ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ В ПРОСТРАНСТВЕ

Н.С. Анофрикова, О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей и направлений подготовки

Саратов 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и программой преподавания курса «Математика» для студентов географического факультета и Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам первого курса географического факультета и Института химии СГУ освоить первоначальные понятия аналитической геометрии и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

Пособие содержит следующие главы: плоскость и прямая линия в пространстве, поверхности второго порядка. Более подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют примеры. В конце каждой главы приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала. Задачи для самостоятельного решения, приведенные в конце пособия, позволят обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. А ответы помогут проконтролировать правильность решения задач.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических специальностей и направлений подготовки, изучающих высшую математику.

Глава 1. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Поверхность S в пространстве представляет собой множество точек, обладающих геометрическими свойствами, присущими только им.

Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная поверхность S.

<u>Определение 1.1.</u> *Уравнением поверхности* S в заданной системе координат называется уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки поверхности и только они.

Линия в пространстве рассматривается как пересечение двух поверхностей, то есть как множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и, соответственно этому, линия определяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Введение понятий уравнения поверхности и линии в пространстве дает возможность сводить геометрические задачи к алгебраическим. Чтобы, например, установить лежит ли точка $M_1(x_1;\ y_1; z_1)$ на данной поверхности, заданной своим уравнением, достаточно проверить, не производя геометрических построений, удовлетворяют ли координаты точки M_1 этому уравнению: если удовлетворяют, то точка лежит на поверхности, если нет, то точка не лежит на поверхности.

1.1. ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Плоскость в пространстве относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ может быть задана различными способами. Например, плоскость однозначно определяется принадлежащей ей точкой и вектором, ей перпендикулярным; тремя точками, лежащими на этой плоскости; отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат и т.п. В зависимости от способа задания плоскости рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

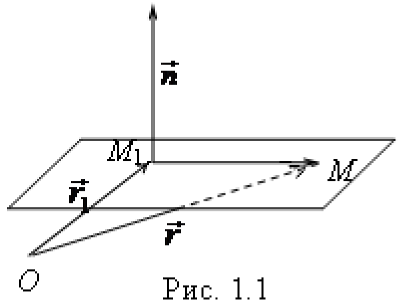

Рис. 1.1

Пусть плоскость P проходит через данную точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B; C)$. Пусть $\vec{r}_1$ – радиус-вектор точки M_1; $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ данной плоскости (рис. 1.1). Векторы $\vec{n}$ и $\vec{r} - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярны.

Условие перпендикулярности векторов в векторном виде имеет вид

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=0. \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) является *уравнением плоскости, проходящей через данную точку* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *и перпендикулярной вектору* $\vec{n}=(A;B;C)$ в векторной форме. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости или *нормалью*.

Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0, \tag{1.2}$$

где $D=-(\vec{n}\cdot\vec{r}_1)$.

Зная координаты векторов $\vec{n}=(A;B;C)$ и $\vec{r}-\vec{r}_1=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, можно записать уравнение (1.1) в координатной форме

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору*.

Примеры.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;3;5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{p}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$.

Решение.

Для решения задачи достаточно воспользоваться уравнением (1.3), так как нормальным вектором искомой плоскости будет заданный вектор $\vec{p}=(4;3;2)$. Тогда

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0 \quad \text{или} \quad 4x+3y+2z-27=0.$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0;2;1)$ и параллельной векторам $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{q}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Решение.

Сначала построим вектор, перпендикулярный векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Это будет вектор нормали к искомой плоскости, и в качестве этого вектора можно взять векторное произведение векторов $\vec{p}=(1;1;1)$ и $\vec{q}=(1;1;-1)$ данных плоскостей

$$\vec{n}=\vec{p}\times\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0;2;1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-2;2;0)$, получаем

$$-2(x-0)+2(y-2)+0\cdot(z-1)=0 \quad \text{или} \quad x-y+2=0.$$

Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (1.3) раскрыть скобки и обозначить $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$, то получим *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.4}$$

Замечание. В уравнениях (1.3) и (1.4) коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$, так как вектор $\vec{n}$ не является нуль-вектором.

В общем уравнении плоскости можно рассмотреть частные случаи, когда некоторые из коэффициентов уравнения (1.4) равны нулю и плоскость в пространстве будет расположена определенным образом.

1. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$:

$Ax + By + Cz = 0$, плоскость проходит через начало координат.

2. Один из коэффициентов A, B, C равен нулю:

а) $D \neq 0$, плоскость параллельна соответствующей оси координат:

$A = 0$, $By + Cz + D = 0$, параллельна оси Ox,

$B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$, параллельна оси Oy,

$C = 0$, $Ax + By + D = 0$, параллельна оси Oz;

б) $D = 0$, одна из координатных осей лежит в плоскости:

$A = 0$, $By + Cz = 0$, ось Ox лежит в плоскости,

$B = 0$, $Ax + Cz = 0$, ось Oy лежит в плоскости,

$C = 0$, $Ax + By = 0$, ось Oz лежит в плоскости.

3. Два коэффициента при текущих координатах равны нулю и

а) $D \neq 0$, плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

$A = 0$, $B = 0$, $Cz + D = 0$, параллельна плоскости Oxy,

$B = 0$, $C = 0$, $Ax + D = 0$, параллельна плоскости Oyz,

$C = 0$, $A = 0$, $By + D = 0$, параллельна плоскости Oxz;

б) $D = 0$, плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:

$B = 0, C = 0, Ax = 0\ (x = 0)$, уравнение плоскости Oyz,

$C = 0, A = 0, By = 0\ (y = 0)$, уравнение плоскости Oxz,

$A = 0, B = 0, Cz = 0\ (z = 0)$, уравнение плоскости Oxy.

Пример. Написать уравнение плоскости параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(-1; 2; 5)$

Решение.

Уравнение плоскости, параллельной оси Oz имеет вид

$$Ax + By + D = 0.$$

Так как плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение и получим систему

$$\begin{cases} 3A - B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными A, B, D. Выразим неизвестные коэффициенты A и B через D. Перенесем неизвестный коэффициент D в правую часть уравнений, получим систему вида

$$\begin{cases} 3A - B = -D, \\ -A + 2B = -D. \end{cases}$$

Решение этой линейной системы относительно неизвестных A, B дает $A = -\frac{3}{5}D$, $B = -\frac{4}{5}D$. Подставляя полученные значения A и B в уравнение $Ax + By + D = 0$, получаем $-\frac{3}{5}Dx + \left(-\frac{4}{5}D\right)y + D = 0$. После деления на $\left(-\frac{1}{5}D\right)$ уравнение искомой плоскости примет вид $3x + 4y - 5 = 0$.

Уравнение плоскости в отрезках

Если ни один из коэффициентов общего уравнения (1.4) не равен нулю, то делением всех членов уравнения на $-D \neq 0$ и переносом свободного члена в правую часть оно может быть приведено к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{1.5}$$

где $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ – алгебраические величины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат.

Уравнение (1.5) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Пример. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат Ox, Oy, Oz отрезки $a = 1, b = 2, c = -3$ соответственно.

Решение.

Для решения воспользуемся уравнением (1.5). Для нашего случая

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1 \text{ или } 6x + 3y - 2z - 6 = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть плоскость P проходит через заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ и $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости. Рассмотрим радиус-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ и $\vec{r}$ этих точек. Векторы

$\vec{r}-\vec{r}_1=\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{r}_3-\vec{r}_1=\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны и условие компланарности векторов имеет вид

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\,(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0. \tag{1.6}$$

Так как координаты векторов $\vec{r}-\vec{r}_1=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\vec{r}_3-\vec{r}_1=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, то уравнение (1.6) можно записать в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) называется *уравнением плоскости, проходящей через три точки*.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(2;2;3)$, $M_3(0;-3;1)$.

Решение.

Воспользуемся уравнением (1.7). В данном случае оно примет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2-1 & 2-0 & 3+1 \\ 0-1 & -3-0 & 1+1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив определитель по элементам первой строки, получим уравнение искомой плоскости

$$16\cdot(x-1)-6y-1\cdot(z+1)=0 \quad \text{или} \quad 16x-6y-z-17=0.$$

Нормальное уравнение плоскости

Определение 1.2. *Нормальным уравнением плоскости* называется уравнение вида

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0, \tag{1.8}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость, а p – его длина.

Общее уравнение плоскости (1.4) умножением на нормирующий множитель μ можно привести к нормальному виду (1.8).

Нормирующий множитель определяется формулой

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.9}$$

Знак μ выбирается противоположным знаку D.

Пример. Уравнение плоскости $2x-6y+3z-14=0$ привести к нормальному виду.

Р е ш е н и е.

Определим нормирующий множитель в соответствие с (1.9). Так как в данном случае $D=-14<0$, то нормирующий множитель должен быть взят со знаком «+».

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{1}{7}.$$

Умножив уравнение плоскости на нормирующий множитель, получим

$$\frac{1}{7}\cdot(2x-6y+3z-14)=0 \quad \text{или} \quad \frac{2}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{3}{7}z-2=0.$$

Здесь $p=2$, то есть расстояние от начала координат до плоскости равно 2, а направляющие косинусы перпендикуляра, опущенного из точки $O(0;0;0)$ на плоскость определяются величинами

$$\cos\alpha=\frac{2}{7},\ \cos\beta=-\frac{6}{7},\ \cos\gamma=\frac{3}{7}\ \ (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1).$$

1.2. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Определение 1.3. *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости (1.8) вычисляется по формуле

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|, \tag{1.10}$$

а до плоскости (1.4) – по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.11}$$

Таким образом, расстояние d равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки M_0 в нормальное уравнение плоскости. Знак результата подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: знак «+», если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости и знак «–», если точка M_0 и начало координат расположены по одну сторону от плоскости.

П р и м е р ы.

1. Определить расстояние от точки $M_0(3;5;-8)$ до плоскости $6x-3y+2z-28=0$.

Решение.

Используя формулу (1.11) расстояния от точки до плоскости, находим

$$d = \frac{|6 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) - 28|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|-41|}{\sqrt{49}} = \frac{41}{7}.$$

Так как результат подстановки координат точки M_0 в нормальное уравнение плоскости отрицателен, то M_0 и начало координат расположены по одну сторону от данной плоскости.

2. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями: $2x - 2y + 5z + 2 = 0$ и $2x - 2y + 5z - 1 = 0$.

Решение.

Выберем на первой плоскости произвольную точку $M_0(-1; 0; 0)$ и вычислим расстояние от точки M_0 до второй плоскости по формуле (1.11)

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{33}} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

1.3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Угол между двумя плоскостями

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ своими уравнениями заданы две плоскости

$$P_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1.12}$$

$$P_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{1.13}$$

Следовательно, известны координаты векторов, перпендикулярных данным плоскостям: $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Угол φ между плоскостями равен углу между перпендикулярными к ним векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Используя формулу скалярного произведения векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, получим выражение для косинуса этого угла:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.14}$$

Условие перпендикулярности плоскостей получаем из (1.14) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{1.15}$$

Условие параллельности плоскостей получаем из условия коллинеарности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}, \qquad (1.16)$$

или $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2=\lambda C_1$, $D_2\neq\lambda D_1$ (коэффициенты при текущих координатах пропорциональны).

Условие совпадения плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2} \qquad (1.17)$$

(все соответствующие коэффициенты пропорциональны).

Примеры.

1. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями: $x-\sqrt{2}y+z-1=0$ и $x+\sqrt{2}y-z+3=0$.

Решение.

Для данных плоскостей известны нормальные векторы $\vec{n}_1=(1;-\sqrt{2};1)$, $\vec{n}_2=(1;\sqrt{2};-1)$. Тогда угол φ между плоскостями можно определить, используя (1.14)

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 1+(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{1-2-1}{\sqrt{1+2+1}\sqrt{1+2+1}}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол $\varphi=120^\circ$.

2. При каких значениях m и l плоскости $mx+3y-2z-1=0$ и $2x-5y-lz-1=0$ будут параллельны?

Решение.

Для данных плоскостей нормальные векторы $\vec{n}_1=(m;3;-2)$, $\vec{n}_2=(2;-5;l)$. Из условия параллельности плоскостей (1.16) следует

$$\frac{m}{2}=\frac{3}{-5}=\frac{-2}{-l}\neq\frac{-1}{-1}.$$

Отсюда $m=-\frac{6}{5}$ и $l=-\frac{10}{3}$.

3. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $M_0(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$.

Решение.

Так как искомая плоскость параллельна плоскости $x-2y+2z+5=0$, то нормальный вектор данной плоскости $\vec{n}=(1;-2;2)$ является нормальным вектором искомой плоскости, уравнение которой будем искать в виде $x-2y+2z+D=0$. Для определения величины D

воспользуемся условием, что расстояние от точки M_0 до искомой плоскости равно 5. Формула (1.11) в этом случае дает

$$5=\frac{\left|1\cdot 3-2\cdot 4+2\cdot(-2)+D\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \quad \text{или} \quad 5=\frac{|D-9|}{3},$$

то есть $|D-9|=15$, откуда $D-9=\pm 15$ и $D=24$; $D=-6$. Условию задачи удовлетворяют две плоскости: $x-2y+2z+24=0$ и $x-2y+2z-6=0$.

1.4. ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая линия в пространстве относительно прямоугольной системы координат может быть задана различными способами. Например, прямая однозначно определяется точкой, лежащей на ней и параллельным ей вектором, двумя точками, принадлежащими прямой и т.п. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнений.

Параметрические уравнения прямой

Пусть задана точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$, и вектор $\vec{s}=(l;m;p)$. Для вывода уравнения прямой, проходящей через данную точку M_1 параллельно вектору $\vec{s}$, совместим начало вектора с точкой M_1. На направлении вектора $\vec{s}$ выберем произвольную точку $M(x;y;z)$ (рис. 1.2). Вектор $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, следовательно, $\overrightarrow{M_1M}=\vec{s}t$. Введем радиус-векторы точек M и M_1, обозначив их $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ соответственно. Используя формулу сложения векторов, из треугольника OM_1M получаем $\vec{r}=\vec{r}_1+\overrightarrow{M_1M}$ или уравнение прямой в векторном виде

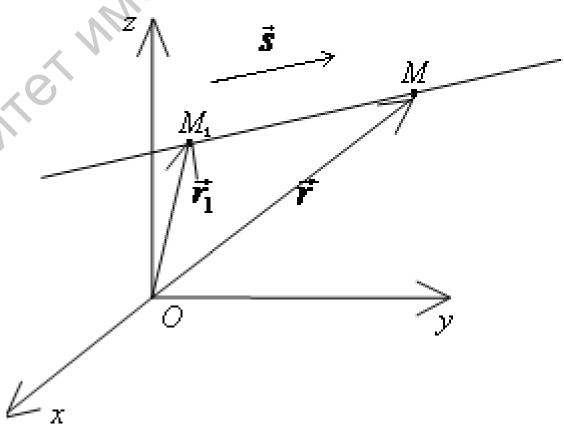

Рис. 1.2

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{s}t. \tag{1.18}$$

Здесь t – параметр, принимающий всевозможные действительные значения.

Вектор $\vec{s}$ называется *направляющим вектором прямой.*

Уравнение (1.18) в координатах примет вид

$$\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+pt. \end{cases} \tag{1.19}$$

Уравнения (1.19) называют *параметрическими уравнениями прямой*.

Если параметр t рассматривать как время, а уравнения (1.19) как уравнения движения точки M, то эти уравнения будут определять прямолинейное и равномерное движение точки M. При $t = 0$ точка M совпадает с M_1. Скорость точки M_1 постоянна и определяется формулой

$$v = \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}\ .$$

Пример. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A в треугольнике ABC, если заданы координаты его вершин $A(1;\ 4;-1)$, $B(-2;\ -2;5)$ и $C(6;\ -2;-1)$.

Решение.

Пусть $AD-$искомая медиана. Направляющим вектором медианы является вектор $\overrightarrow{AD}$. Точка D медианы делит сторону треугольника BC пополам, следовательно, координаты точки можно определить: $x_D = \dfrac{-2+6}{2} = 2;$ $y_D = \dfrac{-2-2}{2} = -2;$ $z_D = \dfrac{5-1}{2} = 2$, тогда $D(2;-2;2)$ и $\overrightarrow{AD} = (1;-2;3)$. Параметрические уравнения медианы, проходящей через точку A и, имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AD} = (1;-6;3)$, в соответствие с (1.19) будет иметь вид $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$

Канонические уравнения прямой

Исключая из уравнений (1.19) параметр t, получим *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}\ . \tag{1.20}$$

Если $p = 0$, т. е. аппликата направляющего вектора нулевая, то прямая расположена в плоскости, перпендикулярной оси Oz. Аналогично, в случае равенства нулю других координат направляющего вектора.

Прямая L в пространстве, проходящая через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, и имеющая направляющий вектор $\vec{s} = (l; m; p)$, обозначается $L:\{\vec{s} = (l; m; p); M_1(x_1; y_1; z_1)\}$.

Определение 1.4. *Углом между прямой и координатной осью* называется угол между направляющим вектором прямой и ортом оси.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma -$углы, образованные прямой с осями координат, орты которых $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ соответственно.

Направляющие косинусы прямой находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{\vec{s}\cdot\vec{i}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}}; \quad \cos\beta = \frac{\vec{s}\cdot\vec{j}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{s}\cdot\vec{k}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}}.$$

Тогда уравнения (1.20), в частности, могут быть записаны в виде

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma}.$$

Примеры.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;1;1)$ и перпендикулярной векторам $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение.

Прямая, перпендикулярная векторам $\vec{a} = (2;3;1)$ и $\vec{b} = (3;1;2)$ будет параллельна вектору

$$\vec{s} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}.$$

Тогда канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;1;1)$ с направляющим вектором $\vec{s} = (5;-1;-7)$ будет иметь вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-7}.$$

2. Вычислить углы, образованные прямой $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z}{2}$ с осями координат.

Решение.

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (6;3;2)$ и направляющие косинусы прямой будут иметь вид

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}; \quad \cos\beta = \frac{3}{7}; \quad \cos\gamma = \frac{2}{7}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в некоторой прямоугольной системе координат даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Так как в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, то канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (1.21)$$

Примеры.

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(-2; -2; 4)$ и $M_2(2; -3; -1)$.

Решение.

Используя (1.21) уравнения искомой прямой можно записать в виде

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y+2}{-3+2} = \frac{z-4}{-1-4} \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{-5}.$$

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(3; 2; -1)$ и пересекающей ось Ox под прямым углом.

Решение.

Так как прямая перпендикулярна оси Ox и пересекает ее, то она проходит через точку $M_2(3; 0; 0)$. Используя уравнения прямой (1.21), проходящей через две точки M_1 и M_2, получим

$$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z+1}{0+1} \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

Общее уравнение прямой в пространстве

Прямая как линия пересечения двух непараллельных плоскостей (1.12), (1.13) задается в пространстве системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_1 = 0. \end{cases} \qquad (1.22)$$

(1.22) называют *общим уравнением прямой*.

Если из уравнений системы выразить x, y через z, то есть записать систему в виде $\begin{cases} x = az + c, \\ y = bz + d, \end{cases}$ то получим прямую, определенную двумя плоскостями, проецирующими ее на координатные плоскости Oxz и Oyz.

1.5. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ К КАНОНИЧЕСКОЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМАМ

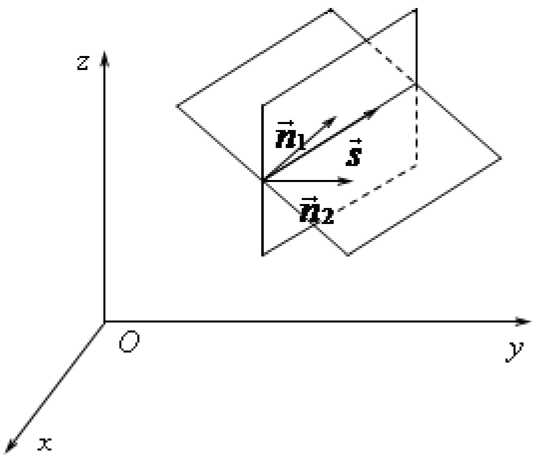

Рис. 1.3

Пусть прямая задана своим общим уравнением (1.22). За направляющий вектор прямой (1.22) можно принять вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальные векторы соответствующих плоскостей (рис. 1.3). Направляющий вектор $\vec{s}$ можно представить в виде

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.23)$$

Разложив определитель по элементам первой строки, получим координаты направляющего вектора

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = B_1 \cdot C_2 - B_2 \cdot C_1; \quad m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -(A_1 \cdot C_2 - A_2 \cdot C_1);$$

$$n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1$$

Если $M_1(x_1; y_1; z_1)$ точка прямой (1.22), ее направляющий вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (l; m; p)$, то *канонические уравнения* прямой примут вид (1.20)

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{p},$$

а ее *параметрические уравнения* запишутся в виде (1.19)

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases}$$

Примеры.

1. Составить канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем направляющий вектор искомой прямой (1.23)

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\vec{i}+17\vec{j}+13\vec{k}\,.$$

Следовательно, $\vec{s}=(-11;17;13)$. В качестве точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например, с плоскостью Oyz. Так как в этом случае $x_1=0$, то координаты y_1, z_1 этой точки можно определить из заданной системы уравнений, положив $x=0$:

$$\begin{cases}-y+3z-1=0,\\ 4y-z-7=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $y_1=2$, $z_1=1$. Тогда канонические уравнения искомой прямой будут иметь вид

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(4;3;-2)$ параллельно прямой $L_1:\begin{cases}x+3y+z-6=0,\\ 2x-y-4z+1=0.\end{cases}$

Решение.

Найдем направляющий вектор $\vec{s}_1$ прямой L_1, используя (1.23)

$$\vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & -4\end{vmatrix}=-11\vec{i}+6\vec{j}-7\vec{k}\,.$$

Следовательно, $\vec{s}_1=(-11;6;-7)$. Так как данная прямая и искомая параллельны между собой, то в качестве направляющего вектора $\vec{s}$ искомой прямой можно взять вектор $\vec{s}_1$, то есть $\vec{s}=\vec{s}_1$. Получаем канонические уравнения

$$\frac{x-4}{-11}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+2}{-7}.$$

1.6. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть даны две прямые в пространстве L_1:$\{\vec{s}_1=(l_1;m_1;p_1);M_1(x_1;y_1;z_1)\}$ и L_2:$\{\vec{s}_2=(l_2;m_2;p_2);M_2(x_2;y_2;z_2)\}$ Тогда уравнения этих прямых можно записать в параметрической форме

$$L_1:\begin{cases}x=x_1+l_1t,\\ y=y_1+m_1t,\\ z=z_1+p_1t.\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=x_2+l_2t,\\ y=y_2+m_2t,\\ z=z_2+p_2t.\end{cases}\qquad(1.24)$$

Определение 1.5. *Углом между двумя прямыми* называется угол между направляющими векторами этих прямых.

Если $\varphi -$ угол между направляющими векторами прямых, то для косинуса этого угла справедлива формула:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}. \qquad (1.25)$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ получим из условия $\cos\varphi = 0$:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (1.26)$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 связано с условием параллельности направляющих векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, которое имеет вид:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \lambda \quad . \qquad (1.27)$$

Пример. Найти величину острого угла между прямыми

$$L_1 : \frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{и} \quad L_2 : \begin{cases} x - y + 2z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Направляющий вектор прямой L_1 есть $\vec{s}_1 = (-3;1;-2)$. Найдем направляющий вектор $\vec{s}_2$ прямой L_2:

$$\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Таким образом, $\vec{s}_2 = (-1;5;3)$. По формуле (1.25) находим

$$\cos\varphi = \frac{-3\cdot(-1) + 1\cdot 5 - 2\cdot 3}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{1+25+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}} = \frac{2}{7\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{35},$$

поэтому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{35} (\approx 85^\circ)$.

1.7. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две прямые L_1 и L_2 своими параметрическими уравнениями (1.24). Прямые в пространстве или пересекаются, или скрещиваются, или параллельны. Построим вектор $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Прямые L_1 и L_2 пересекаются, параллельны или скрещиваются в зависимости от того, компланарны или нет векторы $\overline{M_1 M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$. Для компланарных векторов их смешанное произведение равно нулю. Смешанное произведение в координатах представляет собой определитель

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & p_1\\ l_2 & m_2 & p_2\end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

Если $\Delta=0$, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ компланарны, а, следовательно, прямые лежат в одной плоскости. При этом если выполнено условие (1.27), то прямые параллельны, в противном случае они будут пересекаться.

Если $\Delta\neq 0$, прямые L_1 и L_2 скрещиваются, то есть лежат в разных не параллельных плоскостях.

Примеры.

1. При каком значении l прямые

$L_1:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$ и $L_2:\dfrac{x-3}{l}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$ пересекаются?

Решение.

Точка $M_1(-2;0;1)$ принадлежит прямой L_1, ее направляющий вектор $\vec{s}_1=(2;-3;4)$. Точка $M_2(3;1;7)$ принадлежит прямой L_2, ее направляющий вектор $\vec{s}_2=(l;4;2)$. Координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(5;1;6)$. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$:

$$\Delta=\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\cdot=\begin{vmatrix}5 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 4\\ l & 1 & 6\end{vmatrix}=22l-66.$$

Прямые пересекаются, если $\Delta=0$, тогда $22l-66=0$, откуда $l=3$.

2. Установить взаимное расположение прямых:

а) $L_1:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ и $L_2:\begin{cases}x=5-8t,\\ y=4-6t,\\ z=3+4t.\end{cases}$

б) $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$ и $L_2:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

Решение.

а) Направляющие векторы прямых L_1 и L_2: $\vec{s}_1=(4;3;-2)$, $\vec{s}_2=(-8;-6;4)$.

Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8}=\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Если прямые совпадают, то точка, принадлежащая прямой L_1 должна принадлежать и прямой L_2. Прямой L_1 принадлежит точка $M_1(2;0;-1)$. Подставим ее координаты в уравнения прямой L_2:

$$\begin{cases} 2 = 5 - 8t \Rightarrow t = \dfrac{3}{8}, \\ 0 = 4 - 6t \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}, \\ -1 = 3 + 4t \Rightarrow t = 1. \end{cases}$$

Так как параметр t в параметрических уравнениях принимает разное значение, Точка M_1 не принадлежит прямой L_2. Таким образом прямые не совпадают, значит они параллельны.

б) Координаты направляющих векторов прямых L_1 и L_2 $\vec{s}_1 = (2;-3;1)$, $\vec{s}_2 = (3;2;4)$ не пропорциональны, следовательно, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Проверим выполнение условия (1.28) принадлежности двух прямых одной плоскости. Точки $M_1(0;1;-2)$ и $M_2(-4;-3;1)$ принадлежат прямым L_1 и L_2 соответственно. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & -1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 115 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые скрещиваются.

1.8. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1.6. *Расстоянием* от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямой $L{:}\{\vec{s} = (l;m;n); M_0(x_0;y_0;z_0)\}$ называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

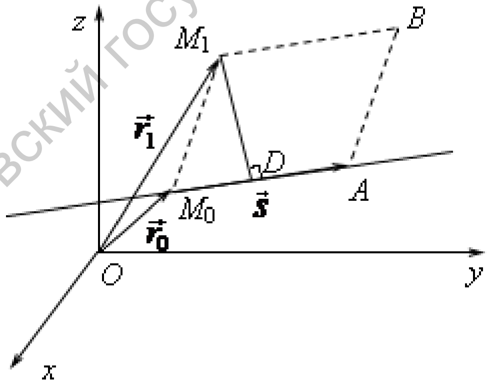

Рис. 1.4

Это расстояние рассчитывается как высота M_1D параллелограмма M_0M_1BA, построенного на направляющем векторе $\vec{s}$ и $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ (рис. 1.4), где $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ – радиус-векторы точек M_0 и M_1:

$$d = \frac{S_{пар}}{|\vec{s}|}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{s}$, можно рассчитать по формуле $S_{пар} = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}|$.

Тогда расстояние d определяется формулой

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}|}{\sqrt{\vec{s}^{\,2}}}. \tag{1.29}$$

В координатах формула (1.29) расстояния d принимает вид

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + p^2}}.$$

1.9. КРАТЧАЙШЕЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Пусть в пространстве даны прямые $L_1 \colon \{\vec{s}_1 = (l_1; m_1; p_1); M_1(x_1; y_1; z_1)\}$ и $L_2 \colon \{\vec{s}_2 = (l_2; m_2; p_2); M_2(x_2; y_2; z_2)\}$.

Уравнения прямых L_1, L_2 в векторном виде имеют вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t.$$

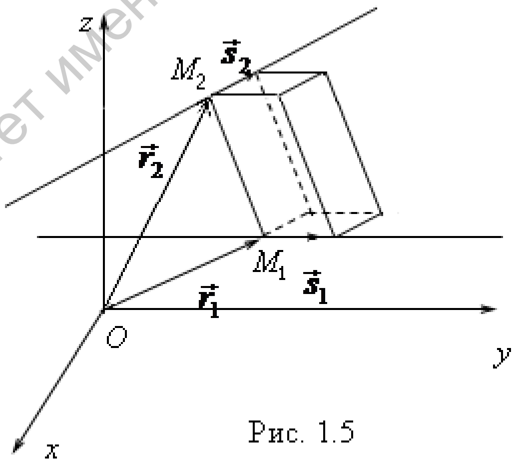

Рис. 1.5

Определение 1.7. *Кратчайшим расстоянием* между двумя прямыми в пространстве называется высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и векторе $\overline{M_1 M_2}$, где M_1 и M_2 – начальные точки $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ (рис. 1.5).

Кратчайшее расстояние между прямыми L_1 и L_2 определяется формулой

$$d = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{s}_1\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \tag{1.30}$$

или в координатной форме

$$d = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & p_1 \\ l_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}, \tag{1.31}$$

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положителен и знак минус в противном случае.

1.10. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть даны прямая $L:\{\vec{s}=(l;m;p);M_1(x_1;y_1;z_1)\}$ и плоскость $P:\ Ax+By+Cz+D=0$.

Если прямая и плоскость в пространстве пересекаются, то между ними образуется угол.

Определение 1.8. *Углом* между прямой L и плоскостью P называется угол между направляющим вектором $\vec{s}$ прямой и любым вектором, принадлежащим плоскости.

Но так как задан нормальный вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ для плоскости P, то задача сводится к нахождению из скалярного произведения $\vec{s}\cdot\vec{n}=|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ величины $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$ или в координатах

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+p^2}}. \tag{1.32}$$

Очевидно, прямая пересекает плоскость, если

$$Al+Bm+Cp\neq 0. \tag{1.33}$$

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}. \tag{1.34}$$

Для определения координат точки пересечения прямой L с плоскостью P необходимо решить систему уравнений, в которой уравнение прямой представить в параметрической форме.

Условие параллельности прямой L и плоскости P $(\varphi=0)$:

$$Al+Bm+Cp=0. \tag{1.35}$$

Если выполнено условие (1.35) и при этом

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0, \tag{1.36}$$

то прямая L не лежит в плоскости P.

Если выполнено условие (1.35) и при этом

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0, \tag{1.37}$$

то прямая L лежит на плоскости P.

Примеры.

1. Установить взаимное расположение прямой L и плоскости P:

а) $L:\begin{cases}x=2-4t,\\ y=t,\\ z=-3+2t;\end{cases}$ $\qquad P:\ 5x-6y+2z-10=0.$

б) $L: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$; P: $3x + y - 4z - 15 = 0$

Решение.

а) Имеем $\vec{s} = (-4;\, 1;\, 2)$; $\vec{n} = (5,-6,2)$. Координаты направляющего вектора прямой $\vec{s}$ и нормального вектора плоскости $\vec{n}$ не пропорциональны, следовательно, прямая не перпендикулярна плоскости (см. (1.34)). Найдем значение

$$Al + Bm + Cp = 5 \cdot (-4) + (-6) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -20 - 6 + 4 = -22 \neq 0.$$

Условие параллельности прямых (1.35) не выполнено, следовательно, прямая пересекает плоскость.

б) Имеем $\vec{s} = (3;\, -1;\, 2)$; $\vec{n} = (3,1,-4)$.

$$Al + Bm + Cp = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 9 - 1 - 8 = 0.$$

Следовательно, выполняется условие (1.35) и данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия (1.36), (1.37), где $M_1(-1;2;-4)$:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) - 15 = 0.$$

Выполняется условие (1.37), следовательно, прямая L лежит на плоскости P.

2. Найти величину угла между прямой $L: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ и плоскостью P: $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.

Решение.

Используя формулу (1.32) находим

$$\sin\varphi = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{16+4+4}\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

3. Найти координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x - y + 2z + 5 = 0$.

Решение.

Представим уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения для x, y, z в уравнение плоскости, получим

$$3\cdot(1+2t)-(-2+t)+2(2+t)+5=0 \Rightarrow 14+7t=0 \Rightarrow t=-2.$$

Тогда координаты искомой точки

$$\begin{cases} x=1+2\cdot(-2), \\ y=-2-2, \\ z=2-2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-4, \\ z=0. \end{cases}$$

4. Найти координаты точки, симметричной точке $M(3;4;5)$ относительно плоскости P: $x-2y+z-6=0$.

Решение.

Точка K симметричная точке M относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка MK, для которого серединой будет точка N пересечения прямой MK и плоскости P. Составим уравнение прямой MK. Направляющий вектор перпендикуляра MK к плоскости $P-$ нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}=(1;-2;1)$. Тогда уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку $M(3;4;5)$, имеет вид

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-5}{1}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=3+t, \\ y=4-2t, \\ z=5+t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью, находим, решая систему

$$\begin{cases} x=3+t,\ y=4-2t,\ \ z=5+t, \\ x-2y+z-6=0. \end{cases}$$

Для величины t получим уравнение

$$(3+t)-2\cdot(4-2t)+(5+t)-6=0 \Rightarrow 6t-6=0 \Rightarrow t=1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x=3+1, \\ y=4-2, \\ z=5+1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=2, \\ z=6. \end{cases}$$

то есть $N(4;2;6)-$точка пересечения прямой и плоскости. Так как $N-$середина отрезка MK, то

$$x_N=\frac{x_M+x_K}{2}; \quad y_N=\frac{y_M+y_K}{2}; \quad z_N=\frac{z_M+z_K}{2}.$$

Имеем: $4=\dfrac{3+x_K}{2}$; $2=\dfrac{4+y_K}{2}$; $6=\dfrac{5+z_K}{2}$.

Отсюда находим $x_K=5$; $y_K=0$; $z_K=7$, т.е. $K(5;\,0;\,7)$.

1.11. СВЯЗКА ПЛОСКОСТЕЙ

Определение 1.9. *Связкой плоскостей* называется множество плоскостей, проходящих через данную прямую.

Уравнение связки плоскостей, проходящих через прямую

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

имеет вид

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \qquad (1.38)$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения $\left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right)$.

Уравнение (1.38) можно записать в виде

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \qquad (1.39)$$

где $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

Примеры.

1. Через прямую $L_1: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $L_2: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

Решение.

Запишем уравнение прямой L_1 с помощью уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости Oxy и Oyz:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}, \text{ или } x + 2y - 1 = 0;$$

$$\frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \text{ или } 3y + z - 5 = 0.$$

Уравнение связки плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид (1.39):

$$x + 2y - 1 + \lambda(3y + z - 5) = 0, \text{ или } x + (2 + 3\lambda)y + \lambda z + 5\lambda - 1 = 0.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости, определим λ так, чтобы соответствующая плоскость связки была параллельна прямой L_2. Имеем

$$-1 \cdot 1 + 2 \cdot (2 + 3\lambda) - 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Таким образом, искомая плоскость определяется уравнением:

$$x - y - z + 4 = 0.$$

2. Даны точки $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$. Найти:

а) уравнение ребер тетраэдра $ABCD$;

б) длину ребра DC;

в) длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC;

г) угол между ребрами BD и AD;

д) площадь грани DBC;

е) объем тетраэдра.

Решение:

а) в соответствии с формулой (1.21) запишем уравнения всех ребер тетраэдра:

ребро AB: $\dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{y-0}{3-0}=\dfrac{z-1}{5-1};\ \Rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$,

ребро BC: $\dfrac{x-2}{6-2}=\dfrac{y-3}{2-3}=\dfrac{z-5}{3-5};\Rightarrow \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-5}{-2}$,

ребро CD: $\dfrac{x-6}{3-6}=\dfrac{y-2}{7-2}=\dfrac{z-3}{2-3};\Rightarrow \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$,

ребро AD: $\dfrac{x-0}{3-0}=\dfrac{y-0}{7-0}=\dfrac{z-1}{2-1};\ \Rightarrow \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-1}{1}$,

ребро BD: $\dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-3}{7-3}=\dfrac{z-5}{2-5};\ \Rightarrow \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$,

ребро AC: $\dfrac{x-0}{6-0}=\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{z-1}{3-1};\Rightarrow \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}$;

б) ищем длину ребра DC:

$$|DC|=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2+(z_C-z_D)^2},$$

$$|DC|=\sqrt{(6-3)^2+(2-7)^2+(3-2)^2}=\sqrt{35};$$

в) сначала найдем уравнение грани DBC как уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки D, B, C с радиусами-векторами $\vec r_1=3\vec i+7\vec j+2\vec k$, $\vec r_2=2\vec i+3\vec j+5\vec k$, $\vec r_3=6\vec i+2\vec j+3\vec k$ соответственно, можно найти из условия компланарности векторов $\vec r-\vec r_1=\overrightarrow{MD}$, $\vec r_2-\vec r_1=\overrightarrow{BD}$, $\vec r_3-\vec r_1=\overrightarrow{CD}$, где $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ – радиус-вектор текущей точки M искомой плоскости DBC (см. (1.7)):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 2-3 & 3-7 & 5-2 \\ 6-3 & 2-7 & 3-2 \end{vmatrix}=0.$$

Откуда получим уравнение плоскости, проходящей через три точки,

$$11x+10y+17z-137=0.$$

Теперь подсчитаем длину высоты, опущенной на грань DBC, по формуле (1.11)

$$d=AH=\frac{|11\cdot 0+10\cdot 0+17\cdot 1-137|}{\sqrt{11^2+10^2+17^2}}=\frac{120}{\sqrt{510}};$$

г) по формуле (1.14) имеем

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 1+4\cdot 7-3\cdot 1}{\sqrt{1+4^2+3^2}\sqrt{3^2+7^2+1}}=\frac{14\sqrt{26}}{13\sqrt{59}};$$

д) длина ребра BC определяется аналогично длине ребра DC:

$$|BC|=\sqrt{(6-2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{21}.$$

Найдем косинус $\angle C$. По формуле угла между прямыми CD и CB (1.25) получим

$$\cos\angle C=\frac{(-3)\cdot 4+5\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}}=-\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тогда находим $\sin\angle C=\sqrt{1-\frac{15}{49}}=\frac{\sqrt{34}}{7}$ и по формуле площади треугольника имеем

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|CD|\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{34}}{7}=\frac{\sqrt{510}}{2};$$

е) объем тетраэдра, вершинами которого являются четыре заданные точки, определяется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае получаем

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2-0 & 3-0 & 5-1 \\ 6-0 & 2-0 & 3-1 \\ 3-0 & 7-0 & 2-1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=20.$$

Контрольные вопросы к главе 1

1. Написать общее уравнение плоскости параллельной оси Oz.
2. Написать общее уравнение плоскости параллельной плоскости Oyz.
3. Написать уравнение плоскости в отрезках.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$.
5. Две плоскости заданы своими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Написать:
   а) условие параллельности плоскостей;
   б) условие перпендикулярности плоскостей;
   в) формулу для определения величины угла между плоскостями.
6. Написать формулу для определения расстояния от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.
7. Написать канонические уравнения прямой в пространстве.
8. Написать параметрические уравнения прямой в пространстве.

9. Написать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$.
10. Написать общее уравнение прямой.
11. Написать формулу для определения угла между прямыми, заданными каноническими уравнениями.
12. Определить условие параллельности двух прямых.
13. Определить условие перпендикулярности двух прямых.
14. Определить условие принадлежности двух прямых одной плоскости.
15. Определить величину угла между плоскостью и прямой.

Глава 2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 2.1. *Поверхностью второго порядка* называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат в пространстве:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0 . \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется *общим уравнением* поверхности второго порядка.

Далее рассмотрим частные случаи поверхностей.

2.1. СФЕРА

Уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (2.2)$$

определяет сферическую поверхность радиуса R с центром в точке $S(a;b;c)$ и называется *каноническим (простейшим) уравнением сферы*.

Если $a = b = c = 0$, получаем уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

с помощью дополнения до полных квадратов можно привести к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d . \quad (2.3)$$

Если $d > 0$, то уравнение (2.3) определяет сферу радиуса $R = \sqrt{d}$. Если $d = 0$, то уравнению (2.3) удовлетворяют координаты единственной точки $S(a;b;c)$. Если $d < 0$, то уравнению (2.3) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Взаимное расположение точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и сферы (2.3) определяется следующими условиями:

если $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 = d$, то точка M_1 лежит на сфере;

если $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 > d$, то точка M_1 лежит вне сферы;

если $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 < d$, то точка M_1 лежит внутри сферы.

Примеры.

1. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$.

Решение.

Приведем уравнение сферы к каноническому виду (2.3), для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие x, y, z, т.е. перепишем уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 1 + z^2 + 1 = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, центр сферы – точка $S(\frac{1}{2};-1;0)$, а ее радиус $R = \frac{1}{2}$.

2. Определить, как расположена относительно сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 49$ точка $M(1;-1;3)$.

Решение. Для решения подставим координаты точки в каноническое уравнение сферы: $(1-2)^2 + (-1+3)^2 + 9 = 14$.

Откуда получаем, что $14 < 49$, т.е. точка лежит внутри сферы.

3. Определить, как расположена относительно сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 49$ плоскость $x - 3y + z = 0$.

Решение.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 49, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Для решения достаточно показать, как расположены друг относительно друга окружность $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$ и прямая $x - 3y = 0$ (полагая $z = 0$, т.е. в плоскости Oxy): $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 49, \\ x = 3y. \end{cases}$

Получаем при решении, что $y_1 = 3$; $x_1 = 9$; $y_2 = 2{,}4$; $x_2 = 7{,}2$. Прямая пересекает окружность. Следовательно, сфера пересекается с данной плоскостью.

4. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_0(-5;3;2)$ и касающейся плоскости $2x - 2y + z - 4 = 0$.

Решение.

Для составления уравнения сферы (2.2) необходимо определить ее радиус. В данном случае R – расстояние от центра M_0 сферы до заданной плоскости:

$$R = \frac{|2 \cdot (-5) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 6.$$

Искомое уравнение сферы: $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$.

2.2. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из видов:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (эллипсоид трехосный, рис. 2.1);} \tag{2.4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (однополостный гиперболоид, рис. 2.2);} \tag{2.5}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (двуполостный гиперболоид, рис. 2.3);} \tag{2.6}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (конус, рис. 2.4);} \tag{2.7}$$

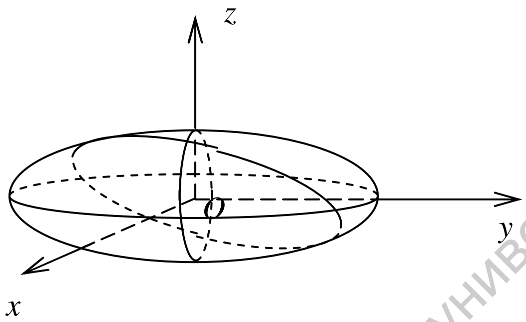

Рис. 2.1

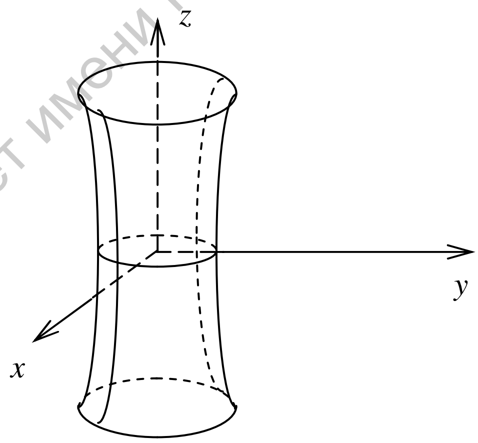

Рис. 2.2

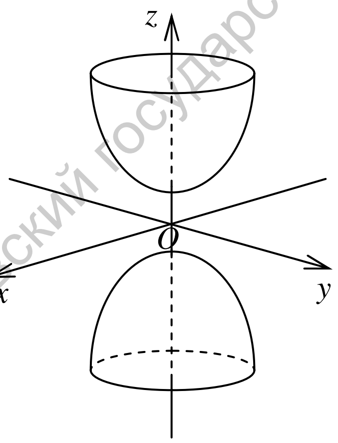

Рис. 2.3

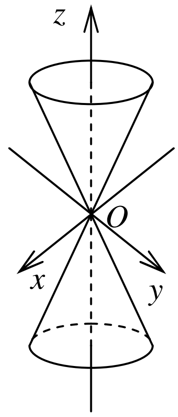

Рис. 2.4

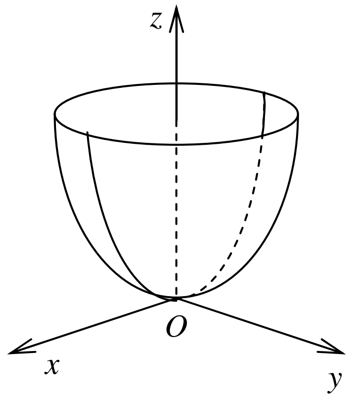

Рис. 2.5

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (эллиптический параболоид, рис. 2.5).} \tag{2.8}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ (гиперболический параболоид, рис. 2.6);} \tag{2.9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (эллиптический цилиндр, рис. 2.7).} \tag{2.10}$$

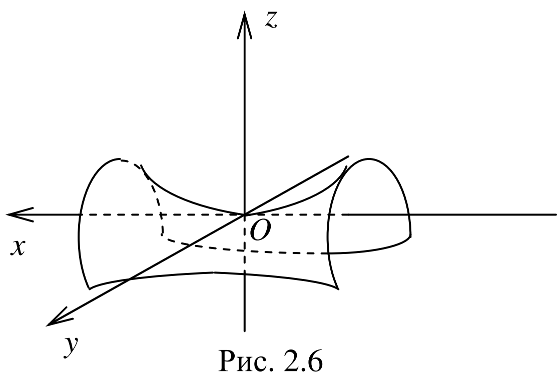

Рис. 2.6

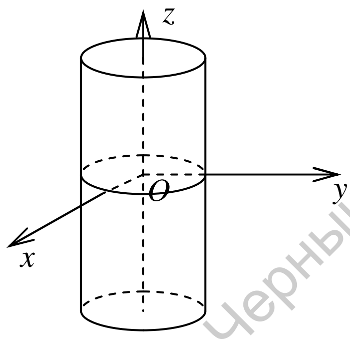

Рис. 2.7

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (гиперболический цилиндр, рис. 2.8);} \tag{2.11}$$

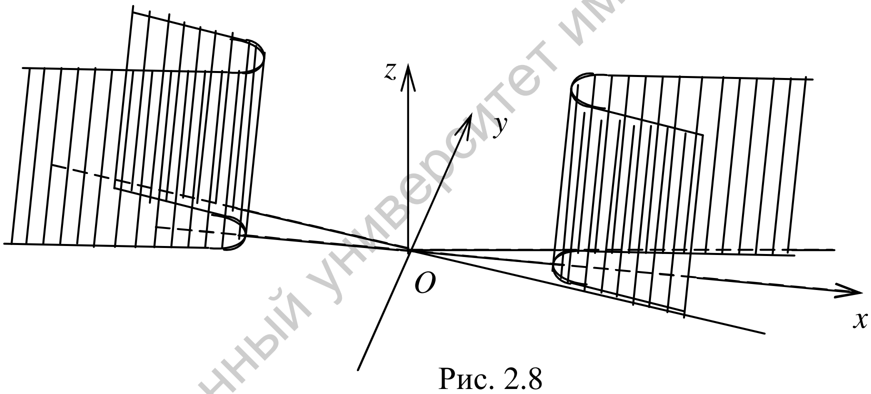

Рис. 2.8

$$y^2 = 2px \text{ (параболический цилиндр, рис. 2.9);} \tag{2.12}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (пара пересекающихся плоскостей, рис. 2.10).} \tag{1.13}$$

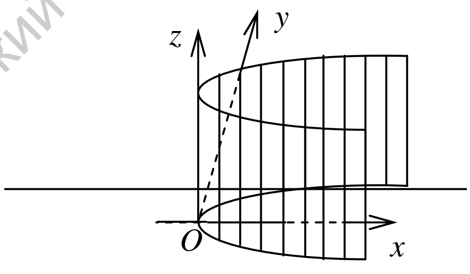

Рис. 2.9

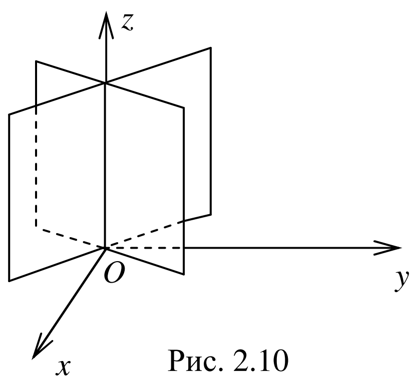

Рис. 2.10

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (пара параллельных плоскостей, рис. 2.11);} \tag{2.14}$$

$x^2 = 0$ (пара совпадающих плоскостей, рис. 2.12). (2.15)

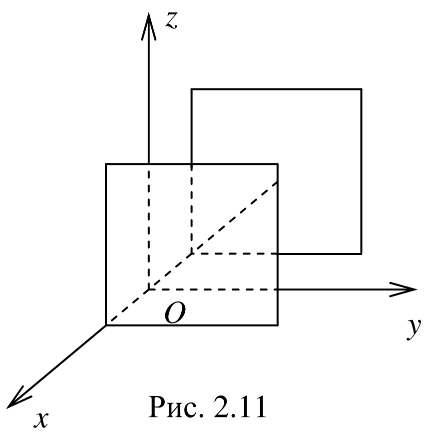

Рис. 2.11

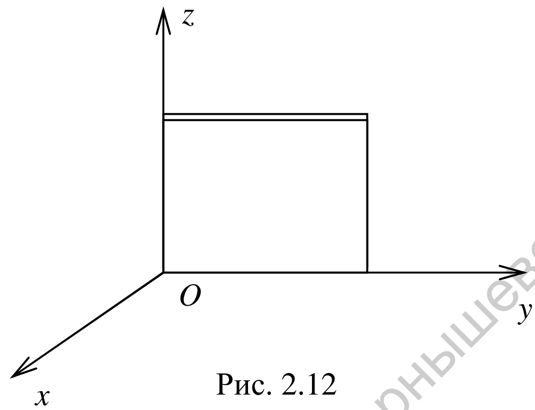

Рис. 2.12

П р и м е р . Установить, что плоскость $y-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1$ по эллипсу. Найти его полуоси и вершины.

Р е ш е н и е .

Пересечение двух поверхностей в пространстве представляет некоторую линию, принадлежащую как одной так и другой поверхности. Уравнение этой линии в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{9}=1, \\ y-2=0. \end{cases}$$

Подставим $y=2$ в первое уравнение и получаем

$$\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=\frac{1}{2}.$$

Это уравнение эллипса, расположенного в плоскости $y-2=0$. Поскольку каноническое уравнение полученного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{4{,}5}=1$, то его полуоси $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{4{,}5}$. Вершины эллипса расположены в точках $A_1\left(-\sqrt{8};2;0\right)$, $A_2\left(\sqrt{8};2;0\right)$, $B_1\left(0;2;-\sqrt{4{,}5}\right)$, $B_2\left(0;2;\sqrt{4{,}5}\right)$.

2.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Поверхность, образованная вращением линии l:

$$\begin{cases} x=\varphi_1(z), \\ y=\varphi_2(z), \end{cases} \tag{2.16}$$

вокруг оси Oz, определяется уравнением

$$x^2+y^2=\varphi_1^2(z)+\varphi_2^2(z). \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) называется *уравнением поверхности вращения*.

Определение 2.2. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, описываемая прямой (*образующей*), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (*направляющую*).

Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, имеет вид

$$F(x, y) = 0. \tag{2.18}$$

Уравнение направляющей цилиндрической поверхности (2.18) имеет вид

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Канонические уравнения цилиндров второго порядка имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – эллиптический цилиндр,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – гиперболический цилиндр,}$$

$$y^2 = 2px \text{ – параболический цилиндр.}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси Oz, а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости Oxy.

2.4. КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Определение 2.3. *Конической поверхностью* называется поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку (*вершину конуса*) и пересекающей данную линию (*направляющую конуса*).

Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz, определяется формулой (2.7).

Аналогично уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси Oy и Ox.

Уравнения второй степени могут выражать, кроме поверхностей в собственном смысле, и другие образы, которые лишь условно можно назвать поверхностями.

Общее уравнение второй степени относительно x, y, z может быть приведено к одному из уравнений (2.4)–(2.15) или к одному из следующих уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (мнимый конус);} \tag{2.20}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ (пара мнимых пересекающихся плоскостей);} \qquad (2.21)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (мнимый эллипсоид);} \qquad (2.22)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (мнимый эллиптический цилиндр);} \qquad (2.23)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1 \text{ (пара мнимых параллельных плоскостей).} \qquad (2.24)$$

Уравнению (2.20) удовлетворяют координаты единственной точки $O(0;0;0)$, уравнению (2.21) – координаты точек, лежащих на прямой $x=0$, $y=0$. Уравнениям (2.22)–(2.24) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Поверхности, образованные движением прямой, называются *линейчатыми*, а прямые, целиком лежащие на поверхности, называются *прямолинейными* образующими.

Однополосный гиперболоид (2.5) имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=q\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=p\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=q'\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ q'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=p'\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Гиперболический параболоид (2.9) имеет также два семейства образующих:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=qz\\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2p\end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=2q'\\ q'\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=p'z\end{aligned}\right\}.$$

Примеры.

1. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

а) $x^2+y^2=4$; б) $z^2=y$; в) $z^2=xz$?

Решение.

а) приведём уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, получим уравнение кругового цилиндра;

б) уравнение $z^2=y$ определяет параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси Ox, направляющей служит парабола, лежащая в плоскости Oyz;

в) уравнение $z^2 = zx$ может быть представлено в виде $z(z-x)=0$ и распадается на два уравнения: $z=0$ и $z=x$, т.е. оно определяет две плоскости – плоскость Oxy и биссектральную плоскость $z=x$, проходящую через ось Oy.

2. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка $M\,(0;0;0)$, а направляющей – эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=3$.

Решение.

Составим уравнение образующей AM, где $A(x_0;y_0;z_0)$ – точка, лежащая на эллипсе. Уравнения этой образующей имеют вид $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$. Так как точка A лежит на эллипсе, то её координаты удовлетворяют уравнениям эллипса, т.е. $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1,\ z_0=3$. Исключив теперь x_0, y_0 и z_0 из системы $\frac{x}{x_0}=\frac{z-1}{z_0-1},\ \frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1},\ \frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1,\ z_0=3$, получим уравнение искомого конуса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0$.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Написать общее уравнение поверхности второго порядка.
2. Написать каноническое уравнение сферы.
3. Написать каноническое уравнение следующих поверхностей:
   а) трехосного эллипсоида;
   б) однополостного гиперболоида;
   в) конуса;
   г) эллиптического параболоида;
   д) гиперболического параболоида;
   е) эллиптического цилиндра;
   ж) гиперболического цилиндра;
   з) параболического цилиндра.
4. Написать уравнение поверхности вращения.
5. Какая поверхность называется конической?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-1;0)$ параллельно векторам $\vec{a}=(0;2;3);\ \vec{b}=(-1;4;2)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;5)$.
3. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:
$L_1:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\qquad L_2:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.
4. Найти величину острого угла между плоскостями $11x-8y-7z-15=0$ и $4x-10y+z-2=0$.
5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4;2;3)$, $B(2;0;1)$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+3z+4=0$.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;2;1)$ и линию пересечения плоскостей $x+5y+9z-13=0$ и $3x-y-5z+1=0$.
7. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $A(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\begin{cases}3x+2y+z-3=0,\\ 2x-y-4z+1=0,\end{cases}$$
перпендикулярно плоскости $x+19y-7z-11=0$.
9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-2;1)$ и прямую $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=2-3t,\\ z=-3+2t.\end{cases}$
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$.
11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(3;-3;1)$, $B(2;4;-5)$.
12. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-2;5)$ параллельно прямой $\begin{cases}x-2y+z-1=0,\\ 2x+y-4z+3=0.\end{cases}$
13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-1;-3)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$.

14. Найти угол между прямыми:

$$\frac{x}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{7}; \qquad \frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}.$$

15. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases}4x-y-z+12=0,\\ y-z-2=0.\end{cases} \qquad \begin{cases}3x-2y+16=0,\\ 3x-z=0.\end{cases}$$

16. Доказать параллельность прямых:

а) $\begin{cases}x+y-3z=0,\\ x-y-5z-8=0\end{cases}$ и $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$;

б) $\begin{cases}x=2t+5,\\ y=-t+2,\\ z=t-7\end{cases}$ и $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ x-y-3z-2=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y-3z+1=0,\\ x-y+z+3=0\end{cases}$ и $\begin{cases}x+2y-5z-1=0,\\ x-2y+3z-9=0.\end{cases}$

17. Доказать перпендикулярность прямых:

а) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x=2t+1,\\ y=3t-2,\\ z=-6t+1\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\ 4x-y-5z+4=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\ 2x-y=9z-2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y-2z+5=0,\\ 2x-2y-z+2=0.\end{cases}$

18. При каком значении m прямая: $\dfrac{x+10}{m}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x-3y+4z-1=0$.

19. Найти координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ с плоскостью $4x-3y+2z+5=0$.

20. Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;3;1)$ на плоскость $3x+y+2z-11=0$.

21. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1;1;6)$ на прямую $\begin{cases}x=-1+3t,\\ y=2t,\\ z=t.\end{cases}$

22. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-4;3;0)$ перпендикулярно прямым L_1 и L_2, если

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}, \qquad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{-5}.$$

23. Найти уравнения проекции прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x + 3y - z - 5 = 0$.

24. Найти расстояние от точки $A(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$.

25. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{-3} \text{ и } \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+1}{-12}.$$

26. Заданы прямая $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ и плоскость $P: x + y - z + 1 = 0$.

Найти:

а) угол между прямой и плоскостью;

б) координаты точки пересечения прямой и плоскости.

27. Даны прямые

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \qquad L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$ Найти:

а) расстояние между прямыми;

б) уравнение общего перпендикуляра к прямым.

28. Какие поверхности определяются уравнениями:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y - 8 = 0$;

б) $y = 4z^2$.

29. Установить как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно сферы

а) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$;

б) $(x+14)^2 + (y-11)^2 + (z+12)^2 = 625$;

в) $(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$.

30. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_1(6;-3;-2)$.

31. Составить уравнение линии пересечения плоскости Oyz и сферы, центр которой находится в точке $S(1;1;3)$ и радиус равен 5.

32. По какой линии пересекается конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ с плоскостью $y - 2 = 0$.

ОТВЕТЫ

1. $8x+3y-2z-5=0$; **2.** $10x-5y-4z+20=0$; **3.** $6x-20y-11z+1=0$; **4.** 45°; **5.** $x-2y+z-3=0$; **6.** $x+y+z-3=0$; **7.** $x-2y+2z+24=0$; $x-2y+2z-6=0$; **8.** $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$; **9.** $4x+6y+5z-1=0$; **10.** $x-8y-13z+9=0$; **11.** $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-1}{-4}$; **12.** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{1}$; **13.** $\begin{cases}x=2t+1,\\ y=4t-1,\\ z=-3.\end{cases}$; **14.** 45°; **15.** $\cos\varphi=\dfrac{20}{21}$; **18.** 6; **19.** $(1;3;0)$; **20.** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$; **21.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-5}$; **22.** $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z}{7}$; **23.** $\dfrac{x}{-10}=\dfrac{y-3{,}4}{13}=\dfrac{z-5{,}2}{19}$; **24.** $\sqrt{33}$; **25.** $\dfrac{6\sqrt{42}}{7}$; **26.** а) $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$; б) $(1;-6;-4)$; **27.** а) $\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$; б) $\begin{cases}x-10y+2z+11=0,\\ 3x-2y-z+3=0\end{cases}$; **29.** а) вне сферы, б) на сфере, в) внутри сферы; **30.** $6x-3y-2z-49=0$; **31.** $(x-1)^2+(y-1)^2=16;\ z=0$.

Список рекомендованной литературы

Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н.,Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1998.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Соболь Б.В. Практикум по высшей математике/ Б.В.Соболь, Н.Т.Мишняков, В.М. Поркшеян. – Изд. 5-е. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.

Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.