной в левой части неравенства, равен 2π. Корни второго сомножителя легко находятся (для $0 \le x < 2\pi$): $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$.

Решим уравнение $3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x - 2 - \sqrt{3} = 0$.

Имеем: $3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{5}\cos(x+\varphi)$, где $\varphi = arctg\frac{1}{3}$ $\left(\cos\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)$.

Получаем уравнение $2\sqrt{5}\cos(x+\varphi) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, откуда $x = \pm\arccos\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} - \varphi + 2\pi k$.

Пусть $\arccos\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \alpha$. Легко видеть, что $\alpha > \varphi$. На отрезок $[0, 2\pi]$ попадают два значения $\alpha - \varphi$ и $2\pi - \alpha - \varphi$. Найдем $\cos(\alpha - \varphi)$. Поскольку $\cos\alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{13-4\sqrt{3}}{20}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}$, то

$\cos(\alpha-\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos\frac{\pi}{12}$. Значит, $\alpha - \varphi = \frac{\pi}{12}$, $\alpha = \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{12} + arctg\frac{1}{3}$.

Поскольку $\varphi = arctg\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$, то $2\pi - \alpha - \varphi = 2\pi - (\frac{\pi}{12} + \varphi) - \varphi = \frac{23\pi}{12} - 2\varphi > \frac{23\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{17\pi}{12}$. При $x = 0$ левая часть отрицательна, в точке $x = \frac{\pi}{12}$ меняют знак оба множителя, в остальных – по одному. Теперь выписываем ответ на периоде, а затем периодически его продолжаем.

Ответ. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{12} + 2\pi k \le x \le \frac{13\pi}{12} + 2\pi k$, $\frac{17\pi}{12} + 2\pi k \le x < \frac{23\pi}{12} - 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi k$.

Тестовые задания *(по 10 баллов)*

397. Решите неравенство: $\cos(-0{,}5x) < \sin\pi$.
398. Решите неравенство: $2\sin(x-2\pi)\cdot\cos(-x-\pi) \le \frac{1}{3}$.
399. Найдите область определения функции $y = \arccos(2\sin x)$.
400. Построить график неравенства $\sin(x-y) > 0$.
401. Построить график неравенства $\sin x \cdot \cos y > 0$.
402. Построить график неравенства $\frac{\sin x}{\sin y} < 0$.
403. Построить график неравенства $\arcsin(x+y) < 0$.
404. Построить график неравенства $\arcsin x \cdot y > 0$.
405. Решить неравенство: $\sin\frac{x}{x-1} > 0$ на $\left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right]$.
406. Решите совокупность неравенств: $\cos x < \frac{1}{2}$; $tgx > -3{,}5$.

407. Решите совокупность неравенств: $tgx < \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad ctgx < \sqrt{2}.$

408. Решите совокупность неравенств: $\cos 3x > -\frac{1}{2}; \quad \sin 2x \le \frac{1}{2}.$

409. Решить неравенство: $tg(x^2 - 4x) < 0$ на $[0;3].$

410. Решить неравенство: $(x - \frac{\pi}{6})(\sin x - \frac{1}{2}) > 0$ на $0;\ 2\pi$.

411. Решите неравенство: $\frac{\sin x - 1}{2\sin x - 1} < 0$.

412. Решите неравенство: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x < 1$.

413. Решите неравенство: $\cos 2x + \cos x > 0$.

414. Решите неравенство: $\frac{2\cos x + \sqrt{3}}{tgx - 2} > 0$ на $-\pi;\ \pi$.

<u>Задачи I уровня</u> *(по 20 баллов)*

415. Решите неравенство: $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 < 0.$

416. Решите неравенство: $3\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x < 1.$

417. Решите неравенство: $tg2x + ctg2x + 2 < 0.$

418. Решите неравенство: $4\sin x\sin 2x\sin 3x > \sin 4x.$

419. Решите неравенство: $\frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin 3x + \cos 3x} < 0.$

420. Решите неравенство: $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \ge 3tgx$

421. Найдите область определения функции $y = \sqrt{4\cos^2 x - 3}.$

422. Решите неравенство: $8\sin^2 \frac{x}{2} + 3\sin x - 4 > 0.$

423. Решить неравенство: $\frac{5\sin x}{2\sin x + 1} \le 2$.

424. Решить неравенство: $2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0.$

425. Решить неравенство: $6\sin^2 x - 7\sin x + 2 \ge 0.$

426. Решить неравенство: $\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x \ge 0.$

427. Решите неравенство: $5 - \sin 3x < 6\cos^2 3x.$

428. Решить неравенство: $\arcsin x < \frac{\pi}{6}.$

429. Решить неравенство: $\arccos x + 3\arcsin x > \frac{5\pi}{6}.$

430. Решите совокупность неравенств: $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad ctgx \le 7.$

431. Решите совокупность неравенств: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Задачи II уровня</u> *<u>(по 30 баллов)</u>*

432. Решить неравенство: $\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 2x+\cos x}\leq 2$.
433. Решить неравенство: $\sin x\cdot\sin 2x<0$.
434. Решить неравенство: $\sin x+\sin 5x\geq 2\sin 3x$.
435. Решить неравенство: $\sin 3x\cdot\cos x\leq\sin 4x$.
436. Решить неравенство: $\sin x+\cos x\geq\cos 2x$.
437. Решите неравенство: $\sin x-\cos x\geq\sqrt{2}$.
438. Решите неравенство: $\frac{3\arccos x-2\pi}{2\arcsin x-\pi}\leq 0$.
439. Решите неравенство: $\arcsin^2 x-3\arcsin x\leq -2$.
440. Решите неравенство: $\frac{tg 2x+\sqrt{3}}{tg x+\sqrt{3}}\geq\frac{4\cos^2 x-1}{3\cos 2x}$ на отрезке $[0;\pi]$.
441. Изобразить на плоскости множество точек (x,y), удовлетворяющих неравенству $|\sin x|+|\sin y|<2$.
442. Изобразить на плоскости множество точек (x,y), удовлетворяющих неравенству $|\sin x|+|\cos y|<2$.

<u>Задачи III уровня</u> *<u>(по 40 баллов)</u>*

443. Решите неравенство: $3\sin^2 x+\sin 2x-\cos^2 x\geq 2$.
444. Решите неравенство: $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x$.
445. Решите неравенство: $tg^3 x+3>3tg x+tg^2 x$.
446. Решите неравенство: $\frac{\cos x+2\cos^2 x+\cos 3x}{\cos x+2\cos^2 x-1}>1$.
447. Решить неравенство: $\sin x+4\sin 2x+5\sin 4x<10$.
448. Решить неравенство: $\sin x\cdot\arcsin x>0$.
449. Решить неравенство: $\arccos 2x>\arcsin x$.
450. Найдите все решения уравнения $2\cos 2x-4\cos x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x\geq 0$.
451. Найдите все решения уравнения $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<-\frac{1}{2}$.
452. Найдите все решения уравнения $(1+tg^2 x)\sin x-tg^2 x+1=0$, удовлетворяющие неравенству $tg x<0$.
453. Решите неравенство: $tg x-ctg 3x+ctg 4x\leq 0$.
454. Решите неравенство: $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x\leq 2$.
455. Решите неравенство: $\arcsin^2 x-3\arcsin x\leq -2$.
456. Решите неравенство: $\sin x\arcsin x>0$.

457. Решите неравенство: $\arccos 2x > \arcsin x.$

458. Решите неравенство: $\dfrac{3\arccos x - 2\pi}{2\arcsin x - \pi} \le 0.$

5. Системы тригонометрических уравнений и неравенств

При решении систем тригонометрических уравнений и неравенств используются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений и неравенств. Прежде всего, это *исключение неизвестных* и *замена неизвестных.*

Часто бывает удобнее вместо общих формул, по которым решаются уравнения вида $\sin x = a,$ $\cos x = a,$ записывать решения этих уравнений в виде совокупности двух систем.

Замечание. Если система тригонометрических уравнений свелась к системе, состоящей из элементарных тригонометрических уравнений, то при решении каждого из этих элементарных уравнений необходимо использовать свой целочисленный параметр.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75, \\ tgx \cdot tgy = 3. \end{cases}$

<u>Решение</u>. Разделив левую и правую части первого уравнения системы соответственно на левую и правую части второго уравнения, получим уравнение $\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}.$ Заменив этим уравнением второе уравнение системы, получим систему $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75, \\ \cos x \cdot \cos y = 0{,}25, \end{cases}$ равносильную данной.

Складывая оба уравнения и вычитая из второго первое, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1, \\ \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы находим $x - y = 2\pi k,$ второе уравнение равносильно совокупности уравнений $x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n;$ $x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

Таким образом, решение свелось к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

Из первой системы совокупности находим семейство решений:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k). \end{cases}$$

Из второй системы совокупности находим:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k). \end{cases}$$

<u>Ответ</u>. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k), \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n-k). \end{cases}$

<u>Тестовые задания</u> *<u>(по 10 баллов)</u>*

459. Объедините семейства: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$ и $x = \dfrac{\pi}{3}n$.

460. Объедините семейства: $x = \dfrac{\pi}{6}k$ и $x = \dfrac{\pi}{5}n$.

461. Объедините семейства: $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$.

462. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases}$

463. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \cos x + \sin x = 6, \\ \cos x - \sin x = 3. \end{cases}$

464. Найдите значение выражения $\cos y$, если известно, что $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{2}, \\ 9\sin x - 3\cos y = -0{,}6. \end{cases}$

465. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{4}, \\ tgx\, tgy = 1. \end{cases}$

466. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \cos x + \sin x = 6, \\ \cos x - \sin x = 3. \end{cases}$

467. Решите систему неравенств: $\begin{cases} tg2x < 1, \\ tg\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le -\sqrt{3}. \end{cases}$

468. Решите систему неравенств: $\begin{cases} ctg\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \ge 0, \\ ctg\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

469. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sin 3x > \dfrac{1}{2}, \\ tgx \ge \sqrt{3}. \end{cases}$

470. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin\frac{3}{5}x > 0. \end{cases}$

471. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \\ \cos 2x > -\frac{1}{2} \end{cases}.$

Задачи I уровня *(по 20 баллов)*

472. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sin(2x+3y)=0, \\ \cos(3x-2y)=1. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим $2x+3y=\pi k,$ а из второго $3x-2y=2\pi n.$ Получаем систему: $\begin{cases} 2x+3y=\pi k, \\ 3x-2y=2\pi n. \end{cases}$ Откуда получаем: $x=\frac{\pi}{13}(2k+6n),\ y=\frac{\pi}{13}(3k-4n),\ \ k,n\in Z.$

Ответ. $x=\frac{\pi}{13}(2k+6n),\ y=\frac{\pi}{13}(3k-4n).$

473. Найдите значение выражения $\cos x,$ если известно, что $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x+8\sin y=3. \end{cases}$

474. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x+y=0, \\ (5\sqrt{\sin x}-1)(2y+4)=0. \end{cases}$

475. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2\cos x+5\cos y=6, \\ 2\sin x+5\sin y=0. \end{cases}$

476. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sin\frac{2}{3}x \geq -\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{x}{4} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

477. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos(x-y)=2\cos(x+y), \\ \cos x\cos y=0{,}75. \end{cases}$

478. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos x+\cos y=0{,}5, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1{,}75. \end{cases}$

479. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x+\sin y=0, \\ \cos x+\cos y=0. \end{cases}$

480. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=0{,}75, \\ x+y=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

481. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1-tgx}{1+tgx} = tgy, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

482. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{tgx}{tgy} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

483. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{6}, \\ 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2(1 + \cos^2(x - y)). \end{cases}$

484. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$

485. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 0{,}5, \\ \cos x \cos y = 0{,}25. \end{cases}$

486. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ tgxtgy = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

487. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

488. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x \cos(x + y) + \sin(x + y) = 3\cos(x + y), \\ 4\sin x = 5ctg(x + y). \end{cases}$

489. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin y = 5\sin x, \\ 3\cos x + \cos y = 2. \end{cases}$

490. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}, \\ ctgxctgy = 3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$

491. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

492. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

493. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2. \end{cases}$

494. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2\sin x+\dfrac{1}{\cos y}=2, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y}=0{,}5. \end{cases}$

495. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

496. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x\cos y=0{,}25, \\ \sin y\cos x=0{,}75. \end{cases}$

497. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x=\sin 2y, \\ \cos x=\sin y. \end{cases}$

<u>Задачи II уровня</u> *<u>(по 30 баллов)</u>*

498. Решите систему уравнений $\begin{cases} 16^{\cos x}-10\cdot 4^{\cos x}+16=0, \\ 2\sin x+\sqrt{y}=0. \end{cases}$

499. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}. \end{cases}$

500. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3\sin^2 x-\cos x\cos y=0, \\ 11\cos 2x+\cos 2y=6. \end{cases}$

501. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin^2 x=\sin y, \\ \cos^4 x=\cos y. \end{cases}$

502. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin(x+y)\sin(x-y)=-\dfrac{1}{4}, \\ \cos 2x\cos 2y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

503. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4tg3y=3tg2x, \\ 2\sin x\cos(x-y)=\sin y. \end{cases}$

504. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin^2 x=\cos x\cos y, \\ \cos^2 x=\sin x\sin y. \end{cases}$

505. Решите систему уравнений: $\begin{cases} ctgx+\sin 2y=\sin 2x, \\ 2\sin y\sin(x+y)=\cos x. \end{cases}$

506. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=\pi, \\ tgx tgz=3, \\ tgy tgz=6. \end{cases}$

507. Решите систему уравнений: $\begin{cases} tgx+ctgy=3, \\ |x-y|=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

508. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=\pi, \\ tgx tgy=2, \\ tgx+tgy+tgz=6. \end{cases}$

509. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1, \\ \cos^2 x+\cos^2 y-\cos^2 z=1, \\ tg^2x-tg^2y+tg^2z=1. \end{cases}$

<u>Задачи III уровня</u> *<u>(по 40 баллов)</u>*

510. Найдите решения системы уравнений $\begin{cases} |\sin x|\sin y=-\dfrac{1}{4} \\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$,

удовлетворяющие условиям: $\begin{cases} 0<x<2\pi \\ \pi<y<2\pi \end{cases}$.

511. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}\right|+(x-y-2)^2\le 0, \\ |2x+3|\le 2. \end{cases}$

512. Найдите решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{20}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)^2-\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sin x}}<0, \\ \left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\ge\dfrac{\pi}{24}\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right), \\ x^2-\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos x}}+\dfrac{5}{4}<0. \end{cases}$$

6. Уравнения и неравенства с параметрами

При решении уравнений, неравенств и систем тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами используются аналитический и графический методы решения.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2x+4a\cos x+2a^2+1=0$ не имеет решений.

Решение. $\cos 2x + 4a\cos x + 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 4a\cos x + 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2(\cos x + a)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -a.$

Полученное уравнение не имеет решений, если $|a| > 1.$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$

Пример 2. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a.$

Решение. Применяя формулы понижения степени, получаем: $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = a \Leftrightarrow \cos^2 2x = 2a - 1.$

Найдем контрольные значения параметра, то есть, такие значения параметра $a,$ при которых правая часть уравнения принимает значения 0 или 1, так как если $2a - 1 < 0$ или $2a - 1 > 1,$ то уравнение не имеет решений.

Если $2a - 1 = 0,$ то $a = \frac{1}{2};$ если $2a - 1 = 1,$ то $a = 1.$ Два контрольных значения параметра и три промежутка, на которые эти значения разбивают ось параметров, приводят к рассмотрению следующих пяти случаев:

1) $a < \frac{1}{2},$ то $2a - 1 < 0$ и корней нет.

2) $a = \frac{1}{2},$ то уравнение принимает вид $\cos^2 2x = 0,$ откуда находим $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$

3) $\frac{1}{2} < a < 1,$ то $0 < 2a - 1 < 1.$ В этим случае имеем:

$\cos^2 2x = 2a - 1 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 4x}{2} = 2a - 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 4a - 3.$ Так как $\frac{1}{2} < a < 1,$ то $2 < 4a < 4,$ а тогда $-1 < 4a - 3 < 1.$ Значит уравнение $\cos 4x = 4a - 3$ имеет решение. Находим: $4x = \pm\arccos(4a - 3) + 2\pi k,$ откуда $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi k}{2}.$

4) $a = 1,$ то уравнение принимает вид $\cos^2 2x = 1,$ откуда находим $x = \frac{\pi k}{2}.$

5) $a < \frac{1}{2},$ то $2a - 1 > 1$ и корней нет.

Ответ. Если $a < \frac{1}{2}, a < \frac{1}{2},$ то корней нет; если $\frac{1}{2} \le a \le 1,$ то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi k}{2}.$

Пример 3. Решите уравнение $(a - 1)\sin^2 x - 2(a + 1)\sin x + 2a - 1 = 0.$

Решение. Введем новую переменную $t = \sin x,$ получаем уравнение: $(a - 1)t^2 - 2(a + 1)t + 2a - 1 = 0.$

Первым контрольным значением параметра будет значение $a = 1,$ при котором обращается в нуль старший коэффициент: $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

При $a = 1$ исходное уравнение принимает вид $-4t + 1 = 0,$ откуда находим $t = \frac{1}{4},$ то есть $\sin x = \frac{1}{4},$ и, следовательно, $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{4} + \pi k.$

При $a \ne 1$ для квадратного уравнения находим дискриминант. $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (a-1)(2a-1) = -a^2 + 5a = 0$ при $a = 0, a = 5$ – новые контрольные значения параметра. Заметим, что $D < 0$ при $a < 0$ или $a > 5$ уравнение не имеет корней.

Рассмотрим случай $0 \le a \le 5$, $a \ne 1$. Так как $D \ge 0$, то уравнение имеет два действительных корня $t_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{5a-a^2}}{a-1}$. Так как $t = \sin x$, то должны выполняться следующие двойные неравенства: $-1 \le t_1 \le 1$, $-1 \le t_2 \le 1$.

Значение $t_1 = \frac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ удовлетворяет неравенству $-1 \le t_1 \le 1$ лишь при $a = 0$. В самом деле, если $a = 0$, то $t_1 = -1$; если $a > 0$, то $a+1 > a-1$ и тем более $a+1+\sqrt{5a-a^2} > a-1$, то есть $t_1 > 1$.

Если $a = 0$, то уравнение $t_1 = \sin x$, принимает вид $\sin x = -1$, и, следовательно, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Будем теперь искать значения параметра из множества $0 \le a \le 5$, $a \ne 1$, которые удовлетворяют двойному неравенству $-1 \le t_2 \le 1$, то есть системе

$$\begin{cases} \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \ge -1, \\ \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \le 1. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \ge 1-a, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \le a-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a-1 < 0, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \le 1-a, \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \ge a-1. \end{cases}$$

Решаем первую систему полученной совокупности. Имеем $\begin{cases} a > 1, \\ \sqrt{5a-a^2} \le 2a, \\ \sqrt{5a-a^2} \ge 2, \end{cases}$

и далее $\begin{cases} a > 1, \\ 5a-a^2 \le 4a^2, \\ 5a-a^2 \ge 4, \end{cases}$ откуда находим $1 < a \le 4$.

Решаем вторую систему полученной совокупности. Имеем $\begin{cases} a < 1, \\ \sqrt{5a-a^2} \ge 2a, \\ \sqrt{5a-a^2} \le 2, \end{cases}$

и далее $\begin{cases} a < 1, \\ 5a-a^2 \ge 4a^2, \\ 5a-a^2 \le 4, \end{cases}$ откуда находим $0 \le a < 1$.

Таким образом, получаем следующее решение: $1<a\le 4,\ 0\le a<1.$ Это означает, что на множестве $0\le a\le 5,\quad a\ne 1,$ уравнение $\sin x=\dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ имеет решение только в случае, если $\begin{cases}0\le a\le 4,\\ a\ne 1.\end{cases}$ Это решение имеет вид: $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1}+\pi k.$ Заметим, что эта запись включает в себя и рассмотренный выше случай, когда $a=0.$

Если $4<a\le 5,$ то уравнение не имеет корней.

Ответ. Если $a=1,$ то $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{4}+\pi k$;

если $\begin{cases}0\le a\le 4,\\ a\ne 1.\end{cases}$ то $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1}+\pi k;$

если $a<0$ или $a>5$, то уравнение не имеет корней.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых каждое из уравнений $(1-a)\cos 5x+\sin x=a,$

$$(a^2-a)\cos\frac{x}{5}+(a^2-1)\sin\frac{x}{10}\sin 3x+\sin x=1$$

имеет решение и любой корень первого является корнем второго и наоборот.

Решение. Пусть x_0 – корень первого. Тогда $x_0+2\pi k$ при любом целом k также является корнем первого уравнения.

Обозначим $\sin\dfrac{x}{10}=t,\ \sin(3(x_0+2\pi k))=m,\ \sin(x_0+2\pi k)=n.$

Второе уравнение будет иметь вид:

$$2(a-a^2)t^2+(a^2-1)mt+n-1+a^2-a=0.$$

Если $x=x_0+2\pi k,$ то $t=\sin\dfrac{x_0+2\pi k}{10}$ принимает не менее трех различных значений. (На самом деле различных значений не менее пяти. Это можно увидеть на круге, так как точки $\dfrac{x_0+2\pi k}{10}$ образуют правильный десятиугольник, а равные синусы имеют точки, симметричные относительно вертикальной оси.) Но если квадратный трехчлен имеет более двух корней, то он тождественно равен нулю.

Значит, $a^2-a=0$ и $a=0$ или $a=1.$

Рассмотрим эти случаи.

1) $a=0$. Получаем уравнения

$$\begin{cases}\cos 5x+\sin x=0,\\ -\sin\dfrac{x}{10}\sin 3x+\sin x=1.\end{cases}$$

Первое уравнение имеет корень $x=\dfrac{\pi}{4},$ не удовлетворяющий второму уравнению.

2) $a=1$. Получаем одинаковые уравнения $\sin x=1$.

Ответ. $a=1$.

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases}\cos y\cdot\sin x=a^2,\\ \sin y\cdot\cos x=a.\end{cases}$

Решение. Заменив первое уравнение данной системы суммой, а второе уравнение – разностью первого и второго уравнений, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y=a^2+a,\\ \sin x\cos y-\sin y\cdot\cos x=a^2-a,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\sin(x+y)=a^2+a,\\ \sin(x-y)=a^2-a.\end{cases}$$

Полученная система имеет решения тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет следующей системе неравенгств:

$$\begin{cases}\left|a^2+a\right|\le 1,\\ \left|a^2-a\right|\le 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+a\le 1,\\ a^2+a\ge -1,\\ a^2-a\le 1,\\ a^2-a\ge -1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+a-1\le 0,\\ a^2+a+1\ge 0,\\ a^2-a-1\le 0,\\ a^2-a+1\ge 0.\end{cases}$$

Второе и четвертое неравенства последней системы выполняются при любых значениях a, так как квадратные трехчлены, содержащиеся в левых частях указанных неравенств имеют отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент. Значит, система равносильна следующей системе $\begin{cases}a^2+a-1\le 0,\\ a^2-a-1\le 0.\end{cases}$

Решение системы имеет вид: $-\dfrac{\sqrt5-1}{2}\le a\le\dfrac{\sqrt5-1}{2}$. Таким образом, только при этих значения параметра имеет решения исходная система.

При $-\dfrac{\sqrt5-1}{2}\le a\le\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ имеем:

$$\begin{cases}\sin(x+y)=a^2+a,\\ \sin(x-y)=a^2-a.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=(-1)^k\arcsin(a^2+a)+\pi k,\\ x-y=(-1)^n\arcsin(a^2-a)+\pi n,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac12((-1)^k\arcsin(a^2+a)+(-1)^n\arcsin(a^2-a)+\pi k+\pi n),\\ y=\dfrac12((-1)^k\arcsin(a^2+a)-(-1)^n\arcsin(a^2-a)+\pi k-\pi n).\end{cases}$$

Ответ. Если $a<-\dfrac{\sqrt5-1}{2}$; $a>\dfrac{\sqrt5-1}{2}$, то решений нет;

если $-\dfrac{\sqrt5-1}{2}\le a\le\dfrac{\sqrt5-1}{2}$, то $\begin{cases}x=\dfrac{\alpha+\beta+\pi(K+n)}{2},\\ y=\dfrac{\alpha-\beta+\pi(k-n)}{2},\end{cases}$

где $a=(-1)^k\arcsin(a^2+a)$; $\beta=(-1)^n\arcsin(a^2-a)$.

Тестовые задания *(по 10 баллов)*

513. Все значения a, при которых уравнение $2\cos x - 5\sin x = a$ имеет корни, составляют отрезок ______.

514. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на R.

515. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $(x-1)\arcsin(x-a) = 0$ имеет ровно один корень на R.

516. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $(x^2-4x)\arcsin(x-a) = 0$ имеет ровно один корень на R.

517. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $(a^2-5a+6)\sin x = a-3$ имеет ровно один корень на $[0;2\pi]$.

518. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{(x-a)(x-1)}{\sin^2 x} = 0$ имеет ровно один корень на R.

519. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $\cos x = x^2 + a$ имеет ровно один корень на R.

520. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x = a$ имеет четное число корней на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

521. Решить уравнение $\sin^2 x + \cos x = a^2$.

522. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

523. Решите неравенство с параметром а: $\cos x - \dfrac{1}{\cos x} \le a$.

524. Решить уравнение $\sin(x-a) = \sin x + \sin a$.

525. Выяснить, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = a, \\ \cos y \cdot \sin x = a^2 \end{cases}$ не имеет решений.

Задачи II уровня *(по 30 баллов)*

526. Решите уравнение: $\cos(a + x) = \dfrac{\cos a}{\cos x}$.

527. Решите уравнение: $(a-1)\sin^2 x - 2(a+1)\sin x + 2a - 1 = 0$.

528. Решите уравнение: $tg^2 x - 2tga\,tgx + 1 = 0$.

529. Решите уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

530. Решите уравнение с параметром a: $\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = a$.

531. Определите, при каких значениях a уравнение $(a^2+2)\sin^2 x + 4a\sin x\cos x = a^2 + 3$ имеет решения. Найдите эти решения.

532. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $\cos x + \cos ax = 2$ имеет ровно один корень на R.

533. Определите, при каких значениях a уравнение $\cos^2 x + 6\sin x = 4a^2 - 2$ имеет решения. Найдите эти решения.

534. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $(x-a)\sin x=0$ имеет четное число корней на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

535. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{\sin^2 x-2a\sin x+3a-2}{2x-\pi}=0$ имеет четное число корней на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

536. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $(\sin\dfrac{x}{2}-3a+1)(\cos x-a)=0$ имеет четное число корней на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

537. Доказать, что уравнение $\sin^4 x+\cos^6 x=a$ не имеет решений при $a>1$.

538. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $\cos^2 x+\cos x=a$ на отрезке $[0;2\pi]$ в зависимости от a.

<u>Решение</u>. Проведя замену переменной $t=\cos x,$ построим график функции $y(t)=t^2+t$ на отрезке $[-1;1]$. (Постройте самостоятельно).

Заметим, что при всех $b\neq-1$ уравнение $\cos x=b$ имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$, а уравнение $\cos x=-1$ имеет на этом отрезке ровно одно решение. Осталось выяснить, сколько точек пересечения имеют прямые $y=a$ с построенным графиком, и анализируя, какие абсциссы имеют эти точки, получаем ответ.

<u>Ответ</u>. При $a<-\dfrac{1}{4}$ решений нет; при $a=-\dfrac{1}{4}$ – два решения; при $-\dfrac{1}{4}<a<0$ – четыре решения; при $a=0$ – три решения; при $0<a\le 2$ – два решения; при $a>2$ – нет решений.

539. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $2\cos^2 x-\cos x=a$ на отрезке $[0;\pi]$ в зависимости от a.

540. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $tg3x-3tgx=a$ на отрезке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ в зависимости от a.

541. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $\sin^2 x-\sin x=a$ на отрезке $[0;2\pi]$ в зависимости от a.

542. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}=a$ на отрезке $[-\dfrac{\pi}{2};0]$ в зависимости от a.

543. Определите все значения B, при которых уравнение $\sin 2x-2B\sqrt{2}(\cos x+\sin x)+1-6B^2=0$ имеет решение. Найдите эти решения.

544. При каких значениях B уравнение $\sin 2x+2B\sqrt{2}(\sin x-\cos x)+1-4B=0$ имеет решение? Найдите эти решения.

545. Решить уравнение $arctg\dfrac{x\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-arctg\dfrac{x-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\alpha,\quad 0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}.$

546. Решите систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} \sin x \cos y = a^2, \\ \sin y \cos x = a. \end{cases}$

547. Решите систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} \cos x - \cos y = a, \\ x + y = \frac{2}{3}\pi. \end{cases}$

548. Решите систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x \sin y = -2a^2. \end{cases}$

549. Решите систему уравнений с параметром а: $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = a, \\ x + y = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$

550. Решите неравенство с параметром a: $tgx + ctgx \le a$.

***Задачи III уровня** (по 40 баллов)*

551. Решите уравнение с параметром a: $\frac{a+\sin x}{a\cos x+1} = \frac{a+\cos x}{a\sin x+1}$.

552. Решите уравнение с параметром a: $1+\sin^2 ax = \cos x$.

553. Решите уравнение с параметром a: $arctga - arctg\frac{a-1}{a+1} = arctgx$.

554. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $5a\sin 2x = ctgx + tgx$ имеет нечетное число корней.

555. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $6a\sin 2x = ctgx + tgx$ имеет нечетное число корней.

556. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $5 + a(6|x| - 4\cos x) = 8^x + 8^{-x}$ имеет хотя бы один корень.

557. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $a(4\cos x - 7|x|) = 3 + 6^x + 6^{-x}$ имеет хотя бы один корень.

558. Выяснить, существуют ли такие значения параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x - 2(a-1)\sin x + a + 1 = 0$ имеет ровно 4 различных корня на отрезке $[0; 2\pi]$.

559. Доказать, что уравнение $\sin^4 x + \cos^6 x = a$ не имеет решений при $a > 1$.

560. Выяснить, при каких значениях параметра a неравенство $\sin^2 x - 2a\sin x + 4a - 3 \ge 0$ выполняется при всех значениях x.

561. Выяснить, при каких значениях параметра a неравенство $\sin^2 x - 2(a-2)\sin x + a \le 0$ не имеет решений на отрезке $[0; \pi]$.

562. Выяснить, при каких значениях параметра a неравенство $\cos^2 x - 2(a-3)\cos x + 2a + 9 \ge 0$ выполняется на отрезке $[0; \frac{\pi}{3}]$.

563. При каких значениях a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет решения? Найдите эти решения.

564. При каких значениях B уравнение $\cos^2 x\cos 2x + B\sqrt{2}(\cos^4 x - \sin^4 x) = (1+2B)^2$ имеет решения? Найдите эти решения.

565. Определите, при каких значениях a уравнение $2a(\sin^4 x - \cos^4 x) = 1 + \cos^2 2x$ имеет решения? Найдите эти решения.

566. Выяснить, существуют ли такие значения параметров a и b, что при всех значениях x выполняется неравенство $a\sin x + b\cos x > 1$.

567. Выяснить, существуют ли такие значения параметров a и b, что при всех значениях x выполняется неравенство $a\cos x - b\cos 2x > 1$.

568. Выяснить, существуют ли такие значения параметров a и b, что при всех значениях x выполняется неравенство $a\sin^2 x + b\cos^2 x > 1$.

569. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x = 1$ следует из уравнения $a\sin x = 1$.

570. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin 3x + \cos 5x - \cos 3c = a$ следует из уравнения $\sin x = a\sin x^2$. Указание. Заметьте, что $x = 0 -$ корень уравнения $\sin x = a\sin x^2$.

571. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a + (2 + 3^{x+2})}{(4|tgx| + 5|ctgx|) - a} \le 0$ не имеет решений.

572. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a - (2^{x-3} + 4)}{(5|tgx| + 3|ctgx|) + a} \ge 0$ не имеет решений.

573. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a + (3^{x+1} + 4)}{a - (5ctg^2 x + 5tg^2 x)} \ge 0$ не имеет решений.

574. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решение?

575. При каких значениях a система имеет единственное решение $\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x-y) + xy = 1. \end{cases}$

576. При каких значениях a система имеет единственное решение $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \sin xy + xy = x^4 + y^4. \end{cases}$

577. Решите неравенство с параметром a: $\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{1-\sin x}{1+\cos x} \le a$.

578. При каких значениях a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + tg(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}tg(\pi a) = 0, \\ \log_2(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2) \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

579. Определите: (1) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение $5\cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$ имеет решения; (2) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b.

580. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a-2)\sin x + \cos y = 1, \\ \log_a(2\cos y) = \log_a z \cdot \log_z(1 + 7\sin x), \\ \log_z \dfrac{a}{5-a} = 1, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

581. Решить систему уравнений с параметрами a:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2}\arccos y + z = 1, \\ 5\sqrt{x} + \arccos y + z = 6a - 14, \\ \sqrt{x} + \arccos y + 2z = 2a + 1. \end{cases}$$

Контрольная работа

Вариант 1.

1. Постройте график функции: $y=\left|3\sin(\pi+\frac{x}{3})\right|-1.$
2. Вычислите:

   а) $\sin x, tgx, ctgx$, если $\cos x=-0{,}6$ и $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$;

   б) $arctg\left(-tg\frac{13\pi}{8}\right)+arcctg\left(ctg\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.
3. Упростите:

   а) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}$;

   б) $\sin(\arccos x+\arcsin y)$.
4. Докажите тождество: $\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cos8\alpha\cos16\alpha=\frac{\sin32\alpha}{32\sin\alpha}$.
5. Докажите неравенство: $\sin^4\alpha-6\sin^2\alpha+5>0$.
6. Решите уравнения:

   а) $5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2 x=5$;

   б) $\sin x+7\cos x=5$;

   в) $\arccos x-\arcsin x=\frac{\pi}{6}$.
7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{4} \\ tgxtgy=1 \end{cases}$
8. Решите неравенство: $\sin4x+\cos4xctg2x>1$.
9. Решите неравенство с параметром a:

$$\frac{1+\sin x}{1-\cos x}+\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\le a.$$

Вариант 2.

1. Постройте график функции: $y=\frac{cos\left|\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right|}{3}+2$.
2. Вычислить:

   а) $\cos x, tgx, ctgx$, если $\sin x=-\frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$;

   б) $\arcsin\left(\sin\frac{33\pi}{7}\right)+\arccos\left(\cos\frac{46\pi}{7}\right)$.
3. Упростите:

   а) $\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$;

   б) $tg(arctgx+arctgy)$.

4. Докажите тождество: $9\cos 15\alpha + 3\cos 7\alpha + 3\cos 19\alpha + 9\cos 11\alpha = 24\cos^3 2\alpha \cos 13\alpha$.
5. Докажите неравенство: $\cos^2 2\alpha - 8\cos^2 \alpha + 7 > 0$.
6. Решите уравнение:
   а) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$;
   б) $5\sin x - 12\cos x = -13\sin 3x$;
   в) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.
7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \frac{tgx}{tgy} = \frac{3}{4} \end{cases}$
8. Решите неравенство: $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3tgx$.
9. Решите неравенство с параметром a:
$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} + \frac{1-\sin x}{1-\cos x} \leq a.$$

Список использованной литературы

1. Карп А. П. Сборник задач по алгебре и началам анализа. М.: Просвещение, 1995.
2. В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович «Практикум по элементарной математике». М.:Просвещение, 1991.
3. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по математике с решениями: Учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений. М.: ООО «Издательство АСТ», 2001.
4. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Издательство «Наука». 1974.