ФБГОУ ВПО "Саратовский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского"

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева

Численное моделирование в задачах теории чисел

Учебное пособие для студентов механико-математического факультета

Саратов
2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

L-функция Дирихле определяется в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ следующей формулой:

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где χ — числовой характер по модулю m. Такие функции были введены Дирихле в 1837 году при решении задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях [1]. В аналитической теории чисел L-функции Дирихле играют не менее важную роль, чем дзета-функция Римана.

Известно, что в случае неглавного характера L-функция определяет целую функцию, нетривиальные нули которой лежат в критической полосе $0 < \sigma < 1$.

В 1922 году [2] Харди и Литлвуд выдвинули гипотезу, что нетривиальные нули L-функции Дирихле располагаются на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Эта гипотеза носит название расширенной гипотезы Римана. До сих пор эта гипотеза не решена. Не ясно даже, является ли эта гипотеза следствием гипотезы Римана о нулях дзета-функции(см. [3], [4]).

Как и в случае основной гипотезы Римана, существует много исследований, связанных с численной реализацией нетривиальных нулей L-функции Дирихле. Достаточно полную информацию о таких исследованиях в случае дзета-функции можно получить в книге Е.Н. Титчмарша [5]. Нужно сказать, что численные методы, связанные с определением нулей L-функций были основаны на приближении L-функций медленно сходящимися рядами. Это отражалось в том числе на времени реализации вычислений. Данное учебное пособие посвящено разработке и численной реализации более эффективных методов определения нулей L-функций Дирихле.

Глава 1 Необходимые сведения о нулях L-функций Дирихле и нулях почти-периодических функций.

§ 1 L-функции Дирихле, их свойства.

L-функции Дирихле — функции комплексного переменного, подобные дзета-функции Римана, введены Л.Дирихле при исследовании вопроса о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях. При изложении основных понятий и фактов, связанных с L-функцией Дирихле, мы будем придерживаться работ [7], [11]. Введём сначала понятие характера Дирихле.

Определение 1. Характером Дирихле по модулю k (где $k \geq 2$ — целое число) называют комплекснозначную периодическую функцию $\chi(n)$, для которой выполняются следующие свойства:

а) $\chi(n)$ — не равная тождественно нулю функция, причём $\chi(n) = 0$, если $(n, k) > 1$, и $\chi(n) \neq 0$, если $(n, k) = 1$;

б) $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$ для любых n и m (мультипликативность);

в) $\chi(n + k) = \chi(n)$ для любого k (периодичность).

Существует ровно $\varphi(k)$ характеров по модулю k, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера, т.е. число чисел, взаимнопростых с k. Все характеры по модулю k образуют группу порядка $\phi(k)$, изоморфную мультипликативной подгруппе обратимых элементов кольца вычетов по модулю k.

Определение 2. Характер χ модуля k называется главным характером, если $\chi(n) = 1$ для всех n, взаимнопростых с k.

В группе характеров по модулю k он играет роль единицы.

Определение 3. Неглавный характер $\chi(n)$, наименьший период которого равен его модулю, называют первообразным характером.

Определение 4. Характер, принимающий хотя бы одно комплексное значение, называется комплексным характером $\chi(n)$, а характер, принимающий значения, комплексно-сопряжённые к $\chi(n)$, называется комплексно-сопряжённым к $\chi(n)$ и обозначается $\overline{\chi(n)}$.

Для любого характера $\chi(n)$ по модулю k выполняется равенство

$$\chi^{\varphi(k)}(n) = \chi_0(n).$$

Введём теперь понятие L-функции Дирихле.

Пусть k — натуральное число и χ — какой-либо характер по модулю k.

Определение 5. L-функцией Дирихле называется ряд

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{1}$$

Ввиду того, что $|\chi(n)| \leq 1$, следует аналитичность $L(s,\chi)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Для $L(s,\chi)$ имеет место аналог формулы Эйлера (эйлерово произведение): при $\operatorname{Re}(s) > 1$ справедливо равенство

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{2}$$

На основании этого представления можно показать (например, [11]), что $L(s,\chi) \neq 0$ при $\operatorname{Re} s > 1$. L-функция Дирихле, соответствующая главному характеру χ_0 по модулю k, связана с дзета-функцией Римана следующей формулой:

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{3}$$

Как следствие, получаем, что $L(s,\chi_0)$ — аналитическая функция во всей s-плоскости, за исключением точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным

$$\prod_{p \backslash k} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Если характер $\chi(n)$ является произвольным, а $\chi_1(n)$ — первообразный характер по модулю k_1, $k_1 \setminus k$, отвечающий $\chi(n)$, то $L(s,\chi)$ лишь простым множителем отличается от $L(s,\chi_1)$:

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \prod_{p\backslash k, p\times k_1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right). \tag{4}$$

Функцию $L(s,\chi)$ можно продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Пусть $\chi \neq \chi_0$; тогда при $\operatorname{Re} s > 0$ справедливо равенство

$$L(s,\chi) = s \int\limits_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx,$$

где

$$S(x) = \sum_{n \le x} \chi(n).$$

Из этого представления следует, что при $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}, \chi \neq \chi_0$, выполняется оценка

$$|L(s,\chi)| \leq 2|s|\varphi(k).$$

Так же известен следующий факт ([11]). При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s},$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k \\ 1, & \text{если } n \neq p^k. \end{cases}$$

Известно ([11]), что в случае неглавного первообразного характера χ L-функция $L(s,\chi)$ определяет целую функцию и удовлетворяет функциональному уравнению. Вид функционального уравнения зависит от того, чётным или нечётным является характер χ, т.е. $\chi(-1) = 1$ или $\chi(-1) = -1$. А именно, имеет место теорема:

Теорема 1. *Пусть χ — неглавный, первообразный характер по модулю k. Тогда $L(s,\chi)$ продолжима аналитическим образом на всю комплексную* *плоскость и имеет место функциональное уравнение*

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^\delta\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi), \tag{5}$$

где $\xi(s,\chi)$ *определяется по формуле*

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi), \tag{6}$$

и где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi(-1) = 1 \\ 1, & \text{если } \chi(-1) = 1. \end{cases}$$

Функциональное уравнение вида (5) называется уравнением римановского типа. В случае $k = 1, \delta = 0, \chi \equiv 1$ получаем функциональное уравнение для дзета-функции Римана. Известно [12], что функциональное уравнение Римана в классе рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами определяет дзета-функцию с точностью до постоянного множителя.

Как показано в работе [13], в классе рядов Дирихле с конечнозначными, мультипликативными коэффициентами функциональное уравнение типа Римана также определяет L-функцию Дирихле с точностью до постоянного множителя. В классе рядов с периодическими коэффициентами аналогичный факт не имеет места. Известный пример Дэвенпорта-Хейльбронна [14] показывает, что существуют ряды Дирихле с периодическими коэффициентами, которые не являются L-функциями Дирихле и удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа. В работе [15] показано, что таких рядов Дирихле существует бесконечное множество.

В силу функционального уравнения (**??**) целая L-функция $L(s,\chi)$, где χ — первообразный характер, имеет нули, совпадающие либо с точками $s = -2n$, либо $s = -2n+1, n = 0,1,2,\ldots$ в зависимости от чётности характера χ. Эти нули называются тривиальными нулями.

Известно [11], что $L(s,\chi) \neq 0$, при $s = 1+it$. Поэтому нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$ лежат в критической полосе: $0 < \sigma < 1$. В силу соотношения

(4) нули L-функции $L(s,\chi)$, где χ — неглавный характер Дирихле, отличные от тривиальных, лежат в критической полосе и на прямой $\sigma = 0$.

Как уже говорилось ранее, расширенная гипотеза Римана говорит о том, что нетривиальные нули L-функций Дирихле, расположенные в критической полосе, лежат на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

Обозначим через $N_\chi(T)$ число нулей $L(s,\chi)$ в области $0 \le \sigma < 1, 0 < t \le T$ (с учётом их кратности). В [7] доказано следующее утверждение:

Теорема 2. *Для любого характера χ по модулю k при $T \ge 2, x \ge 1$ имеет место соотношение*

$$N_\chi(T) = \frac{1}{2\pi} T \ln T + A(k)T + O(\ln kT), \tag{7}$$

где $A(k)$ — действительная константа, зависящая от $k(A(k) \ll ln2k)$.

Там же ([7]) показано, что

$$N_\chi(T+1) - N_\chi(T) = O(lnT) \tag{8}$$

Обозначим через $N_\chi(\sigma_0, T)$, где $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, число нулей L-функции, лежащих в прямоугольнике: $\sigma_0 \le \sigma < 1, 0 < t \le T$. Для величины $N_\chi(\sigma_0, T)$ известно соотношение вида

$$N_\chi(\sigma_0, T) = O(T). \tag{9}$$

Соотношения (7), (9) показывают, что "значительная"часть нулей L-функции Дирихле располагается на критической прямой.

Известно [16], что плотность нулей L-функции Дирихле в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ определяет порядок роста модуля $|L(s,\chi)|$ на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Известная гипотеза Линделёфа (см. [16]) утверждает, что модуль L-функции на критической прямой растёт не быстрее любой степенной функции, т.е.

$$\left| L(\frac{1}{2} + it, \chi) \right| = O(|t|^\varepsilon), \tag{10}$$

где ε — любое положительное число.

Там же [16] показано, что условие (10) равносильно тому, что для любого $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$

$$N_\chi(\sigma_0, T+1) - N_\chi(\sigma_0, T) = o(lnT). \tag{11}$$

§ 2 Почти-периодические функции класса Δ, их свойства.

В этом параграфе приведём основные факты относительно почти-периодических функций. При изложении этих фактов будем следовать работе [6].

Определение 6. Комплекснозначная функция $f(x)$ называется почти-периодической, если она непрерывна на числовой прямой и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число l, что для любого отрезка длины l найдётся число τ, такое, что выполняется условие: для любого x

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Почти периодические функции обладают следующими свойствами:

- Почти-периодические функции ограничены и равномерно непрерывны на числовой прямой.
- Сумма и произведение почти-периодических функций являются почти-периодическими функциями.
- Предел равномерно сходящейся последовательности почти-периодических функций является почти периодической функцией.

В силу второго свойства полиномы вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \tag{13}$$

где λ_k — вещественные, являются почти-периодическими функциями (как сумма периодических).

Определение 7. Функция $F(z)$, аналитическая в полосе $\alpha < y < \beta$, где $y = \operatorname{Im} z$, называется почти-периодической в этой полосе, если для любого

$\varepsilon > 0$ существует такое число $l > 0$ такое, что в любом интервале длины l найдётся такое число τ, что

$$|f(z+\tau) - f(z)| < \varepsilon$$

для всех $\alpha < y < \beta$.

Для почти-периодической функции $f(x)$ существует конечная величина

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T+\alpha}^{T+\alpha} f(t)dt$$

и существует некоторая последовательность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ таких, что величины

$$M(f(x)e^{-i\lambda_k x})$$

не равны нулю. Последовательность таких чисел называется спектром почти-периодической функции.

Например, для полинома (13) его спектр совпадает с числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Для почти-периодических функций имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Для того, чтобы почти-периодическая функция $f(z)$ была целой функцией конечной степени, необходимо и достаточно, чтобы её спектр был ограничен.*

Теорема 4. *Число корней (с учётом кратности) голоморфной и почти-периодической в полосе $|y| < h$ функции $f(z)$, попавших в прямоугольник: $t < x < t+1, |y| < h-\delta$, ограничено некоторой константой $h(\delta)$, не зависящей от t.*

Теорема 5. *Для того, чтобы все корни целой почти-периодической функции конечной степени располагались в некоторой полосе, параллельной вещественной оси, необходимо и достаточно, чтобы верхняя и нижняя границы спектра входили в спектр.*

Определение 8. Целая почти-периодическая функция, которая с точностью до множителя $e^{i\lambda z}$ является функцией степени Δ, и для которой верхняя и нижняя границы спектра входят в её спектр, называется почти-периодической функцией класса Δ.

Замечание 1. Полиномы вида (13) являются почти-периодическими функциями класса $\Delta = |\lambda_n|$, если только $0 = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Теорема 6. *Корни почти-периодических функций класса* Δ *лежат в полосе* $|y| \leq h$, *и если* $n(t)$ *— число корней (с учётом кратности) в прямоугольнике:* $|y| \leq h, 0 < x \leq t$, *то*

$$h(t) = \frac{\Delta}{\pi}t + \omega(t),$$

где функция $\omega(t)$ *ограничена константой, зависящей от* Δ.

Таким образом, для почти-периодических функций класса Δ функция $h(t)$ растёт линейным образом в зависимости от t.

Глава 2 Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана и численный эксперимент, связанный с этим эквивалентом.

В данной главе будет получен новый эквивалент расширенной гипотезы Римана. Этот результат, в первую очередь, интересен тем, что позволяет ответить на вопрос, каким образом можно изменить характер Дирихле, чтобы соответствующий ряд Дирихле и L-функция Дирихле имели общие нули в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Во-вторых, существует простая вычислительная схема, позволяющая предположить истинность или опровергнуть соответствующее утверждение. Применение этой вычислительной схемы позволило высказать одно новое предположение относительно свойств характеров Дирихле.

В основе доказательства основного результата лежит метод редукции к степенным рядам — метод аналитического продолжения рядов Дирихле, основанного на изучении взаимосвязи между аналитическими свойствами рядов Дирихле и поведением соответствующих (с теми же коэффициентами, что и ряды Дирихле) степенных рядов при подходе к граничной точке $z = 1$ вдоль вещественного направления. Основы этого метода были разработаны В. Н. Кузнецовым в 1984 году [17] и получили дальнейшее развитие в работах В. Н. Кузнецова и его учеников [18], [19], [20].

В первом параграфе данной главы будут изучены основные положения метода редукции к степенным рядам, а во втором параграфе будет приведено доказательство основного результата.

§ 1 Метод редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ln}}{n^s}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{|a_n|} = 1, \tag{1}$$

который абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma > 1$, и соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{2}$$

сходящийся в единичном круге. Рассмотрим интегральное представление для Г-функции

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \sigma > 1.$$

Замена переменной $t = nx$ даёт следующее представление

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx. \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) на коэффициент a_n и просуммировав такие равенство, получаем интегральное представление вида

$$f(s)\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 1, \tag{4}$$

где

$$g(e^{-x}) = \sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} \tag{5}$$

Интегральное представление (4) является преобразованием Меллина функции $g(e^{-x})$. Обратным преобразованием Меллина является следующее интегральное представление

$$g(e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(s)\Gamma(s) x^{-s} ds, \quad \sigma > 1, x > 0. \tag{6}$$

По поводу прямого и обратного преобразования Меллина см. [7].

Метод редукции к степенным рядам заключается в установлении взаимосвязи между возможным аналитическим продолжением ряда Дирихле (1) и граничным поведением при подходе x к нулю ряда (5), а, следовательно, граничного поведения при подходе z к границе вдоль вещественного направления степенного ряда (2). Такая взаимосвязь устанавливается на основании изучения свойств прямого (4) и обратного (5) преобразований Меллина.

Например, как показано в [19], [20], наличие конечных радиальных производных степенного ряда (2) вида

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

обеспечивает аналитическое продолжение ряда Дирихле (1) целым образом на всю комплексную плоскость.

Обратно, если ряд Дирихле (7) продолжим целым образом на всю комплексную плоскость и удовлетворяет некоторым ограничениям на рост модуля, то степенной ряд (2) имеет в точке $z = 1$ конечные радиальные производные вида (7).

В частности, следующие условия являются эквивалентными:

а) Ряд Дирихле (1) определяет целую функцию, модуль которой удовлетворяет следующему условию

$$|f(s)| \le Ce^{|s|\ln|s|+A|s|},$$

где A — некоторая положительная константа;

б) Степенной ряд (2) определяет функцию, регулярную в точке $z = 1$.

Данное утверждение доказано в [17] в случае конечнозначных коэффициентов и в общем случае в работе [18].

Отметим, что в ряде случаев метод редукции к степенным рядам позволяет доказать аналитическое продолжение ряда Дирихле (1) только в некоторую полуплоскость.

Приведём здесь доказательство одного утверждения, которое будет востребовано при доказательстве основного результата данной главы. Имеет место

Теорема 7. *Следующие условия эквивалентны:*

а) Ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \sigma > 1,$$

аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma > \frac{1}{2}$ с условием роста модуля

$$|f(s)\Gamma(s)| < Ce^{-\alpha|s|}, \quad \frac{1}{2} < \sigma <\leq 1, \alpha > 0; \tag{8}$$

б) Соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{9}$$

при подходе к точке $z = 1$ вдоль вещественного направления ведёт себя следующим образом

$$g(x) = O((1-x)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}) \tag{10}$$

при $x \to 1$, где ε — любое положительное число.

Доказательство. Запишем преобразование Меллина

$$f(s)\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 1, \tag{11}$$

Покажем, что интеграл, стоящий в правой части равенства абсолютно сходится при любом s, где $\sigma > \frac{1}{2}$. И, следовательно, определяет в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ регулярную функцию.

Действительно, оценка (10) равносильна оценке вида

$$g(e^{-x}) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{12}$$

при $x \to 0$. Следовательно, интеграл

$$\int_0^1 g(e^{-x})x^{s-1}dx$$

абсолютно сходится при $\sigma > \frac{1}{2}$, а интеграл

$$\int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx$$

абсолютно сходится при любом s, что и доказывает утверждение теоремы в одну сторону (оценка (8) выполняется автоматически).

Рассмотрим обратное преобразование Меллина

$$g(e^{-x}) = \sum_1^\infty a_n e^{-nx}, \quad \sigma > 1, x > 0.$$

Сдвигая контур интегрирования влево до прямой $\sigma = \frac{1}{2} + \varepsilon$ (что возможно в силу (8)), получаем

$$g(e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-i\infty}^{0} f(s)\Gamma(s)x^{-s}ds + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon+i\infty} f(s)\Gamma(s)x^{-s}ds \qquad (13)$$

Легко видеть, что в силу (8) каждое слагаемое, стоящее в правой части равенства (13) имеет порядок

$$O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

при $x \to o$, что и завершает доказательство теоремы 1. $\square$

§ 2 Об одном эквиваленте отсутствия нулей L-функции Дирихле в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ и связанный с ним численный эксперимент.

Рассмотрим L-функцию Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{14}$$

где χ — неглавный характер модуля d. Имеет место следующее утверждение

Теорема 8. *Расширенная гипотеза Римана для L-функции* (14) *эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{p} \chi(p) \ln p x^p = O((1-x)^{-\frac{1}{2}-\sigma}) \tag{15}$$

при $x \to 1$, где суммирование ведётся по всем простым p, ε — произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от x.

Доказательство. Рассмотрим логарифмическую производную L-функции Дирихле. Известно [11], что

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},$$

где$\Lambda(n)$ — функция Мангольда:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k \\ 1, & \text{если } n \neq p^k. \end{cases}$$

Тогда получаем

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{p} \frac{\chi(n)\ln p}{p^s} + f_1(s), \tag{16}$$

где $f_1(s)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$. В силу (16) L-функция (14) тогда и только тогда не имеет нулей в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$, когда функция

$$f(s) = \sum_{p} \frac{\chi(p \ln p)}{p^s}$$

регулярна в этой полуплоскости. Последнее в силу предыдущей теоремы равносильно оценке (15), что и завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Приведём теперь доказательство основного результата этой главы. Имеет место

Теорема 9. *Расширенная гипотеза Римана для L-функции (14) эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{p \le x} \chi(p) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{17}$$

где ε — произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от χ.

Доказательство. Покажем, во-первых, что оценка (17) равносильна оценке вида

$$\sum_{p \le x} \chi(p) \ln p = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{18}$$

Рассмотрим сумму

$$S^*(x) = \sum_{p \le x} \chi(p) \ln p.$$

По формуле суммирования Абеля получаем:

$$|S^*(x)| = \left| S(x) \ln(x) - \int_1^x \frac{S(n)}{n} dn \right| \le \ln x |S(x)| + \ln x \max_{n \le x} |S(n)|,$$

где

$$S(x) = \sum_{p \le x} \chi(p).$$

В силу оценки (17) отсюда получаем

$$S^*(x) = O(\ln x x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{19}$$

где ε — произвольное положительное число.

Обратно, в силу преобразования Абеля, имеем:

$$|S(x)| \le \left| S^*(x)\frac{1}{\ln x}\right| + \left| \int\limits_1^x \frac{S^*(n)}{\ln n}\frac{1}{n}dn \right| \le \frac{1}{\ln x}|S^*(x)| + \frac{1}{\ln x}\max_{n\le x}\frac{|S^*(n)|}{\ln n},$$

что в силу оценки (18) даёт оценку (17).

покажем теперь, что из оценки (18) следует оценка (15) теоремы 8. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{p\le x}\chi(p)\ln p\; x^p.$$

Применяя приём суммирования Абеля, получаем при $x<1$ следующее интегральное представление:

$$\sum_{p\le x}\chi(p)\ln p\; x^p = -\ln x\int\limits_2^\infty S^*(n)x^n dn.$$

В силу оценки (18) отсюда получаем:

$$\left|\sum_{p\le x}\chi(p)\ln p\; x^p\right| = \ln x O(\int\limits_2^\infty n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}x^n dn).$$

Запишем последний интеграл в виде

$$\int\limits_2^\infty n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}x^n dn = \int\limits_2^{(1-x)^{-1}} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}x^n db + \int\limits_{(1-x)^{-1}}^\infty n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}x^n dn.$$

Применим к полученному интегралу формулу суммирования по частям. В итоге получим:

$$\left|\sum_{p\le x}\chi(p)\ln p\; x^p\right| = \ln x O\left((1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\ln x} + \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\ln^2 x}\right) = O\left((1-x)^{-\frac{1}{2}\ldots}\right.$$

при $x\to 1$, что и доказывает оценку (15). В силу теоремы 8 отсюда следует расширенная гипотеза Римана для L-функции (14).

Тот факт, что из расширенной гипотезы Римана для L-функции (14) следует оценка (18), доказывается методом контурного интегрирования. Для этого сумма

$$\sum_{p\leq x}\chi(p)\ln p$$

представляется в виде интеграла от функции

$$\frac{x^s L'(s,\chi)}{sL(s,\chi)}$$

вдоль контура, состоящего из прямой $(c-i\infty, c+i\infty)$, где $c>1$, и затем этот интеграл оценивается путём сдвига контура к прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, т.е. нужно провести такие же рассуждения, что и при выводе асимптотического закона распределения простых чисел в прогрессиях.Как показано в [7], эти рассуждения при предположении расширенной гипотезы Римана дают оценку (18), а следовательно и оценку (17), что и завершает доказательство теоремы. □

Отметим, что доказанный результат является новым результатом. Из него, в частности, следует ответ на вопрос, насколько произвольно можно менять характеры Дирихле, чтобы в полуплоскости $\sigma>\frac{1}{2}$ нули соответствующего ряда Дирихле совпадали с нулями L-функции Дирихле. А именно, имеет место теорема 4 (см. введение).

Этот факт представляет интерес в связи с известной гипотезой Н.Г. Чудакова [8], [9] о том, что мультипликативная функция натурального аргумента $h(n)$, удовлетворяющая условиям:

а) Почти для всех простых $p: h(p)\neq 0$

б) Ограниченность сумматорной функции

$$S(x)=\sum_{n\leq x}h(n),$$

является характером Дирихле.

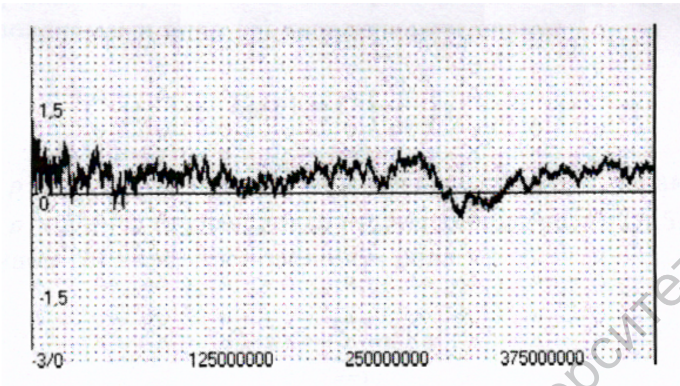
Отметим так же, что условие (17) теоремы 9 само по себе определяет вычислительную схему, реализация которой позволяет в какой-то степени говорить об истинности расширенной гипотезы Римана или об её опровержении.

На рисунке 1 приведён график поведения функции

$$f(x) = \sum_{p \le x} \frac{h(p)}{\sqrt{x}}$$

для характера Дирихле

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(mod3) \\ 1, & n \equiv 1(mod3) \\ -1, & n \equiv -1(mod3) \end{cases}$$



Этот график косвенно подтверждает расширенную гипотезу Римана. Более того, он позволяет высказать предположение, что

$$\sum_{p \le x} \chi(p) \le \sqrt{x}.$$

Примеры вычислений, связанных с характерами Дирихле модуля 3 и модуля 5 не только косвеено подтверждают гипотезу Римана, но приводят к следующему предположению:

Для любого неглавного характера Дирихле $\chi(n)$ имеет место оценка вида

$$\sum_{p \le x} \chi(p) = O(\sqrt{x}),$$

где константа в оценке зависит только от модуля характера.

Отметим, что это предположение является в какой-то степени обобщением гипотезы Мертенса [5] о том,что имеет место оценка

$$\sum_{m \le x} \mu(n) \le \sqrt{x},$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

Глава 3 Аппроксимационный подход в задаче определения нулей L-функции Дирихле в прямоугольнике: $0 < \sigma < 1,\ 0 < t \leq T$.

В этой главе мы укажем одну эффективную численную схему определения нулей L-функции Дирихле в критичечкой полосе. В основе этой вычислительной схемы лежит один результат, полученный в работе [21]. Там было показано, что для L-функции Дирихле

$$L(s,\chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{z^n} \tag{1}$$

и соответствующего степенного ряда

$$g(z) = \sum_{1}^{\infty} \chi(n) z^n \tag{2}$$

последовательность полиномов

$$P_n(x) = \sum_{0}^{n} a_k^{(n)} x^k, \tag{3}$$

аппроксимирующих функцию $g(x)$ на отрезке $[0,\ 1]$ с показательной скоростью, определяет последовательность полиномов Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{k^s,} \tag{4}$$

которая аппроксимирует L-функцию Дирихле в любом заданном прямоугольнике: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1, 0 \leq t \leq T$, с той же самой скоростью. Известная теорема Гурвица [22] утверждает, что в этом случае все нули L-функции Дирихле аппроксимируются нулями полиномов Дирихле (4). Так как функция (2) является рациональной функцией, регулярной в точке $z = 1$, то можно указать такую последовательность алгебраических полиномов (3), которая приближает функцию $g(x)$ на отрезке $[0,\ 1]$ с показательной скоростью [23].

Следовательно, и соответствующая последовательность полиномов Дирихле (4) будет приближать L-функцию Дирихле в заданном прямоугольнике с показательной скоростью. Известная теорема Бернштейна о приближении функций, регулярных в области, ограниченной эллипсом, фокусы которого расположены в точках $z = \pm 1$, а полусумма осей равна ρ ($\rho > 1$) (см. [23]) говорит о том, что в случае регулярности функции $g(z)$ в этой области в качестве аппроксимирующих полиномов для $g(x)$ на отрезке [0, 1] можно взять частичные суммы разложения функции $g(x)$ на отрезке [-1, 1] по полиномам Чебышёва. Порядок скорости аппроксимации полиномами $P_n(x)$, а, следовательно, и полиномами $Q_n(s)$ будет $O(\frac{1}{\rho^n})$. Эти факты легли в основу вычислительной схемы определения корней L-функции Дирихле, лежащих в критической полосе, приведённой в работе [10].

Нужно сказать, что здесь, в отличие от работы [10] при определении степени аппроксимирующего полинома $Q_n(s)$, нули которого в заданном прямоугольнике: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $0 \leq t \leq T$, совпадают с нулями L-функции Дирихле, был использован не принцип Рунге, основанный на совпадении нулей полиномов $Q_n(s)$ и $Q_{2n}(s)$, а тот факт, что полиномы $Q_n(s)$ являются почти-периодическими функциями класса $\Delta = \ln n$.

В последнем параграфе данной главы отмечается важность приведённой вычислительной схемы не только в задаче определения нулей L-функции Дирихле, но и в решении других задач, связанных с с поведением L-функций Дирихле в критической полосе. Например, в исследовании поведения L-функции на критической прямой. Гипотеза Линделёфа [16] утверждает, что

$$\left| L(\frac{1}{2} + it) \right|$$

растёт медленнее любой степенной функции (в зависимости от t). Эта гипотеза нашла переформулировку, выраженную в терминах поведения аппроксимирующих полиномов Дирихле. Тот факт, что эти полиномы являются почти-периодическими функциями, позволяет провести серию численных экспериментов с целью уточнения поведения модулей таких полиномов на критической прямой. Но соответствующие вычисления не проводились в данном учебном пособии.

§ 1 Алгоритм построения полиномов Дирихле, нули которых совпадают с нулями L-функций Дирихле в заданном прямоугольнике.

Рассмотрим L-функцию Дирихле

$$L(s,\chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{z^n}, \tag{1}$$

где $\chi(n)$ — неглавный характер Дирихле модуля d, и соответствующий степенной ряд (2)

$$g(z) = \sum_{1}^{\infty} \chi(n) z^n. \tag{2}$$

Легко видеть, что для периодических коэффициентов степенной ряд определяет рациональную функцию вида

$$g(z) = \frac{P_{d-1}(z)}{1+z+\ldots+z^{n-1}}. \tag{3}$$

где d — период.

Полюсы функции (3) лежат на единичной окружности, в корнях степени d из единицы. Предположим, что эта функция регулярна в точке $z=-1$, что соответствует нечётным значениям d. Пусть D_{ρ_0} обозначает область, ограниченную эллипсом,фокусы которого находятся в точках ± 1 с суммой полуосей ρ_0. При этом функция (3) регулярна внутри области D_{ρ_0} и имеет хотя бы один полюс на границе этой области.

Несложные вычисления показывают, что в случаях $d = 3, 5, 7, 9$ величина $\rho_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Рассмотрим разложение функции (3) на отрезке [-1, 1] по полиномам Чебышёва

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \tag{4}$$

где при $k \geq 1$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} g(t) T_k(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\cos\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi. \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k. \tag{6}$$

Теорема Бернштейна, приведённая в [23], утверждает, что для любого ρ: $1 < \rho < \rho_0$

$$\|g(x) - P_n(x)\|_{C[-1;1]} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right). \tag{7}$$

Пусть $Q_n(s)$ —последовательность полиномов Дирихле, соответствующая последовательности (6):

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s} \tag{8}$$

.

Как показано в работе [21], полиномы Дирихле вида (8) приближают L-функцию Дирихле в любом прямоугольнике: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1, \ 0 \leq t \leq T$ с той же скоростью, что и алгебраические полиномы (6) приближают функцию $g(x)$ на отрезке $[-1; 1]$, т.е. имеет место оценка:

$$\|L(s, \chi) - Q_n(s)\| \leq C \frac{1}{\rho^n}, \tag{9}$$

где ρ — любое число, удовлетворяющее условию $1 < \rho < \rho_0$. Более того, в [21] показано, что константа C в оценке (9) не зависит ни от n, ни от σ_0.

Известная теорема Гурвица [22] говорит о том, что нули L-функции Дирихле в любом прямоугольнике $0 < \sigma < 1, \ 0 \leq t \leq T$ являются пределами нулей полиномов $Q_n(s)$. При этом в силу (9) нули полиномов $Q_n(s)$ достаточно быстро (с показательной скоростью) стремятся к нулям L-функции.

Важным моментом в вычислительной схеме определения нулей L-функции Дирихле является задача определения степени аппроксимирующего полинома $Q_n(s)$, нули которого в заданном прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 \leq t \leq T$ будут совпадать с нулями L-функции. Здесь эту задачу мы будем решать с привлечением результатов о нулях почти-периодических функций класса Δ.

Обозначим через $N(T, \chi)$ число нулей L-функции Дирихле $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 \leq t \leq T$. В первой главе данного пособия была приведена формула для характера χ по модулю d

$$N(T, \chi) = \frac{\ln T}{2\pi} T + A(x)T + O(\ln T). \tag{10}$$

При этом говорилось о том, что вне полосы $\frac{1}{2} - \varepsilon < \sigma < \frac{1}{2} + \varepsilon$ лежит бесконечно малая часть нулей L-функции.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = Q_n(\frac{1}{2} + it).$$

Эта функция является почти-периодической функцией класса $\Delta = \frac{\ln n}{2}$. Как указано в первой главе, для нулей почти-периодических функций класса Δ имеют место результаты, которые в терминах полинома Дирихле $Q_n(s)$ формулируются следующим образом:

– Все нули полинома $Q_n(s)$ лежат в полосе $-h < \sigma < h$;
– Пусть $N_n(T)$ — число нулей полинома $Q_n(s)$, лежащих в прямоугольнике $-h < \sigma < h,\ 0 \leq t \leq T$.

Тогда имеет место соотношение

$$N_n(T) = \frac{\ln n}{2\pi} T + \omega(T), \tag{11}$$

где $\omega(T)$ — некоторая ограниченная функция.

Пусть $Q_n(s)$ — аппроксимирующий полином, нули которого лежат в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 \leq t \leq T$ и совпадают с нулями L-функции Дирихле. Так как L-функция не имеет нулей при $\sigma \geq 1$, то можно считать, что главная часть нулей $Q_n(s)$ формулы (11) лежит в нашем прямоугольнике. Сравнивая главные части формул (10) и (11), с учётом остаточных членов получаем

$$n \geq [2T]. \tag{12}$$

Последнее условие подтверждается численным экспериментом.

Приведём теперь численный алгоритм определения нулей L-функции Дирихле (1) в заданном прямоугольнике: $0 < \sigma < 1,\ 0 \leq t \leq T$.

а) Определяем вид рациональной дроби (3)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{m=0}^{\infty} \chi(md+k)x^{md+k} = \sum_{k=1}^{d} \chi(k)x^k \sum_{m=0}^{\infty} x^{md} = \frac{\sum_{k=0}^{d} \chi(k)x^k}{1 - x^d} =$$

$$= \frac{P_{d-1}(x)}{1 + 1 + \ldots + x^{d-1}}. \tag{13}$$

б) Определяем коэффициенты c_k разложения функции $g(x)$ по полиномам Чебышёва по формуле (5). При этом предварительно раскладываем рациональную функцию (13) в сумму простейших дробей.

в) Находим коэффициенты $b_k^{(n)}$ полинома $P_n(x)$ вида (6) для $n = [2T] + 1$. При этом полиномы Чебышёва $T_k(x)$ определяются исходя из рекуррентного соотношения:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad T_0 = 1,\ T_1 = x.$$

г) Выпишем полином $Q_n(s)$ вида (8) и найдём комплексные нули этого полинома.

§ 2 Численный эксперимент, связанный с определением нулей L-функции Дирихле.

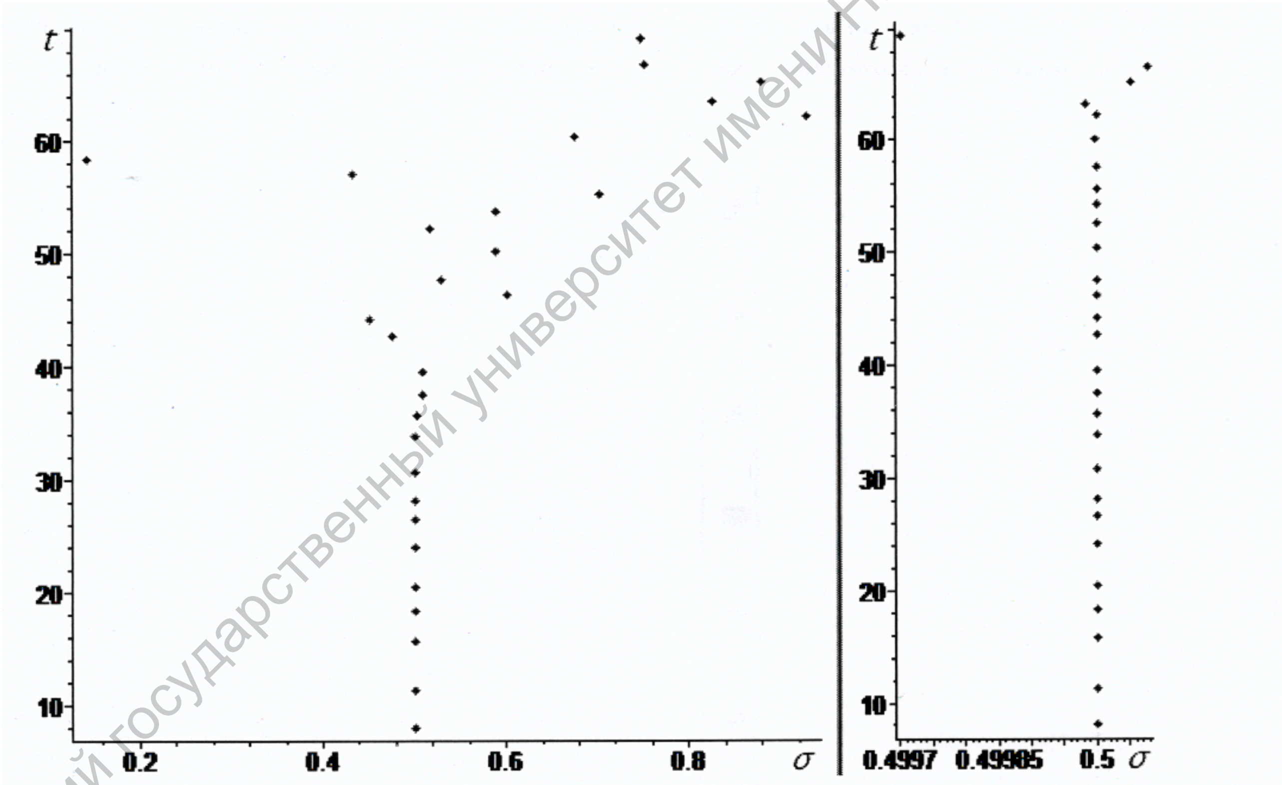
Авторами была разработана программа реализации приведённой выше численной схемы определения нулей L-функции Дирихле. Это программа универсальна для всех L-функций, а именно, работает для любой периодической последовательности: $a_1, a_2, \ldots, a_d$, где сумма $\sum_{k=1}^{d} a_k = 0$. Отметим, что приведённая выше вычислительная последовательность работает для любой такой периодической последовательности.

Проанализируем результаты применения этой программы на отдельных примерах.

Рассмотрим ряд со следующими коэффициентами:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(mod3) \\ 1, & n \equiv 1(mod3) \\ -1, & n \equiv 2(mod3) \end{cases}$$

Нули полинома Дирихле, построенные для указанного ряда, располагаются на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ тем больше, чем выше степень полинома. В силу симметричности нулей, можно ограничиться только верхней полуплоскостью.



На рисунке 1 приведена картина расположения нулей аппроксимирующего полинома 57 степени. На рисунке 2 — нули аппроксимирующего полинома 112 степени.

Аналогичные результаты наблюдаются для ряда с коэффициентами:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(mod5) \\ 1, & n \equiv 1(mod5) \\ 1, & n \equiv 2(mod5) \\ -1, & n \equiv 3(mod5) \\ -1, & n \equiv 4(mod5) \end{cases}$$

и для немультипликативного случая:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(mod5) \\ 1, & n \equiv 1(mod5) \\ 1, & n \equiv 2(mod5) \\ \frac{1}{2}, & n \equiv 3(mod5) \\ -\frac{1}{2}, & n \equiv 4(mod5). \end{cases}$$

§ 3 Аппроксимирующие полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе.

В этом параграфе укажем ещё одну положительную сторону приведённой выше вычислительной схемы в связи с решением задач о поведении L-функций Дирихле в критической полосе. Остановимся здесь на некоторых таких задачах.

Например, известная гипотеза Линделёфа [16] о росте модуля L-функции Дирихле на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ допускает переформулировку в терминах аппроксимирующих полиномов. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть для последовательности полиномов Дирихле $Q_n(s)$, аппроксимирующих в критической полосе L-функцию Дирихле, выполняются оценки вида:*

$$\max_{0 \le t \le \frac{n}{2}} \left| Q_n(\frac{1}{2} + it) \right| \le Cn^{\varepsilon},$$

где ε — произвольное положительное число, а константа C не зависит от n.

Тогда для L-функции Дирихле выполняется утверждение гипотезы Линделёфа.

В связи с теоремой 10 представляет интерес провести серию численных экспериментов, связанных с вычислением величин

$$\max_{0\le t\le \frac{n}{2}} \left|Q_n(\frac{1}{2}+it)\right|.$$

Отдельные вычисления, которые мы здесь не приводим, дают оценки вида

$$\max_{0\le t\le \frac{n}{2}} \left|Q_n(\frac{1}{2}+it)\right| \le C\ln n, \tag{14}$$

где константа C не зависит от n.

Если неравенства (14) будут иметь место для достаточно большой серии экспериментов, то это даёт повод высказать предположение, что для L-функции Дирихле имеет место оценка вида

$$\left|L(\frac{1}{2}+it,\chi)\right| = O(\ln|t|).$$

Далее, в монографии [24] изучалась задача, связанная с распределением значений L-функций Дирихле в критической полосе. В [24] было доказано свойство универсальности L-функций Дирихле.

Автор имеет основания предположить, что привлечение аппроксимирующих полиномов позволит получить более простое, чем в [24] доказательство свойства универсальности L-функций в следующей формулировке:

Рассмотрим отрезок $I = s = \sigma + it_0\ \frac{1}{2} < \sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1 < 1$. Пусть $\varphi(s)$ — функция, регулярная в некоторой окрестности отрезка I и не равная нулю в точках этого отрезка.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое T, что для всех $\sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1$:

$$|\varphi(\sigma + it_0) - L(\sigma + iT)| < \varepsilon.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении остановимся на ряде вопросов, при исследовании которых необходимо провести серию численных экспериментов с привлечением аппроксимирующих полиномов.

Как уже отмечалось в конце третьей главы, такие эксперименты необходимы для того, чтобы высказать предположение о росте модуля L-функции Дирихле на критической полосе как $\ln t$.

В данном пособии уже отмечалось, что приведённая здесь численная схема определения нулей L-функции работает и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами, определяющих целые функции. Поэтому необходимо провести серию экспериментов, в результате которых можно было бы высказать предположения о плотности нулей таких функций в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, о порядке роста их модуля на критической прямой и другие предположения.

Перечисленные вопросы представляют интерес в теории L-функций Дирихле, в частности, в связи с обобщённой гипотезой Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dirichlet P. G. Beweis des Satter, das jede unbegrenze ganzen Zachlen ohne gemeischaft-liehen Faxtor unendlich viele Primzachlen enthaldt. — Abh. Akad. Berlin, 1837.

2. Hardy, Littlewood. Some problems of Partitia numerorum III // Acta Mathematica Bd. — 1922. — P. 44.

3. Спринджук В. Г. Вертикальное распределение нулей дзета-функции и расширенная гипотеза Римана // Acta Arithmetica. — 1975. — С. 317 – 332.

4. Кузнецов В. Н., Полякова О. А. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник; науч.-теор. журн. — 2010. — Т. 11, № 1. — С. 59–69.

5. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М. : И. Л., 1953.

6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М. : Изд-во технико-теоретич. литерат., 1956.

7. Прахар К. Распределение простых чисел. — М. : Мир, 1967.

8. Чудаков Н.Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций. // ДАН СССР, 74.2. — 1956. — С. 193–196.

9. Чудаков Н.Г. Обобщённые характеры. // Междунар. конгресс матем. в Ницце. — 1972. — С. 335.

10. Коротков А.Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определённых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами. // Науч. ведомости Белгородского государственного ун-та. Серия: Математика. Физика., вып. 24, 17. — 2011. — С. 47 – 53.

11. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М. : Наука, 1983.

12. Hamburger H. Uber einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemanneche ζ-Function equivalent sind // Math. Ann. — 1922. — P. 129–140.

13. Кривобок В. В. О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению римановского типа // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат., Вып.1. — 2005. — Т. 7. — С. 13 – 15.

14. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series. // Y. Lond. Math. Soc. — 1936. — Vol. II. — P. 181 – 185.

15. Кузнецов В. Н., Полякова О. А. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами и удовлетворяюх функциональному уравнению типа Римана // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — 2011. — Т. 11, № 3. — С. 21 – 25.

16. Туран П. О новых результатах в аналитической теории чисел. В кн. Проблемы аналитической теории чисел. — М. : Мир, 1975. — С. 118 – 142.

17. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 6. — С. 805 – 812.

18. Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — 2005. — Т. 11, № 3. — С. 47 – 58.

19. Сецинская Е. В. Граничное поведение степенных рядов, отвечающих L-функциям числовых полей : Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Е. В. Сецинская. — Саратов, 2005.

20. Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. Избранные вопросы теории L-функций числовых полей. — 2012.

21. Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. Аппроксимационный подход критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Ис-

следования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — 2005. — № 3. — С. 27 – 32.

22. Титчмарш Е. К. Теория функций. — М. : Наука, 1980.

23. Даугавет Н. К. Введение в теорию приближения функций. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1977.

24. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М. : Физматлит, 1994.