Т.А. Капитонова

МАТЕМАТИКА

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»

Т.А. Капитонова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Саратов
2013

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73
К 20

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского

К 20 **Капитонова, Т.А. Математика**: Учебное пособие / Т.А. Капитонова. – Саратов, 2013. – 89 с.

Учебное пособие разработано для студентов дневного и заочного отделений юридического факультета, обучающихся по специальности 036401 – «Таможенное дело».

Пособие содержит необходимый теоретический материал, представленный в виде лекций, по ряду основных разделов курса высшей математики, образцы решения задач, упражнения для самостоятельной работы студентов, а также варианты контрольных работ.

Лекция 1. Матрицы и определители

1. *Матрицы и операции над ними*

Определение. ***Матрицей А*** размерности $\boldsymbol{m\times n}$ называется прямоугольная таблица, состоящая из $m\times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\,...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}\,a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{i\,j}$ называют ***элементами*** матрицы. Индекс i элемента означает номер строки, а индекс j – номер столбца, в котором стоит элемент $a_{i\,j.}$ Матрица A с элементами $a_{i\,j}$ обозначается также $A = (a_{i\,j})$, $(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots n)$.

Матрица, у которой $m = n$ называется ***квадратной*** матрицей n -го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\,...a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\,\ldots a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}\,a_{n2}...\,a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ образуют ***главную диагональ*** квадратной матрицы, элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1},\ldots,a_{n1}$ – ***побочную диагональ***.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Единичной матрицей E называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали:

$$E = \begin{pmatrix} 1\;0...0 \\ 0\;1...0 \\ .... \\ 0\;0...1 \end{pmatrix}.$$

Нулевой называется матрица, обозначаемая O, все элементы которой равны нулю.

Определение. ***Суммой*** матрицы $A = (a_{i\,j})$ размерности $m\times n$ и матрицы $B = (b_{i\,j})$ размерности $m\times n$ называется матрица $C = (c_{i\,j})$ размерности $m\times n$, где $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$, $(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots n)$.

Определение. ***Произведением*** матрицы $A = (a_{i\,j})$ размерности $m\times n$ на число λ называется матрица $C = (c_{i\,j})$ размерности $m\times n$, где $c_{i\,j} = \lambda\, a_{i\,j}$, $(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots n)$.

Свойства операции сложения и умножения на число.

1. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);
2. $(A + B) + C = A +(B + C)$ (ассоциативность сложения);
3. $A + O = O + A = A$ (существование «нуля»);
4. $A + (– A) = O$ (существование «противоположного» элемента);

5. $1\cdot A = A$ (существование «единицы»;
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);
7. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Определение. ***Произведением*** AB матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m\times p$ и матрицы $B = (b_{ij})$ размерности $p\times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размерности $m\times n$, у которой элемент, стоящий в i–ой строке и j-ом столбце равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i–ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B, то есть $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$, $(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots n)$.

Свойства операции умножения матриц.

1. $A\,B \neq B\,A$;
2. $(AB)C = A(BC)$;
3. $EA = AE = A$;
4. $OA = AO = O$;
5. $(A+B)C = AC + BC$; $A(B+C) = AB + AC$.

Транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица A^T, все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. Перемена местами двух строк (столбцов);
2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется ***эквивалентной*** матрице A(обозначается $A \sim B$).

2. Определители. Свойства определителей

Перестановкой из ***n*** элементов называется любое их расположение в определенном порядке. Число перестановок из n элементов равно $\boldsymbol{n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$ (n факториал).

Говорят, что числа i, j в данной перестановке образуют ***инверсию***, если i стоит раньше j, причем $i > j$.

Перестановка называется ***четной***, если ее символы образуют четное число инверсий, и ***нечетной*** – в противном случае.

Определение. ***Определителем*** квадратной матрицы ***n***-го порядка A называется число, обозначаемое $|A| = detA = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$, и равное алгебраической сумме ***n!*** слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n элементов, взятых ровно по одному из каждой строки и каждого столбца, причем произведение берется со знаком «+» или «–» в зависимости от того, является четной или нечетной перестановка номеров столбцов.

Определитель 2-го порядка задается равенством $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$

Определитель 3-го порядка задается равенством $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} +$

$$+\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}. \qquad (1)$$

Правило треугольника вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (1) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (1) со знаком «–», определяются аналогично, но относительно побочной диагонали.

Пример 1. $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot 7 - (-5)\cdot(-3) = 28 - 15 = 13.$

Пример 2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot(-3) + (-2)\cdot(-5)\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot(-2) - (-4)\cdot(-1)\cdot 5 -$

$-(-2)\cdot 4\cdot(-3) - 3\cdot(-5)\cdot(-2) = 9 + 50 + 32 - 20 - 24 - 30 = 17.$

Свойства определителей

1. $\det A = \det A^T$, то есть величина определителя не изменится, если в нем строки заменить столбцами.

2. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то знак определителя изменится на противоположный.

3. Общий множитель элементов некоторой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

4. Если в определителе строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

5. Если в определителе две строки (столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен нулю.

6. Если в определителе все элементы некоторой строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то данный определитель равен сумме двух определителей, отличающихся от данного лишь элементами указанной строки (столбца), при этом в одном из определителей она (он) состоит из первых слагаемых, а в другом – из вторых.

7. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) определителя, умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится.

Определение. Матрица, определитель которой равен нулю, называется ***вырожденной***; матрица, определитель которой не равен нулю, называется ***невырожденной***.

Определение. ***Минором*** элемента $a_{i\,j}$ определителя n-го порядка называется определитель (n-1)–го порядка, который обозначается $M_{i\ j}$ и получается из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Определение. ***Алгебраическим дополнением*** элемента $a_{i\,j}$ называется число, обозначаемое A_{ij} и вычисляемое по формуле $A_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}$, где $M_{i\,j}$ – минор элемента $a_{i\,j}$.

Теорема о разложении. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

В частности, для определителя третьего порядка теорема о разложении по первой строке имеет вид: $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$.

3. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для матрицы A, если выполняется условие $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Определение. ***Присоединенной*** матрицей к квадратной матрице $A = (a_{i\,j})$ называется матрица $\tilde{A} = (A_{i\ j})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений $A_{i\,j}$ к элементам $a_{i\,j}$.

Теорема. Если квадратная матрица A – невырожденная (то есть $det\,A \neq 0$), то $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$.

Пример 3. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Определитель этой матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -\ 2.$

Так как $|A| = -\ 2 \neq 0$, то матрица A – невырожденная и, следовательно, существует обратная ей матрица. Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = 4$, $A_{21} = -\,2$,

$A_{12} = -\,3$, $A_{22} = 1$.

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = (-1/2)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, то есть покажем, что $A^{-1}A = E$.

$$A^{-1}A = (-1/2)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-1/2)\begin{pmatrix} 4-6 & 8-8 \\ -3+3 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Итак, матрица, обратная данной матрице A равна $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Лекция 2. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Система m линейных уравнений с ***n*** неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

где числа a_{ij} ($i=1,2,\ldots m$; $j=1,2,\ldots n$) называются ***коэффициентами,*** а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ***свободными членами.***

Определение. ***Решением*** системы (2) называется упорядоченный набор n чисел ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$), которые при подстановке вместо соответствующих неизвестных обращают все уравнения системы в верные числовые равенства.

Определение. Система (2) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение и ***несовместной,*** если она не имеет решений.

Определение. Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если имеет бесконечное множество решений.

Определение. Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются ***эквивалентными***, если множества всех решений этих систем совпадают.

Определение. Если в системе (2) все свободные члены равны нулю, то она называется ***однородной***, в противном случае она называется ***неоднородной***.

Однородная система всегда совместна, так как $(0,0,\ldots 0)$ – есть решение любой однородной системы. Это решение называется ***нулевым***. Все остальные решения системы, если они существуют, называются ***ненулевыми***.

2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Данный метод применяется для случая, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m = n$).

Теорема. Если определитель D матрицы системы A не равен нулю, то система определенна и ее решение задается ***формулой Крамера***:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = 1,2,\ldots n; \qquad (3)$$

где D_k – определитель, получающийся из D заменой k –го столбца на столбец свободных членов.

Если $D = 0$, но $D_k \neq 0$ хотя бы для одного значения k, то система несовместна.

Если $D = D_k = 0$ для всех значений k, то система неопределенна.

Пример 4. Решить методом Крамера систему: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$

Решение. $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31$; $D_1 = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496$; $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217$.

По формулам Крамера (3) находим: $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$ = 496/31=16, $x_2 = \dfrac{D_2}{D}$ = 217/31 = 7.
Таким образом, система имеет единственное решение (16; 7).

3. *Метод Гаусса решения систем линейных уравнений*

Этот метод применим к любым системам линейных уравнений вида (2). Следующие преобразования над линейными системами (***элементарные преобразования***) приводят их к эквивалентным системам:

1) перестановка уравнений в системе;
2) умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
3) прибавление к обеим частям уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число;
4) удаление уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом.

С помощью элементарных преобразований в системе (2) последовательно исключаются неизвестные до тех пор, пока система не преобразуется к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (4)$$

где $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2,\ldots r)$.

Процесс преобразования (2) к системе (4) называется ***прямым ходом*** метода Гаусса. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются ***базисными***, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – ***свободными.***

Если $r = n$, то свободные переменные отсутствуют и система имеет единственное решение. Если $r < n$, то, придавая свободным переменным произвольные значения, можно найти любое из бесконечного множества решений системы. Если в процессе преобразований получится уравнение вида $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b$, где $b \neq 0$, то, так как это уравнение не имеет решений, то и система уравнений несовместна.

Из системы (4) находится решение, и процесс его нахождения называется ***обратным ходом*** метода Гаусса.

Пример 5. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

Решение. Поделим обе части первого уравнения на *2*, получим систему

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение полученной системы на *3* и сложим со вторым, а затем умножим первое уравнение на *(-4)* и сложим с третьим. В результате получим систему, в которой второе и третье уравнения не содержат переменную *x*:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ 2y - 4z = -10, \\ 5y - 7z = -19. \end{cases}$$

Теперь проделаем аналогичные преобразования со вторым и третьим уравнениями системы. Разделим второе уравнение на *2*, получим:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ 5y - 7z = -19. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на *(-5)* и прибавим к третьему уравнению. Завершив прямой ход метода Гаусса, приходим к системе

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ 3z = 6. \end{cases}$$

В результате обратного хода найдем решение системы

$$\begin{cases} z = 2, \\ y = -5 + 2 \cdot 2 = -1, \\ x = 5 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -1. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет единственное решение (–1; –1; 2).

Замечание. Так как при решении линейных систем преобразования производятся только над ее коэффициентами, то можно вместо того, чтобы преобразовывать систему линейных уравнений, производить действия над расширенной матрицей системы.

4 Матричный способ решения систем линейных уравнений

Систему (2) можно записать в матричной форме: $A \cdot X = B$ (5)

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

A – ***матрица*** системы; *X* – ***столбец*** (или ***вектор-столбец***) неизвестных; *B* – ***столбец*** свободных членов.

Определение. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называется ***расширенной матрицей*** системы (2).

Теорема. Если D – определитель матрицы A не равен нулю, то система (5) является определенной и ее решение задается формулой: $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.

Доказательство. По условию $D = det\ A \neq 0$, то есть матрица A невырожденная. Умножим обе части (5) на A^{-1} слева, получим: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$; $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$; $EX = A^{-1}B$; $X = A^{-1}B$. *Теорема доказана.*

Пример 6. Решить матричным методом систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$

Решение. Матрица, обратная невырожденной матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (так как $|A| = -2 \neq 0$), найдена нами ранее (см. *пример 3*).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}; \ ; \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 2 + 1\cdot 8 \\ (3/2)\cdot 2 + (-1/2)\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система имеет единственное решение (4; –1).

Упражнения.

1. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

a) $\begin{cases} 7x - 6y = 5, \\ 8x - 7y = -10. \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} -x + 3y + 5z = 1, \\ 3x + y + 3z = 2, \\ 5x + 3y - z = -3. \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$

2. Решить системы методом Гаусса:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 4x + 5y - 6z = 0, \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 20, \\ 3x + 4y - 2z = -11, \\ 4x + 2y + 3z = 9. \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 24. \end{cases}$

3. Решить матричным способом системы уравнений:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$

Лекция 3. Векторная алгебра

1. Вектор на плоскости и в пространстве

Определение. ***Связанным вектором*** на плоскости или в пространстве называется упорядоченная пара точек, первая из которых называется началом, а вторая – концом вектора.

Обозначают связанный вектор с началом в точке A и концом в точке B символом $\overrightarrow{AB}$.

Длина отрезка AB – неотрицательное число – называется ***длиной*** вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Каждый вектор, кроме числовой, несет информацию о направлении луча AB с началом в точке A.

Если два связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены, то пишут $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, а если противоположно направлены, то $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

Определение. Связанный вектор, у которого начало и конец совпадают, то есть, это – одна точка, называется ***нулевым*** **с**вязанным вектором (вектор нулевой длины и без направления).

Определение. Два ненулевых связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***конгруэнтными,*** если они одинаковой длины и одинаково направлены, то есть $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$. Обозначают $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{CD}$.

Свойства конгруэнтных векторов.

1. $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{AB}$ (рефлексивность).
2. Если $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD}\equiv\overrightarrow{AB}$ (симметричность).
3. Если $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD}\equiv\overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{EF}$ (транзитивность).

Все множество связанных векторов разбивается на непересекающиеся между собой подмножества, состоящие из конгруэнтных друг другу связанных векторов. Эти подмножества образуют ***классы*** конгруэнтных векторов.

Определение. Класс конгруэнтных между собой связанных векторов называется ***свободным вектором*** (или ***вектором***) и обозачается $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,…. Говорят: связанный вектор $\overrightarrow{AB}$ – представитель вектора $\vec{a}$.

Определение. ***Длиной*** вектора $\vec{a}$ называется длина любого его представителя: $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$. ***Направлением*** вектора $\vec{a}$ называется направление любого его представителя.

Класс нулевых связанных векторов – все точки плоскости или пространства – есть ***нулевой вектор*** $\vec{O}$.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ***равны*** ($\vec{a}=\vec{b}$), если $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Определение. Если $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то векторы называют ***противоположными.***

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют ***коллинеарными,*** если они одинаково или противоположно направлены. Обозначают $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Определение. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,… называют ***компланарными,*** если их представители, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости. Обозначают $\boldsymbol{Cp}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Линейное пространство свободных векторов

Определение. Пусть $\overrightarrow{AB}$ есть представитель вектора $\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}$ – представитель вектора $\vec{b}$, тогда вектор, определяемый представителем $\overrightarrow{AC}$, называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$. (Это правило называется ***правилом треугольника***).

Для нахождения суммы возможно применение другого правила – ***правила параллелограмма.***

Определение. Сумму вектора $\vec{a}$ и противоположного для $\vec{b}$ вектора $(-\vec{b})$ называют ***разностью*** векторов и записывают $\vec{a} - \vec{b}$, то есть $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Определение. ***Произведением*** ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число $\lambda \neq 0$ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$ в случае $\lambda > 0$ и противоположно – в случае $\lambda < 0$. Если $\vec{a} = \vec{O}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{O}$.

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3) $\vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{O}$;
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$;
5) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$;
6) $(\alpha\beta)\cdot\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$;
7) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
8) $\beta(\vec{a} + \vec{b}) = \beta\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Множество всех векторов с операциями сложения и умножения на скаляр, обладающими свойствами 1) – 8), называется ***векторным пространством*** (или ***линейным пространством***).

Определение. Вектор $\vec{c}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{b_1}, \overline{b_2} ..., \overline{b_k}$, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, что выполняется равенство $\vec{c} = \lambda_1\cdot\overline{b_1} + \lambda_2\cdot\overline{b_2} + ... + \lambda_k\cdot\overline{b_k}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ называют ***коэффициентами*** линейной комбинации.

Определение. Векторы $\overline{b_1}, \overline{b_2} ..., \overline{b_k}$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и для которых выполняется равенство $\lambda_1\cdot\overline{b_1} + \lambda_2\cdot\overline{b_2} + ... + \lambda_k\cdot\overline{b_k} = \vec{O}$. Напротив, если из последнего равенства следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, то векторы $\overline{b_1}, \overline{b_2} ..., \overline{b_k}$ называются ***линейно независимыми.***

Теорема (признак линейной зависимости векторов). Векторы $\overline{b_1}, \overline{b_2} ..., \overline{b_k}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинации остальных.

Теорема (признак коллинеарности векторов). Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, то есть если существует число λ, такое, что $\vec{a} = \lambda\cdot\vec{b}$.

Теорема (о разложении вектора в плоскости). Всякий вектор в плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов, причем коэффициенты линейной комбинации определяются однозначно: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2}$. (6)

Теорема (признак компланарности векторов). Три ненулевых вектора в пространстве компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Теорема (о разложении вектора в пространстве). Всякий вектор в пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов, причем коэффициенты линейной комбинации определяются однозначно: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \alpha_3 \cdot \overline{e_3}$. (7)

3. Базис векторов. Координаты вектора

Определение. ***Базисом на плоскости*** называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов. ***Базисом в пространстве*** называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. ***Базис прямой*** состоит из одного произвольного вектора.

Определение. ***Координатами вектора относительно*** некоторого ***базиса*** (плоскости или пространства) называется упорядоченный набор коэффициентов разложения (соответственно (6) или (7)) этого вектора по базису.

Теорема. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $c_i = a_i \pm b_i$ ($i = 1,2$ для плоскости; $i = 1,2,3$ для пространства).

Теорема. Вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ тогда и только тогда, когда $b_i = \lambda \cdot a_i$ ($i = 1,2$ для плоскости; $i = 1,2,3$ для пространства).

Теорема (признак коллинеарности векторов в координатах). Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны: $b_i = \lambda \cdot a_i \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ – для плоскости; $b_i = \lambda \cdot a_i \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$ – для пространства.

Теорема (признак компланарности векторов в координатах). Три вектора в пространстве компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координатных столбцов равен нулю: пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, тогда $Cp(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

4. Скалярное произведение векторов

Определение. ***Проекцией вектора*** $\bar{a} = \overline{AB}$ ***на ось*** l (обозначается $np_l \bar{a}$) называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$ (A_1 – проекция точки A на ось l, B_1 – проекция точки B на ось l), взятое со знаком «+», если направление $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением ось l, и со знаком «–», – в противном случае.

Свойства проекции вектора на ось.

1) $np_l \bar{a} = |\vec{a}| \cdot cos\ \varphi$, где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси Ox.
2) $np_l(\bar{a}+\bar{b}) = np_l \bar{a} + np_l \bar{b}$.
3) $np_l(\lambda \bar{a}) = \lambda \cdot np_l \bar{a}$.

Определение. Базис векторов на плоскости или в пространстве называется ***ортонормированным базисом***, если он состоит из взаимно перпендикулярных векторов единичной длины.

Обозначение: $(\bar{i},\ \bar{j})$ – для плоскости; $(\bar{i}, \bar{j},\ \bar{k})$ – для пространства.

Определение. ***Координатами вектора*** $\vec{a}$ называются проекции этого вектора на оси Ox, Oy, Oz соответственно. Обозначение: $\bar{a}(a_x\ , a_y)$ или $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j}$ – для плоскости; $\bar{a}(a_x\ , a_y\ , a_z)$ или $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ – для пространства.

Определение. ***Скалярным произведением*** (обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$, если $\vec{a} \neq \vec{O}, \vec{b} \neq \vec{O}$;
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} = \vec{O}, \vec{b} = \vec{O}$.

Определение. Скалярное произведение вектора на себя называется ***скалярным квадратом вектора*** и обозначается $\bar{a}^2$, то есть $\vec{a} \cdot \vec{a} = \bar{a}^2$.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$.
4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\ (\vec{a} \neq \vec{O}, \vec{b} \neq \vec{O}) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
5) Скалярное произведение двух ненулевых векторов положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда угол между векторами острый (тупой).
6) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
7) Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Применение скалярного произведения:

- для вычисление длины вектора $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;
- для вычисление угла между векторами $cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$;
- для выражения условия перпендикулярности векторов.

Пример 7. Даны векторы $\bar{a}(4,\ 9,\ 2)$ и $\vec{b}(2,\ 3,\ 7)$. Найти их скалярное произведение.

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 49$.

5. *Векторное произведение векторов*

Определение. Тройка векторов $\vec a, \vec b, \vec c$ называется ***правой,*** если для наблюдателя с конца $\vec c$ кратчайший поворот от $\vec a$ к $\vec b$ происходит в положительном направлении, то есть против хода часовой стрелки; в противном случае тройка векторов называется ***левой.***

Определение. ***Векторным произведением*** вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$ называется вектор $\vec c$**,** удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $|\vec c| = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot sin(\vec a \hat{} \vec b)$;

2) $\vec c \perp \vec a$, $\vec c \perp \vec b$;

3) тройка векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ – правая.

Обозначается $\vec a \times \vec b$ или $[\vec a, \vec b]$.

Свойства векторного произведения:

1) Векторное произведение двух ненуливых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны;

2) $[\vec a, \vec b] = -[\vec b, \vec a]$;

3) $[\lambda\vec a, \vec b] = \lambda\cdot[\vec a, \vec b]$ и $[\vec a, \lambda\vec b] = \lambda\cdot[\vec a, \vec b]$;

4) $[\vec a + \vec b, \vec c] = [\vec a, \vec c] + [\vec b, \vec c]$;

5) Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec a$ и $\vec b$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах;

6) Пусть векторы $\vec a$ и $\vec b$ заданы своими координатами: $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec b(b_x, b_y, b_z)$,

тогда: $$[\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\bar i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\bar j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\bar k;$$

7) $[\bar i, \bar j] = \bar k$, $[\bar j, \bar k] = \bar i$, $[\bar k, \bar i] = \bar j$.

6. *Смешанное произведение векторов*

Определение. ***Смешанным произведением*** векторов $\vec a, \vec b, \vec c$ (обозначается $\vec a\,\vec b\,\vec c$) называется их векторно-скалярное произведение, то есть число, равное скалярному произведению векторного произведения первых двух сомножителей $[\vec a, \vec b]$ на третий $\vec c$: $\vec a\,\vec b\,\vec c = [\vec a, \vec b]\cdot\vec c$.

Свойства смешанного произведения.

1) Абсолютная величина смешанного произведения трех некомпланарных векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

2) Пусть векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ заданы своими координатами: $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec b(b_x, b_y, b_z)$, $\vec c(c_x, c_y, c_z)$, тогда $\vec a\,\vec b\,\vec c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

3) Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю: $\vec a\,\vec b\,\vec c = 0 \Leftrightarrow Cp(\vec a, \vec b, \vec c)$.

Контрольная работа № 1

Задание 1. Вычислить определитель:

$$\textbf{\textit{а)}}\ \begin{vmatrix} N & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = ? \qquad \textbf{\textit{б)}}\ \begin{vmatrix} N & 2 & 3 \\ N+1 & 6 & 9 \\ -7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

Задание 2. Решить систему: а) методом Гаусса; б) методом Крамера; в) матричным способом.

$$1)\begin{cases} Nx + 2Ny + Nz = 4N, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 3x + 2Ny = 7, \\ Nx - 5y = 40. \end{cases}$$

Задание 3. Найти скалярное произведение векторов 1) $\overline{a} = (2; N; -1); \overline{b} = (5; 7; N+1)$. 2) $\overline{a} = (1; 3; -2N); \overline{b} = (0; N; -N)$. Вычислить косинус угла между ними.

Задание 4. Даны векторы:
$\overline{a} = (N; -5; 6), \overline{b} = (4; N; -3), \overline{c} = (-3; 6; N), \overline{d} = (-4; N+1; 1)$.
Вычислить следующие выражения:
1) $(\overline{a}\overline{b}) \cdot \overline{c}$.
2) $(\overline{a}\overline{b}) \cdot (\overline{c}\overline{d})$.
3) $3\overline{a}\overline{b} - 4\overline{b}\overline{c} - 2\overline{a}\overline{c}$.

Задание 5. Найти произведение матриц ***AB*** и ***BA*** (если это возможно)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} N & 5 & -1 \\ 2 & -2 & N \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ N & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Найти обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$ для матрицы***:***

$$\textit{a)}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} N & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\textit{b)}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} N & 2 & 3 \\ 2N & 6 & 9 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Примечание. N – номер варианта (сообщается преподавателем).

Лекция 4. Аналитическая геометрия

1. Прямоугольная система координат на плоскости. Уравнение линии на плоскости

Две взаимно перпендикулярные числовые оси *Ох* и *Оу*, имеющие общее начало *О* и одинаковую масштабную единицу, образуют ***прямоугольную (декартову) систему координат на плоскости*** *Оху*.

Любая точка *М* плоскости в заданной прямоугольной системе координат *Оху* задается упорядоченной парой действительных чисел (*х*,*у*): *М*(*х*,*у*).

Расстояние d между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости определяется формулой $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Координаты (*х*,*у*) точки *М*, ***делящей в заданном отношении*** λ ($\lambda = \dfrac{|AM|}{|MB|}$) ***отрезок*** *АВ* (где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$), определяются по формулам: $x = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}$. В частности, при $\lambda = 1$ (точка *М* делит отрезок *АВ* пополам), получаем формулы для определения координат середины отрезка: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Определение. ***Уравнением линии*** на плоскости *Оху* называется уравнение ***F(x, y) = 0***, которому удовлетворяют координаты *х* и *у* каждой точки этой линии и только они. Переменные ***х*** и ***у*** в уравнении линии называются ***текущими координатами*** точек линии.

Понятие уравнения линии позволяет сводить геометрические задачи к алгебраическим. Например, задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$

2. Прямая линия на плоскости. Различные виды уравнения прямой

Теорема. Каждая прямая на плоскости *Оху* определяется уравнением первой степени ***A x + B y + C = 0*** (8) и обратно, уравнение (8) при произвольных коэффициентах *А*, *В*, *С* (*А* и *В* не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую на плоскости.

1. Уравнение (8), то есть уравнение вида ***A x + B y + C = 0***, где *А*, *В*, *С* – постоянные коэффициенты, причем *А* и *В* одновременно не обращаются в нуль ($A^2 + B^2 \neq 0$), называется ***общим уравнением прямой***.

Частные случаи уравнения (8):

- ***A x + B y = 0***, (***C = 0***) – прямая проходит через начало координат;
- ***A x + C = 0***, (***B = 0***) – прямая параллельна оси *Oy;*
- ***B y + C = 0***, (*A* = ***0***) – прямая параллельна оси *Ox;*
- ***A x = 0***, (*B* = ***C = 0***) – прямая совпадает с осью *Oy;*
- ***B y = 0***, (*A* = ***C = 0***) – прямая совпадает с осью *Ox;*

2. ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом*** имеет вид: $\boldsymbol{y = k\,x + b}$, где $\boldsymbol{k = tg\,\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – угол, который прямая образует с положительным направлением оси *Ox*; **b** – ордината точки пересечения прямой с осью *Oy*.

3. ***Уравнение прямой «в отрезках»*** имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где ***a*** и ***b*** – длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях *Ox* и *Oy* соответственно.

4. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $\boldsymbol{M(x_0,\ y_0)}$***, с данным угловым коэффициентом k:*** $\boldsymbol{y - y_0 = k\,(x - x_0)}$, где $\boldsymbol{k = tg\,\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – угол, который прямая образует с положительным направлением оси *Ox*.

5. ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*** $\boldsymbol{A(x_1,\ y_1)}$ и $\boldsymbol{B(x_2,\ y_2)}$, (где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$) имеет вид: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

(Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой имеет вид: $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$).

6. ***Нормальное уравнение прямой*** имеет вид: $\boldsymbol{x\,Cos\beta + y\,Sin\beta - p = 0}$, где ***p*** – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую; $\boldsymbol{\beta}$ – угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси *Ox*.

Пример 8. Прямая, проходящая через точку ***A***(5;3), образует с осью *Ox* угол 135º. Составить уравнение прямой.

Решение. Используем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y=k\,x+b$. В нашем случае $k=tg135^o=-1$. По условию, прямая проходит через точку ***A***(5;3), поэтому её координаты $x=5$ и $y=3$ удовлетворяют уравнению: $3=(-1)\cdot 5+b$, откуда $b=8$. Уравнение прямой имеет вид $y=-x+8$ или $x+y-8=0$.

Пример 9. Общее уравнение прямой $2x+3y-6=0$ привести к уравнению «в отрезках».

Решение. Запишем уравнение в виде $2x+3y=6$ и разделим обе части на 6, получим $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1-$ искомое уравнение.

3. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть даны две прямые L_1: $y = k_1x + b_1$ *и* L_2: $y = k_2x + b_2$. Под ***углом*** между прямыми в плоскости понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми: $tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие параллельности прямых: $(L_1 \parallel L_2) \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $(L_1 \perp L_2) \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Если L_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* L_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

$(L_1 \parallel L_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$; $(L_1 \perp L_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Для нахождения общих точек прямых L_1 и L_2 необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$$

При этом:

- если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то имеется единственная точка пересечения прямых;
- если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то $L_1 \parallel L_2$ (нет точек пересечения);
- если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают (имеют бесконечное множество общих точек).

Определение. ***Расстоянием d*** от точки $\boldsymbol{M(x_0, y_0)}$ до прямой $\boldsymbol{A\,x+B\,y + C = 0}$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Расстояние d определяется по формуле $d = \left|\frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$.

Пример 10. В треугольнике с вершинами $A(-2;-2)$, $B(2;1)$ и $C(-8;6)$ найти длину высоты, проведенной из вершины A.

Решение. Задача сводится к определению расстояния от точки A до прямой BC. Запишем уравнение BC, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{y-1}{6-1} = \frac{x-2}{-8-2}$ или $x + 2y - 4 = 0$. Искомое расстояние d от точки $A(-2;-2)$ до прямой BC равно $d = \left|\frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) - 4}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\right| = 2\sqrt{5}$.

4. *Линии (кривые) второго порядка: эллипс, гипербола, парабола*

Линии, определяемые уравнением второй степени относительно переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то есть $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$, (9)
где A, B, C, D, E, F – постоянные коэффициенты, причем A, B и C одновременно не обращаются в нуль $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$, называются ***кривыми второго порядка***.

<u>Эллипс</u>.

Определение. ***Эллипсом*** называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых ***фокусами,***есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Каноническое (простейшее) ***уравнение эллипса*** имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (10)

где ***a – большая полуось, b – малая полуось*** эллипса. ***Фокусы***: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где $2c$ – расстояние между фокусами, причем $c^2 = a^2 - b^2$. ***Вершины*** эллипса – точки $A(a;0)$, $B(0;b)$, $C(-a;0)$, $D(0;-b)$. Точка $O(0;0)$ – ***центр*** эллипса. Расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки $M(x; y)$ эллипса до его фокусов называются ***фокальными радиусами*** точки M.

Введем величину ε, характеризующую форму эллипса.

Определение. ***Эксцентриситетом*** $\boldsymbol{\varepsilon}$ эллипса называется отношение фокального расстояния $2c$ к длине $2a$ его большой оси: $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

($\boldsymbol{\varepsilon < 1}$, так как $\boldsymbol{c < a}$).

Замечание 1. Если $a=b=r$, то уравнение (10) примет вид: $x^2 + y^2 = r^2$. Это уравнение окружности с центром в начале координат $O(0;0)$ радиуса r.

Определение. Уравнение окружности с центром в точке $C(a;b)$ радиуса r имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Замечание 2 (геометрическое истолкование эксцентриситета). Эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \text{отсюда } \frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

При очень малом ε числа a и b почти равны, то есть эллипс близок к окружности. Если же ε близко к единице, то число b мало по сравнению с числом a и эллипс сильно вытянут вдоль большой оси.

Пример 11. Определить координаты центра и радиус окружности, заданной общим уравнением $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Группируем слагаемые, содержащие x и y, в левой части уравнения, дополняя выражения в полученных скобках до полного квадрата: $(x^2+4x)+(y^2-2y)+1 = (x^2+4x+4-4)+(y^2-2y+1-1)+1 = (x+2)^2+(y-1)^2-4-1+1=$ $= (x+2)^2+(y-1)^2-4$. Данное уравнение примет вид: $(x+2)^2+(y-1)^2-4=0$ или $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ – уравнение окружности с центром в точке $C(-2;1)$ радиуса $r=2$.

Пример 12. Найти полуоси, вершины, фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 - 225=0$.

Решение. Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого перенесем свободный член в правую часть и разделим на него обе части уравнения. В результате получим: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Сравнивая полученное уравнение с (10), находим $a=5$, $b=3$. Вершины: $A(5;0)$, $B(0;3)$, $C(-5;0)$, $D(0;-3)$. Далее находим $c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, то есть $c=4$. Фокусы: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

Гипербола.

Определение. ***Гиперболой*** называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, (11)

где ***a – действительная, b – мнимая полуоси*** гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ называются соответственно ***действительной*** **и** ***мнимой осями*** гиперболы. ***Фокусы***: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где $2c$ – расстояние между фокусами, причем $c^2 = a^2 + b^2$. ***Вершины*** гиперболы – точки $A(a;0)$, $B(-a;0)$. Точка $O(0;0)$ – ***центр*** гиперболы. Расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки $M(x;y)$ гиперболы до его фокусов называются ***фокальными радиусами*** точки M.

Определение. ***Эксцентриситетом ε*** гиперболы называется отношение фокального расстояния $2c$ к длине $2a$ его действительной оси: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$ (***ε > 1,*** так как ***c > a***).

Определение. Прямая линия называется ***асимптотой*** для кривой, если расстояние от точки M, лежащей на кривой, до прямой стремится к нулю при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Гипербола, задаваемая уравнением (11), имеет две асимптоты: $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$. Ox и Oy – оси симметрии гиперболы.

Определение. Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется ***равносторонней***, и ее каноническое уравнение имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

Для равносторонней гиперболы эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Парабола.

Определение. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой ***фокусом***, и от данной прямой, называемой ***директрисой***.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус перпендикулярно директрисе, и будем считать ее положительным направлением – направление от директрисы к фокусу; начало координат находится посередине между фокусом и директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px,$ (12)
где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы L, называется ***параметром*** параболы.

Фокус – $F\,(p/2;0)$; точка $O(0;0)$ – ***вершина*** параболы; ось Ox – ***ось симметрии*** параболы; ***уравнение директрисы*** L: $x = -p/2$.

5. Плоскость в пространстве

Три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy, Oz, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу, образуют ***прямоугольную (декартову) систему координат в пространстве*** $Oxyz$.

Любая точка M пространства в заданной прямоугольной системе координат $Oxyz$ задается упорядоченной тройкой действительных чисел $(x; y; z)$: $M(x; y; z)$; здесь число x – ***абсцисса***, y – ***ордината***, z – ***аппликата*** точки M.

Расстояние d между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ пространства определяется формулой $\mathbf{d} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Определение. ***Уравнением поверхности в пространстве*** $Oxyz$ называется уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой поверхности и только они.

Кривую (***линию***) ***в пространстве*** можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей: тогда она задается системой двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

В пространстве $Oxyz$ уравнение первой степени относительно x, y, z: $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0,$ (13), где A, B, C, D – постоянные коэффициенты, причем A, B и C одновременно не обращаются в нуль, определяет ***плоскость.*** Уравнение (13) – ***общее уравнением плоскости***.

Частные случаи уравнения (13):

- $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z = 0$, $(D = 0)$ – плоскость проходит через начало координат;
- $A x + B y + D = 0$, $(C = 0)$ – плоскость параллельна оси Oz;
- $A x + C z + D = 0$, $(B = 0)$ – плоскость параллельна оси Oy;
- $B y + C z + D = 0$, $(A = 0)$ – плоскость параллельна оси Ox;
- $A\cdot x + B\cdot y = 0$, $(D = C = 0)$ – плоскость проходит через ось Oz;
- $B\cdot y + C\cdot z = 0$, $(D = A = 0)$ – плоскость проходит через ось Ox;
- $A\cdot x + C\cdot z = 0$, $(D = B = 0)$ – плоскость проходит через ось Oy;
- $A x+ D = 0$, $(B=C= 0)$ – плоскость параллельна координатной плоскости Oyz;
- $By+ D = 0$, $(A=C= 0)$ – плоскость параллельна координатной плоскости Oxz;
- $C z + D = 0$, $(A=B=0)$ – плоскость параллельна координатной плоскости Oxy;
- $B y = 0$, $(A=C=D=0)$ – плоскость совпадает с координатной плоскостью Oxz;
- $A x = 0$, $(B=C=D=0)$ – плоскость совпадает с координатной плоскостью Oyz;
- $C z = 0$, $(A=B=D=0)$ – плоскость совпадает с координатной плоскостью Oxy.

Различные виды уравнения плоскости.

1. $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$ – общее уравнение плоскости.

Вектор $\bar{n}(A; B; C)$ – ***нормаль*** к плоскости (перпендикулярен плоскости).

2. $A (x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – ***уравнение плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n}(A; B; C)$.

3. $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$ – ***уравнение плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***параллельно векторам*** $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Векторы $\bar{a}$ и $\vec{b}$ – ***направляющие векторы*** плоскости.

4. ***Уравнение плоскости в отрезках***: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где ***a***, ***b***, ***c*** – отрезки, отсекаемые плоскостью по осям Ox, Oy и Oz соответственно.

5. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ – ***уравнение плоскости, проходящей через три точки*** $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

6. Прямая в пространстве. Различные виды уравнения прямой

Прямая в пространстве рассматривается как линия пересечения двух плоскостей.

1. ***Общее уравнение прямой:*** $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$

2. ***Каноническое уравнение прямой:*** $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно направляющему вектору $\bar{a}(a_x,\ a_y,\ a_z)$.

3. ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

<u>Взаимное расположение прямых в пространстве.</u>

Пусть даны две прямые L_1: $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ и L_2: $\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}$.

Возможны случаи: 1). Пусть L_1 пересекается с L_2. Под ***углом α*** между прямыми понимают угол между направляющими векторами $\bar{a}(a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\vec{b}(b_x,\ b_y,\ b_z)$. Угол определяется по формуле Cos α = $cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

2). $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow a_x b_x+ a_y b_y+ a_z b_z= 0.$

3). $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$.

4). Пусть L_1 и L_2 скрещивающиеся: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)\in L_1$; $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)\in L_2$.

Тогда $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \neq 0.$

7. *Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве*

Пусть даны плоскость P: $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая L: $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$.

Возможны случаи:

1). Прямая L и плоскость P пересекаются. ***Угол*** между прямой L и плоскостью P определяется по формуле

$$Sin\,(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{|Aa_x+Ba_y+Ca_z|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2). $L \perp P \Leftrightarrow \frac{A}{a_x}=\frac{B}{a_y}=\frac{C}{a_z}$ (условие перпендикулярности прямой и плоскости).

3). $L \parallel P \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_x+Ba_y+Ca_z=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0; \end{cases}$ (условие параллельности прямой и плоскости), где точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in L$.

4). $L\subset P \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_x+Ba_y+Ca_z=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0; \end{cases}$ (условие, при котором прямая лежит в плоскости).

Лекция 5. Функции и пределы

1. Понятие множества

Под ***множеством*** понимается совокупность каких-либо объектов произвольной природы, обладающих общим признаком – ***характеристическим свойством.***

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами.*** Множества обозначаются большими, а их элементы – малыми буквами. Если элемент принадлежит множеству, то пишут $x \in X$; если не принадлежит, то $x \notin X$. Запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Множество Y, все элементы которого принадлежат множеству X, называют ***подмножеством*** множества X и обозначают $Y \subset X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством и обозначается символом Ǿ. Пустое множество является подмножеством любого множества.

<u>Определение</u>. Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то множества Y и X, называются ***равными*** и пишут $X = Y$.

<u>Определение</u>. ***Пересечением*** двух множеств X и Y называется множество, обозначаемое $X \cap Y$, состоящее из элементов, принадлежащих X и Y одновременно, то есть $X \cap Y = \{x : x \in X, x \in Y\}$.

<u>Определение</u>. ***Объединением*** двух множеств X и Y называется множество, обозначаемое $X \cup Y$, состоящее из элементов, принадлежащих X или Y, то есть $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

<u>Определение</u>. Множество, элементы которого принадлежат множеству X и не принадлежат множеству Y, называется ***разностью*** множеств X и Y, то есть $X \setminus Y = \{x : x \in X, x \notin Y\}$.

В дальнейшем под множествами будем понимать числовые множества, то есть множества, состоящие из действительных чисел. Множество всех действительных чисел обозначается ***R***. Геометрически множество ***R*** изображается направленной прямой, а отдельные числа – точками этой прямой. Поэтому множество ***R*** называют ***числовой прямой*** (***числовой осью***) и обозначают $(-\infty;+\infty)$.

<u>Определение</u>. Множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $a \le x \le b$ называется ***отрезком*** и обозначается [a;b].

<u>Определение</u>. Множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $a<x<b$ называется ***интервалом*** и обозначается (a;b).

Отрезки, интервалы называются числовыми ***промежутками.***

2. Функция

<u>Определение</u>**.** Пусть каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана ***функция.***

Правило, с помощью которого устанавливается соответствие, определяющее данную функцию, обозначают буквой f и пишут: $y = f(x)$. Переменная x называется ***независимой переменной*** (***аргументом***), а переменная y – ***зависимой переменной.***

Множество X называется ***областью определения функции.***

Определение. Пусть на множестве X заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. Тогда функции, которые в каждой точке $x \in X$ равны: $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$), для всех $x \in X$ называют соответственно ***суммой, разностью, произведением*** и ***частным*** этих функций.

Способы задания функций:

1. Аналитический, то есть в виде формулы.
2. Табличный.
3. Графический.

Определение. Пусть даны функции $z = g(y)$, $y = f(x)$. Тогда функция, которая каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие $z \in Z$ называется ***сложной функцией*** $z = g(f(x))$.

3. Последовательности. Предел последовательности

Определение. Множество $X = \{x\}$ называется ***ограниченным сверху*** (***снизу***), если существует число $b \in R$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \le b$ $(x \ge b)$. Число b – ***верхняя*** (***нижняя***) ***граница*** множества.

Определение. Наименьшая (наибольшая) среди всех верхних (нижних) границ множества называется его ***верхней*** (***нижней***) ***гранью.***

Определение. ***Числовой последовательностью*** называется функция натурального аргумента. Обозначается (x_n), (y_n),…

Определение. Последовательность (x_n) называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***), если множество ее значений ограничено сверху (снизу), то есть если $\exists M \quad \forall n \in N \quad x_n \le M \quad (x_n \ge M)$.

Определение. Последовательность (x_n) называется ***ограниченной,*** если она ограничена сверху и снизу.

Определение. Число A называется ***пределом последовательности*** (пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n > n_0 \ |x_n - A| < \varepsilon$.

Последовательность, у которой существует предел, называется ***сходящейся.***

Теорема. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема. Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$.

Определение. Последовательность (α_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Теорема. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.

4. Предел функции

Определение. ***Окрестностью точки*** x_0 называется любой интервал, содержащий точку x_0. Обозначается $O(x_0)$.

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ в точке x_0, если функция определена в некоторой $O(x_0)$, за исключением, быть может, самой точки x_0, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое зависящее от него число $\delta > 0$, что, для всех x, отличных от x_0, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $(B \neq 0)$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Определение. Число A называется ***правым (левым) пределом*** функции $y=f(x)$ в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$ $\Rightarrow$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A\right)$.

Теорема. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любой последовательности $x_n \to +\infty, n \to \infty$, последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции сходится к A. Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

5. Непрерывные функции в точке

Определение. Пусть $f(x)$ определена в некоторой $O(x_0)$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 можно сформулировать с помощью неравенств (на языке $\varepsilon - \delta$), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой $O(x_0)$ и если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x:$ $|x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall O\big(f(x_0)\big)\ \ \exists O(x_0)\ \ \forall x \in X \quad \big(x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \in O\big(f(x_0)\big)\big)$.

Определение. $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall\ \{x_n\}$: $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$.

Назовём разность $x - x_0$ ***приращением аргумента*** и обозначим Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ – ***приращением функции***, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначим Δy. Таким образом, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и можно понятие непрерывности $f(x)$ в точке x_0 сформулировать следующим образом (на языке приращений).

Определение. $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если её приращение в этой точке Δy, соответствующее приращению Δx аргумента, стремится к нулю вместе с Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определение. Если $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется ***разрывной*** в точке x_0, а точка x_0 называется ***точкой разрыва***.

Определение.

1) x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***, если существует $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

2) x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***, если существуют односторонние пределы

$$\lim_{x_n \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } \lim_{x_n \to x_0 + 0} f(x), \text{ но } \lim_{x_n \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x_n \to x_0 + 0} f(x);$$

3) x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Отметим свойства функций, непрерывных в точке, непосредственно вытекающих из определения непрерывной функции в точке и из свойств предела функции.

Теорема. Если функции f (x) непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема. Если функция f (x) непрерывна в точке x_0, причём $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 знак функции совпадает со знаком числа $f(x_0)$.

Теорема (непрерывность суммы, произведения и частного). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в точке x_0 их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0) \neq 0$).

Теорема (непрерывность сложной функции). Если функция $z = g(y)$ непрерывна в точке y_0, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, причём $y_0 = f(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция z= $g(f(x)) = F(x)$, и эта функция непрерывна в точке x_0.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на множестве*** X, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена $[a,b]$.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она на этом отрезке имеет наибольшее и наименьшее значения, то есть $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$, что $f(x_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; $f(x_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то есть $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тогда $f(x)$ имеет хотя бы один нуль на интервале (a,b), то есть $f(c)=0$ в некоторой точке $c \in (a,b)$.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ и C – произвольное число, находящиеся между числами A и B, то на интервале (a,b) найдётся по крайней мере одна точка c, для которой .

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ на $[a,b]$ есть отрезок $[m,M]$.

Теорема. (Теорема о существовании и непрерывности обратной функции) Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена непрерывная и строго возрастающая функция $x=g(y)$, обратная к функции f.

6. Непрерывность некоторых элементарных функций

Многочлены и рациональные функции.

а) Рассмотрим многочлен степени n, то есть функцию вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$. Эта функция непрерывна на R.

б) Рациональная функция, то есть функция вида $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где P_n, Q_m – многочлены степени n и m соответственно, непрерывна во всех точках, которые не являются нулями многочлена $Q_m(x)$.

Тригонометрические функции.

а) Теорема. Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ непрерывны на R.

Из непрерывности синуса и косинуса следует, что функция $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна, если $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $(n \in Z)$, а функция $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна, если $x \neq \pi n$, где $(n \in Z)$.

б) Теорема (первый замечательный предел). Если $x \to 0$, то $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Лекция 6. Производная. Основные теоремы дифференциального исчисления

1. *Производная. Дифференцируемость функции. Дифференциал*

Определение. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 $(O(x_0))$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то его называют ***производной*** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$, то есть

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (14)$$

Определение. Если $f(x)$ определена в $O(x_0)$ и приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x_0 представимо в виде: $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ (15) где $A=A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то $f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** x_0**,** а произведение $A\cdot\Delta x$ называется её ***дифференциалом*** в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy.

Таким образом: $dy = A\cdot\Delta x$, (16) $\qquad \Delta y = dy+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ (17)

Теорема. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 необходимо и достаточно чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Геометрический смысл производной.

Производная $f'(x_0)$ геометрически представляет собой ***угловой коэффициент касательной*** к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, то есть тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox.

Геометрический смысл дифференциала.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то существует касательная l_0 (рис. 1) к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, задаваемая уравнением: $\quad y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (18)

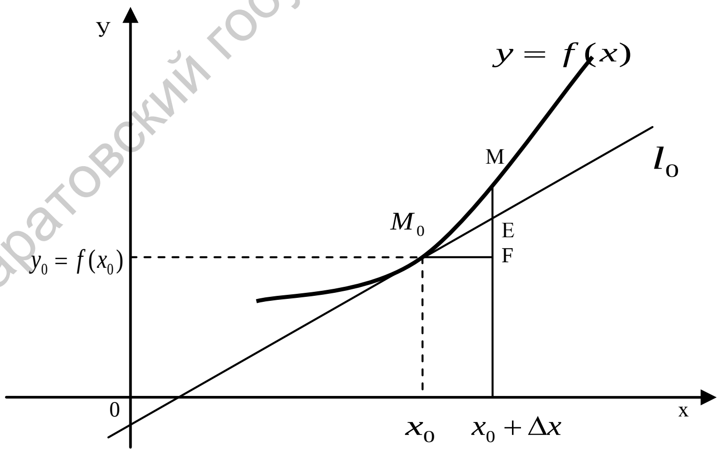


Рис. 1

Пусть $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ – точка графика функции $f(x)$ с абсциссой $x_0+\Delta x$, E и F – точки пересечения прямой $x=x_0+\Delta x$ с касательной l_0 и прямой $y=y_0=f(x_0)$ соответственно. Тогда $F(x_0+\Delta x, y_0)$, $E(x_0+\Delta x, y_0+f'(x_0)\cdot\Delta x)$, так как ордината точки E равна значению y в уравнении (18) при $x=x_0+\Delta x$. Разность ординат точек E и F равна $f'(x_0)\cdot\Delta x$, то есть равна дифференциалу dy функции f в точке x_0. Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 равен ***приращению ординаты касательной*** к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 при изменении аргумента от x_0 до $x_0+\Delta x$.

Механический смысл производной.

Если $S(t)$ есть путь, пройденный точкой за время t, то $S'(t_0)$ есть ***мгновенная скорость*** в момент времени t_0.

2. Правила дифференцирования

Операция вычисления производной функции называется ***дифференцированием.***

Теорема (правила дифференцирования). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда: 1) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$,
2) $c\cdot f(x)$ дифференцируема в точке x и $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ ($c=const$),
3) $f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема в точке x и $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)$,
4) если $g(x)\neq 0$, то $f(x)/g(x)$ дифференцируема в точке x и $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Пример. Доказать: $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}, x\neq\pi k, k\in Z$.

Решение. а) $(tgx)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

б) $(ctgx)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Теорема (производная сложной функции). Пусть:

1) $f(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0;

2) $x=x(t)$ определена в $O(t_0)$ и дифференцируема в точке t_0;

3) $x_0=x(t_0)$. Тогда сложная функция $F(t)=f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0 и $F'(t_0)=f'(x_0)\cdot x'(t_0)$.

Теорема (производная обратной функции). Пусть функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратные. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$ производную, причем $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

3. Таблица производных

1. $(c)' = 0, \quad c = const.$

2. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ (где $n \in R$); в частности: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a$; в частности: $(e^x)' = e^x$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; в частности: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Упражнения. Найти производные функций:

1. $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$. 2. $y = \frac{(2-x^2)(3-x^2)}{(1-x)^2}$. 3. $y = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. 4. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5. $y = x \cdot \operatorname{arctg}^2\frac{x}{3} + \sin x^2$. 6. $y = \ln\left(x \cdot \sin x\sqrt{1-x^2}\right)$. 7. $y = \ln(\ln(\ln x))$.

8. $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \ln\operatorname{tg} x$. 9. $y = x^{\sqrt{x}}$. 10. $y = (\ln x)^x$. 11. $y = \sqrt[x]{(x+1)^2}$. 12. $y = x^{\sin x}$.

13. $y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$. 14. $y = (\sin^2 3x)^{\sqrt{x^2+1}}$. 15. $y = (\lg 3x)^{\frac{x+1}{x-1}}$. 16. $y = \arccos^2(5x+1)$.

17. $y = \left(1+\sqrt[8]{x}\right)^3$. 18. $y = a\left(tg\frac{x}{k}+b\right)$. 19. $y = \sqrt{1+\sqrt{2px}}$. 20. $y = \operatorname{arctg}\left(x^3-3x+2\right)$.

21. $y = \lg(x-\cos x)$. 22. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$. 23. $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{5} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. 24. $y = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

25. $y = \sin\frac{x}{2}\sin 2x$. 26. $y = \sin x e^{\cos x}$. 27. $y = x \cdot \sqrt[5]{x^6-8}$. 28. $y = e^{-x^2} \cdot \ln x$.

29. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$. 30. $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$. 31. $y = e^{2x+3} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$. 32. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

33. $y = \sin^2\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 34. $y = \frac{\operatorname{tg}(x/2)+\operatorname{ctg}(x/2)}{x}$. 35. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$. 36. $y = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

37. $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 38. $y = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$. 39. $y = \cos 2x \ln x$. 40. $y = \arcsin(n\sin x)$.

41. $y = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$. 42. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$. 43. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. 44. $y = \arccos\sqrt{1-3x}$.

45. $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$. 46. $y=\log_3\left(x^4-\sin x\right)$. 47. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}$. 48. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

49. $y=x\cdot\arcsin(\ln x)$. 50. $y=x\cdot e^{1-\cos x}$. 51. $y=x^3\cdot\operatorname{arctg}x^3$. 52. $y=\cos x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}$.

53. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$. 54. $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$. 55. $y=\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{1+x}$. 56. $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

57. $y=\sqrt{1+x\sqrt{x+3}}$. 58. $y=\ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$. 59. $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 60. $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.

61. $y=4\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 8x\right)^2$. 62. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$. 63. $y=\sqrt{\frac{\arcsin 4x}{1-4x}}$.

64. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$. 65. $y=2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2-4x-x^2}$. 66. $y=\frac{1}{\cos x(x-\cos x)}$.

67. $y=e^x\cdot\sqrt{1+x^2}\sin x$. **68**. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt{x^9}}$. 69. $y=x\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sin x$.

70. $y=x-\ln\left(e^x+\sqrt{e^2x+4e^x}\right)$. 71. $y=(\sin x)^{\cos x}$. 72. $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$. 73. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

74. $y=(\cos x)^{\operatorname{tg}x}$. 75. $y=(\sin x)^{\sqrt{x+1}}$. 76. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln x}$. 77. $y=(\operatorname{tg}x)^{x^2+5}$.

4. Производные и дифференциалы высшего порядка.

Определение. Производная от производной некоторой функции называется ***производной второго порядка*** или ***второй производной.*** Производная от второй производной называется ***производной третьего порядка*** или ***третьей производной,*** и так далее. Производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***производной*** n***-го порядка***.

Производные, начиная со второй, называются ***производными высшего порядка*** и обозначаются: y'', y''', … , $y^{(n)}$, …

Второй производной можно дать механическое толкование: $f''(x)$ есть ***ускорение*** изменения функции по сравнению с изменением аргумента.

Пример. Для функции $y=e^x$ имеем: $y'=e^x$, $y''=e^x$, $y'''=e^x$, … $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$.

Определение. Дифференциал от дифференциала функции $y=f(x)$ в некоторой точке называется ***дифференциалом второго порядка*** в этой точке и обозначается $d(dy)=d^2y$. Дифференциал от дифференциала второго порядка называется ***дифференциалом третьего порядка*** и обозначается d^3y и т.д. Вообще дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка называется ***дифференциалом n-го*** порядка и обозначается $d^n y$. При этом дифференциал независимый переменной $(dx=\Delta x)$ всё время рассматривается как постоянная.

Способ вычисления дифференциалов высшего порядка.

Пусть $y=f(x)$ имеет в точке x производные любого порядка. Тогда:

$$dy=y'\cdot dx,$$

$$d^2y=d(dy)=(y'dx)'dx=y''dxdx=y''dx^2,$$

$$d^3y=d(d^2y)=(y''dx^2)'dx=y'''dx^2dx=y'''dx^3,\ldots,$$

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=\left(y^{(n-1)}dx^{n-1}\right)'=y^{(n)}dx^{n-1}dx=y^{(n)}dx^n$$

Как для производных, так и для дифференциалов высшего порядка справедливы формулы:

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \qquad d^n(cu) = cd^n u,$$

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \qquad d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v,$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)} \cdot v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

$$d^n(uv) = d^n uv + nd^{n-1}u \cdot dv + \frac{n(n-1)}{2!}d^{n-2}u \cdot d^2 v + \ldots + ud^n v.$$

5. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Определение. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x)$ определена в $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и пусть для всех $x \in O_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 ***локальный минимум***.

Аналогично, если существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in O_\delta(x_0)$ выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что $f(x)$ имеет в точке x_0 ***локальный максимум***.

Локальный минимум и локальный максимум объединяются общим термином ***локальный экстремум.***

Теорема. (Ферма) Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема. (Ролля) Пусть:
1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b);
3) $f(b) = f(a)$. Тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$, что $f'(x_0)$=0.

Теорема. (Лагранжа). Пусть:
1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a,b).

Тогда существует $x_0 \in (a,b)$, что $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$. (19)

Доказательство. Рассмотрим на $[a,b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$. Эта функция удовлетворяет всем трём условиям теоремы Ролля. Действительно, $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$, так как она представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. На интервале (a,b) она имеет конечную производную $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Значения этой функции на концах отрезка $[a,b]$ равны: $\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (a-a) = 0$, $\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = 0$, то есть $\varphi(a) = \varphi(b)$. Следовательно, для функции $\varphi(x)$ справедливо утверждение теоремы Ролля: существует точка $x_0 \in (a,b)$, такая, что $\varphi'(x_0) = 0$. Но

$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, значит, $f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$ или $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b-a)$. *Теорема доказана.*

Равенство (19) называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений***, если запишем её в следующем виде. Возьмём на $[a,b]$ некоторое значение x и дадим ему приращение Δx такое, чтобы $x + \Delta x$ оставалось в пределах этого отрезка. Тогда получим: $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $x_0 \in (x, x+\Delta x)$. Запишем x_0 в виде: $x_0 = x + \theta \cdot \Delta x$, где θ - действительное число между 0 и 1. Тогда формула $\Delta y = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$, $0 < \theta < 1$; наглядно показывает связь между приращением аргумента и соответствующим приращением функции.

<u>Теорема</u>. (Коши) Пусть на $[a,b]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, причём:

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$,

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (a,b), причём $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{20}$$

Равенство (20) называют ***формулой Коши***.

Доказательство. Прежде всего, установим, что каждая из частей формулы Коши имеет определённый числовой смысл. Действительно, правая часть (20) имеет смысл, так как по условию $g'(x_0) \neq 0$. Левая часть потеряла бы смысл при $g(b) = g(a)$. Это невозможно, так как тогда к функции $g(x)$ можно было бы применить теорему Ролля и оказалось бы, что в некоторой точке x_0 из (a,b) производная $g'(x)$ равна нулю. У нас же по условию 2) $g'(x) \neq 0$ во всём интервале (a,b). Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $\phi(x)$ удовлетворяет всем трём условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[a,b]$, имеет конечную производную $\phi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$ на (a,b) и на концах $[a,b]$ имеет одинаковые значения $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Следовательно, найдётся точка $x_0 \in (a,b)$, что $\phi'(x_0) = 0$. Но $\phi'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x_0)$. Значит, $f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x_0) = 0$, или $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. *Теорема доказана.*

<u>Замечание 1</u>. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши (при $g(x) = x$).

<u>Замечание 2</u>. Если в условиях теоремы Коши дополнительно потребовать, чтобы $f(a) = g(a) = 0$, то формула Коши примет следующий частный вид: $\dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, где $a < x_0 < b$.

Лекция 7. Приложения производной

1. Исследование поведения функций. Признак монотонности функции

Теорема. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках выполнялось условие $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Теорема. Если всюду на (a,b) $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на этом интервале.

Замечание. Условие $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ не являются необходимыми для строгого возрастания (строгого убывания) дифференцируемой на интервале функции, что показывают примеры функции $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = -x^3$; $f_1(x)$ строго возрастает, $f_2(x)$ строго убывает на всей числовой прямой, но при $x = 0$ их производные обращаются в нуль.

2. Отыскание наибольших и наименьших значений

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой $O(x_0)$. Точка x_0 называется ***точкой строгого максимума*** (***строгого минимума***) функции $f(x)$, если существуют такое $\delta > 0$, что для всех $\Delta x \neq 0$ таких, что $\Delta x < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (неравенство $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$). Точки строгого максимума и строгого минимума называются ***точками строгого экстремума***.

Теорема (необходимое условие экстремума). Пусть x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, определённой в некоторой $O(x_0)$. Тогда либо производная $f'(x)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

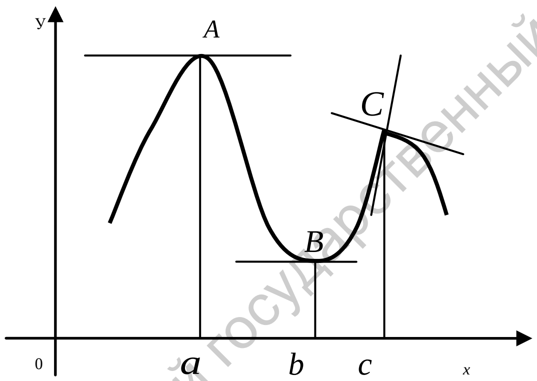


Рис. 2

Геометрическое истолкование теоремы даёт рис.2. В точках A и B графика функции $f(x)$, которые соответствуют точке максимума a и точке минимума b функции $f(x)$ существуют касательные к этому графику (существуют $f'(a)$ и $f'(b)$) и они параллельны оси Ox, поэтому $f'(a)$ и $f'(b)$ равны нулю. В точке C, соответствующей точке максимума c функции, определённой касательной к графику функции $f(x)$ провести нельзя, поэтому производной $f'(x)$ в точке c не существует.

Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$ не является (для дифференцируемой при $x = x_0$ функции) достаточным условием наличия экстремума, как это показывает пример функции $f(x) = x^3$, которая в точке $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но для которой $x = 0$ не является точкой экстремума (рис.3).

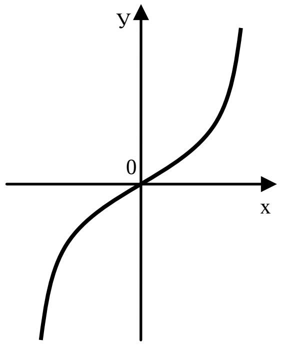


Рис. 3

<u>Теорема</u> (первое достаточное условие строгого экстремума). Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в этой окрестности, за исключением, быть может, точки x_0, и непрерывна в точке x_0, Тогда:

1) Если $f'(x)$ меняет свой знак при переходе через точку x_0 с «+» на «– », то есть, существует $\delta > 0$ такое что: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то в точке x_0 $f(x)$ имеет максимум;

2) если $f'(x)$ меняет свой знак при переходе через точку x_0 с «– » на «+», то в точке x_0 $f(x)$ имеет минимум.

<u>Замечание.</u> Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b) за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда существует $x_0 \in [a,b]$, в которой $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0)$. Если $x_0 \neq a$ и $x_0 \neq b$, то в точке x_0 – max и, следовательно, $f'(x_0) = 0$. Поэтому для нахождения наибольшего значения функции, непрерывной на отрезке, необходимо:

1) найти точки x_k, в которых $f'(x_k)$=0;
2) добавить к ним точки, в которых $f'(x)$ не существует и граничные точки a и b;
3) в этих точках найти $y_k = f(x_k)$;
4) из всех найденных значений $f(x_k)$ выбрать наибольшее.

Аналогично находится наименьшее значение.

<u>Теорема</u> (второе достаточное условие строгого экстремума). Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные, причём $f'(x_0)$=0, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 является точкой строгого максимума функции, если $f''(x_0) < 0$, и x_0 – точка строгого минимума $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$.

3. Выпуклость функции

Непрерывная функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой вверх*** на отрезке $[a,b]$, если для любых точек x_1, x_2 отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство: $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.
(23)

Дадим геометрическую интерпретацию понятия выпуклости. Пусть M_1, M_2, M_0 – точки графика функции $y = f(x)$, абсциссы которых соответственно равны $x_1, x_2, x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. Тогда $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ есть ордината точки K – середины отрезка M_1M_2, а $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) = f(x_0)$ – ордината точки M_0 графика с абсциссой, равной абсциссе точки K. Условие (23) означает, что для любых точек M_1 и M_2

графика функции $y = f(x)$ середина K хорды M_1M_2 лежит или ниже соответствующей точки M_0 графика, или совпадает с точкой M_0.

Если неравенство (23) является строгим при любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют ***строго выпуклой вверх на отрезке*** $[a,b]$.

Аналогично непрерывная функция $y = f(x)$ называется **выпуклой вниз на отрезке** $[a,b]$, если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство:
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (24)$$

Если неравенство (24) является строгим при любых $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют ***строго выпуклой вниз на отрезке*** $[a,b]$**.**

Например, функция $f(x) = x^2$ – строго выпуклая вниз на любом отрезке, так как при $x_1 \neq x_2$ неравенство $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ равносильно очевидному неравенству $(x_1 - x_2)^2$.

Замечание. Понятие выпуклости и строгой выпуклости вверх (вниз) можно ввести и на интервале. Например, если неравенство (24) выполняется для любых точек интервала (a,b), то непрерывная функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой верх на*** этом ***интервале.***

Теорема. Пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a,b]$, а $f''(x)$ – на интервале (a,b). Тогда: 1) если $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in (a,b)$, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на $[a,b]$, а если $f''(x) \leq 0$ на интервале (a,b), то функция выпукла вверх на $[a,b]$;

2) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$, то функция $y = f(x)$ строго выпукла вниз на отрезке $[a,b]$, а если $f'(x) < 0$ на интервале (a,b), то функция $y = f(x)$ строго выпукла вверх на $[a,b]$.

Замечание. Условие $f''(x) > 0$ не является необходимым условием строгой выпуклости вниз функции $y = f(x)$. Например, для функции $f(x) = x^4$ условие $f''(x) > 0$ нарушается при $x = 0$, так как $f''(0) = 0$, однако эта функция выпукла вниз.

4. Точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке либо конечную производную (касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ не будет параллельна оси Oy), либо бесконечную производную (касательная – параллельна оси Oy.). Тогда, если эта функция при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то есть существует $\delta > 0$ такое, что на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ она выпукла вверх, а на другом – выпукла вниз, то x_0 называют ***точкой перегиба функции*** $f(x)$, а точку $(x_0, f(x_0))$ – ***точкой перегиба графика функции*** $f(x)$. Например, для функций $y = x^3$ (рис. 4) и $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 5) $x = 0$ – точка перегиба.

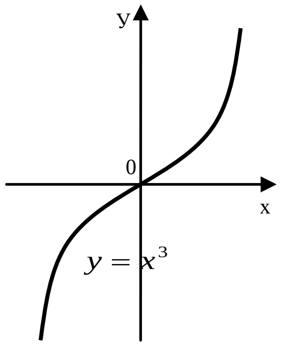


Рис. 4

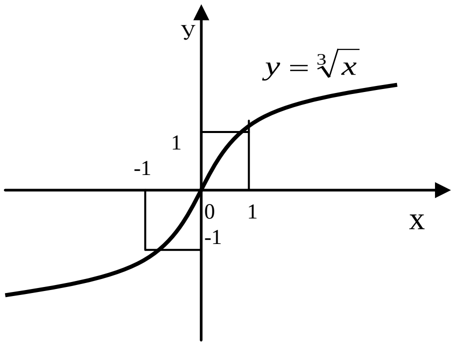


Рис. 5

Теорема. Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$ и если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ вторую производную, непрерывную в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема (первое достаточное условие). Если функция f непрерывна в точке x_0, имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

Теорема (второе достаточное условие). Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

Например, для $f(x) = \sin x$ точка $x = 0$ – точка перегиба, т. к. $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$.

5. Асимптоты

Определение. Если выполнено хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямую $x = x_0$ называют ***вертикальной асимптотой графика функции*** $y = f(x)$.

Например, $x = 0$ – вертикальная асимптота графиков функций $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Определение. Прямую $y = kx + b$ называют ***асимптотой*** (невертикальной асимптотой) графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b))$=0.

Если $k \neq 0$, то асимптоту называют ***наклонной***, а если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют ***горизонтальной.***

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

Теорема. Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$.

Замечание. Для случая горизонтальной асимптоты необходимое и достаточное условие формулируется в виде: для того, чтобы прямая $y = b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

6. Построение графиков функций

При построении графика функции $y = f(x)$ можно придерживаться следующего плана.

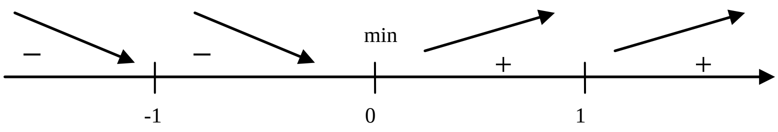
1. Найти область определения функции, область непрерывности и точки разрыва. Выяснить, является ли функция чётной (нечётной), периодической.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.
3. Найти асимптоты.
4. Сделать эскиз графика.
5. Вычислить $f'(x)$, найти экстремумы и промежутки монотонности функции.
6. Вычислить $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости.
7. Нарисовать график функции.

Пример 1. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Решение.

1) Функция определена всюду, кроме точек $x = \pm 2$.
2) Функция чётная, так как $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{1 - (-x)^2} = \dfrac{x^2}{1 - x^2} = f(x)$. Следовательно, её график симметричен относительно оси Oy. Будем исследовать и строить график функции только для $x \ge 0$. Вторая часть графика для $x < 0$ может быть достроена по симметрии.
3) В точке $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода: $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2}{1 - x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2}{1 - x^2} = -\infty$. Значит, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой для данной кривой.
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1 - x^2} = -1$. Прямая $y = -1$ является горизонтальной асимптотой.
5) При $x = 0$ $y = 0$. График функции проходит через начало координат. Других точек пересечения с осями координат нет.
6) $y' = \dfrac{2x(1 - x^2) - x^2(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$, $y' = 0$ при $x = 0$. $y_{\min}(0) = 0$.

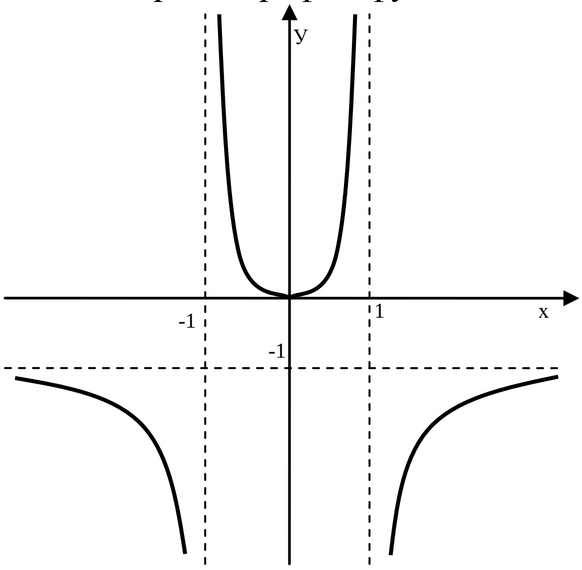
Функция возрастает на промежутках $(0;1)$, $(1;+\infty)$



7) $$y''=\frac{2\cdot\left(1-x^2\right)^2+2x\cdot 2\left(1-x^2\right)(2x)}{\left(1-x^2\right)^4}=\frac{2\left(1-x^2\right)\left(1-x^2+4x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^4}=\frac{2\cdot\left(1+3x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{2+6x^2}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Знак y'' совпадает со знаком её знаменателя (так как числитель всегда положителен)

$y''>0$ при $1-x^2>0$, откуда $0<x<2$, $y''<0$ при $1-x^2<0$, откуда $x>2$. Значит на $(0,2)$ кривая выпукла вниз, на $(2,+\infty)$ – выпукла вверх. Точек перегиба нет. Построим график функции.



Пример 2. Исследовать функцию $y=x^2\ln x$ и построить ее график.

Решение.

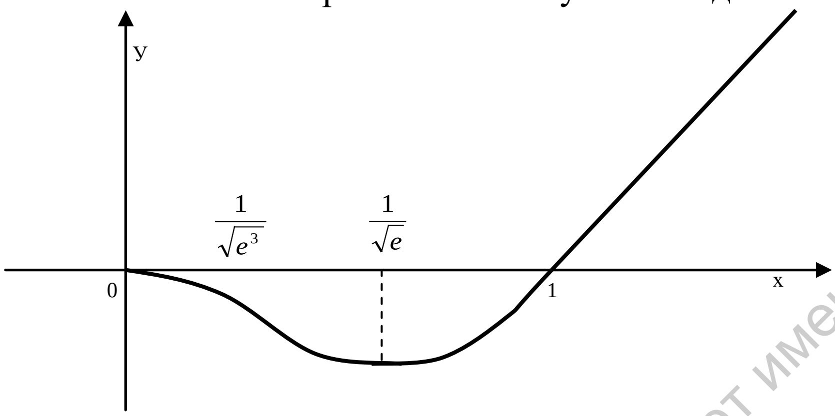
1) Функция определена при $x>0$.
2) Функция не является ни четной, ни нечётной.
3) Точек разрыва нет. Исследуем поведение функции на границе области определения.

$$\lim_{x\to+0}x^2\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{2}=0$$

4) При $y=0$, $x^2\ln x=0$, $x=1$ – точка пересечения с осью Ox. С осью Oy кривая не пересекается, так как при $x=0$ функция не определена, но график неограниченно приближается к началу координат, так как $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$.
5) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln x=\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=\infty$, то график не имеет ни горизонтальной, ни наклонной асимптоты.
6) $y'=2x\ln x+x$; $2x\ln x+x=0$, $x(2\ln x+1)=0$, откуда $x=e^{-\frac{1}{2}}$. При $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ имеем $f'(x)<0$, а при $x>e^{-\frac{1}{2}}$ имеем $f'(x)>0$. Поэтому $x=e^{-\frac{1}{2}}$ – точка

минимума функции. В этой точке $y = -\frac{1}{2e}$. В промежутке $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ функция убывает, в промежутке $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ – возрастает.

7) $y'' = 2\ln x + 3$. Решая уравнение $2\ln x + 3 = 0$, находим $x = e^{-\frac{3}{2}}$. На промежутке $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ кривая выпукла вверх, а на луче $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ – выпукла вниз. Точка $x = e^{-\frac{3}{2}}$ – точка перегиба. По полученным данным стоим график функции.



Упражнения. Исследовать и построить графики функций**:**

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$. 2. $y = \sqrt[3]{x^2}$. 3. $y = x^2 e^{-x}$. 4. $y = \sin x - x$. 5. $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$.
6. $y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x(x-4)}$. 7. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$. 8. $y = x^4 - 6x^2 + 5$. 9. $y = (x-1)^2(x+2)$.
10. $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$. 11. $y = x(x-1)^3$. 12. $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 3\right)^2$. 13. $y = \frac{1}{10}\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 11\right)$.
14. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$. 15. $y = x^3 - 3x^2$. 16. $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$. 17. $y = \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 1} + 2x$. 18. $y = \frac{\ln x}{x}$.
19. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. 20. $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$. 21. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$. 22. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. 23. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
24. $y = \frac{x^2 - 1}{x^4}$. 25. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$. 26. $y = x + \frac{\ln x}{x}$. 27. $y = \frac{x}{4 - x^2}$. 28. $y = \frac{1}{x\left(x^2 - 9\right)}$.

8. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя

Во многих случаях вычисление предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке a (конечной или бесконечной), приводит к выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞. Они называются ***неопределённостями***, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел. В этом случае вычисление предела называется также ***раскрытием неопределённости***.

Теорема (Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ точки a, кроме, быть может, самой точки a. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и отношение $f'(x) : g'(x)$ при $x \to a$ имеет конечный или бесконечный предел, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (25)

Равенство (25) – правило Лопиталя, по которому вычисление предела отношения функций сводится к вычислению предела отношения их производных.

Замечание 1. Если условие теоремы выполнено только в интервале $(a-\delta, a)$ или $(a, a+\delta)$, то формулу (25) используют для вычисления предела $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ соответственно при $x \to a-0$ или $x \to a+0$.

Замечание 2. При вычислении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ иногда приходится применять правило Лопиталя последовательно несколько раз. Так, если условиям теоремы Лопиталя удовлетворяют не только $f(x)$ и $g(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ опять используют правило Лопиталя и вычисляют $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ и так далее.

Замечание 3. Правилом Лопиталя можно пользоваться для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, если в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Замечание 4. Правило Лопиталя применимо и для вычисления $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют и другим условиям, аналогичным условиям теоремы Лопиталя:

1) для всех x, достаточно больших по величине, существуют $f'(x)$ и $g'(x) \neq 0$,
2) существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. *Решение.* По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^3)'} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6}.$$

Здесь нам пришлось применить правило Лопиталя два раза.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, где n – целое положительное число.

Решение. Применим правило Лопиталя n раз, получим $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0$.

Правило Лопиталя можно использовать при вычислении пределов:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. В этом случае достаточно данную функцию записать в виде: $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ или $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, и к правой части применить правило Лопиталя.

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. В этом случае надо данную функцию опять представить в виде частного: $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$, и затем воспользоваться правилом Лопиталя.

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$, когда имеем один из трёх случаев: а) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$; б) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$; в) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

Полагаем $y=f(x)^{g(x)}$. Логарифмируя, получим $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$. Вычислим $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln f(x)$. Легко заметить, что в каждом из трёх случаев придётся вычислять предел такого вида, который рассмотрен в 1). Пусть мы нашли $\lim\limits_{x\to a}\ln y=b$. Из этого следует, что $\ln y=b+\beta(x)$, где $\beta(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$, и, значит: $y=e^{b+\beta(x)}$. Так как $\lim\limits_{x\to a}e^{b+\beta(x)}=e^b$, то мы имеем $\lim\limits_{x\to a}y=e^b$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}f(x)^{g(x)}=e^b$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}2x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}2x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Решение. Положим $y = x^x$. Тогда $\ln y = x\ln x$. Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

Упражнения. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tgx}$; 7. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\varphi}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$; 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$; 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$; 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$; 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}-\cos bx}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$; 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$; 20. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{a}{x}$; 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^5\cdot e^{-x}\right)$; 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((\pi-2arctgx)\cdot\ln x\right)$; 23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$; 24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$; 25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; 26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$; 27. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$; 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$; 29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$; 30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi x}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$; 31. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$; 32. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; 33. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; 34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$; 35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;

36. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$; 37. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$; 38. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{\frac{n}{x^2}}$; 39. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$; 40. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$; 41. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$; 42. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$; 43. $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; 45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; 46. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; 47. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$; 48. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg} x$;

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; 50. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$; 51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; 52. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$; 53. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Контрольная работа № 2

Задание 1. Записать уравнение прямой по точке M и угловому коэффициенту k: $M\,(N+1;-N)$; $k = -\,N/2$.

Задание 2. Записать уравнение прямой по двум ее точкам: $(N;\,-2)$, $(-2;\,N)$.

Задание 3. Определить центр и радиус окружности:

1) $x^2 + y^2 + 4x = N$.

2) $x^2 + y^2 + 2x - Ny + 5 = 0$.

3) $x^2 + y^2 - 2Nx + 6y + 7 = 0$.

Задание 4. Изобразить на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

1) $(x-N)^2 + (y-3)^2 < 25$.

2) $x^2 + y^2 + 2Nx - 6y + 5 > 0$.

3) $4x^2 + 5y^2 = 20N$.

4) $9x^2 + 16y^2 \geq 144N$.

5) $16x^2 + 25y^2 \leq 100N$.

6) $16x^2 - 9y^2 = 144N$.

Задание 5. Найти производную функции:

а) $y = (x-N)\cdot\sqrt{x+N}$; ***б)*** $y = e^x(2x+N)$; ***в)*** $y = e^{N\sqrt{x}}$;

г) $y = x^N \cos x$; ***д)*** $y = \sin^2 Nx$; ***е)*** $y = \dfrac{\cos x}{N - \sin x}$.

Задание 6. Найти промежутки возрастания, убывания функции и экстремумы функции:

а) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + N$; ***б)*** $y = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - N$; ***в)*** $y = \dfrac{1}{x-N}$.

Задание 7. Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции: ***а)*** $y = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - N$ ***б)*** $y = \dfrac{1}{N + x^2}$.

Задание 8. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + \dfrac{N}{2}$; ***б)*** $y = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - 2N$.

Примечание. N – номер варианта (сообщается преподавателем).

Лекция 8. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

1. *Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства*

Определение. Функция *F(x)* называется ***первообразной*** для функции *f(x)* на промежутке *X*, если для всех значений ***x*** из этого промежутка выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. $F(x) = x^2$ – первообразная для функции $f(x) = 2x$ на всей числовой прямой, поскольку $F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x = f(x)$.

Пример 2. $F(x) = arctgx$ – первообразная для функции $f(x) = 1/(1+x^2)$ при любом действительном ***x***, так как $F'(x) = (arctgx)' = 1/(1+x^2) = f(x)$.

Теорема. Разность между любыми первообразными для функции *y*= $f(x)$ равна постоянному числу.

Доказательство. Пусть даны две первообразные $F(x)$ и $G(x)$ для функции *y*= $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Составим вспомогательную функцию $\varphi(x) = F(x) - G(x)$. $\varphi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a;b]$, значит, $\varphi(x) = const = c$, то есть $F(x) - G(x) = c$. *Теорема доказана.*

Определение. Множество всех первообразных для функции *f(x)* на отрезке [*a,b*]называется ***неопределенным интегралом от*** этой ***функции*** и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + c$, где *f(x)* – подынтегральная функция от переменной интегрирования ***x***; *f(x)dx* – подынтегральное выражение; *c* – произвольная постоянная.

Замечание. Вместо отрезка $[a;b]$ можно брать любой промежуток *X*.

Действие, с помощью которого по данной функции $f(x)$ находим ее первообразную, называется ***интегрированием.*** Очевидно, интегрирование есть действие, обратное дифференцированию и этим последним проверяется.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $\int F'(x)dx = F(x) + c$.
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, то есть $\int dF(x) = F(x) + c$.
4. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
5. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx, k = const \neq 0$.
6. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

2. *Таблица интегралов*

Функция $f(x)$	Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$
$f(x)=1$	$\int f(x)dx=\int dx= x+ c$
$f(x)= x^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\int f(x)dx=\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{x}=\ln\|x\|+c$
$f(x)=e^x$	$\int f(x)dx=\int e^x dx= e^x+c$
$f(x)=a^x$	$\int f(x)dx=\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$
$f(x)=\cos x$	$\int f(x)dx=\int \cos xdx=\sin x+c$
$f(x)=\sin x$	$\int f(x)dx=\int \sin xdx=-\cos x+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+c$
$f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+c$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\int f(x)dx=\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\|+c$
$f(x)=tgx$	$\int f(x)dx=\int tgxdx=-\ln\|\cos x\|+c$
$f(x)=ctgx$	$\int f(x)dx=\int ctgxdx=\ln\|\sin x\|+c$

3. *Метод разложения*

Данный метод основан на свойстве 6 неопределенного интеграла: $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

Пример 3. $\int (x^3-1)^2 dx=\int x^6dx-2\int x^3dx+\int 1dx=\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^4}{2}+x+c$.

Пример 4. $\int \dfrac{x^2+3x-1}{x}dx=\int xdx+\int 3dx-\int \dfrac{dx}{x}=\dfrac{x^2}{2}+3x-\ln|x|+c$.

Пример 5. $\int (e^x+x^2)dx=e^x+\dfrac{x^3}{3}+c$.

Пример 6. $\int \left(\dfrac{3}{1+x^2}-2\sin x\right)dx=3arctgx+2\cos x+c$.

Пример 7. $\int \frac{x-5}{x^4}dx = \int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)dx = \int\frac{1}{x^3}dx - \int\frac{5}{x^4}dx = \int x^{-3}dx - 5\int x^{-4}dx = -\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{3x^3}+C$.

Пример 8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c$.

Упражнения. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2. $\int x^3 dx$; 3. $\int 3^x dx$; 4. $\int 7\cos x dx$; 5. $\int\frac{dx}{x^2+16}$; 6. $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$;

7. $\int\left(\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}\right)dx$; 8. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt[3]{x}}\right)dx$; 9. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$; 10. $\int(\sin x-5ctgx)dx$;

11. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; 12. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 13. $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

4. Метод подстановки (метод замены переменной)

Теорема. Пусть: 1) $f(x)$ имеет первообразную на (a,b); 2) $x(t)$ имеет производную $x'(t)$ на (α,β); 3) область значений $x(t)$ содержится в (a,b). Тогда $f(x(t))\cdot x'(t)$ имеет первообразную на (α,β) и $\int f(x)dx = \int f(x(t))\cdot x'(t)dt$. (26)

Формула (26) называется ***формулой замены переменной*** в неопределенном интеграле.

Пример 9. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-2}}$.

Решение. Положим $e^x-2=t^2$. Отсюда, дифференцируя обе части равенства, находим $e^x dx = 2tdt$. Поэтому $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-2}} = \int\frac{2tdt}{t} = 2\int dt = 2t+c = 2\sqrt{e^x-2}+c$.

Пример 10. $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx = \int(1-\cos^2 x)\cdot\cos^2 x\cdot\sin xdx = \left|t=\cos x, dt=-\sin xdx\right| =$

$= -\int(1-t^2)\cdot t^2 dt = \int\left(t^4-t^2\right)dt = \int t^4 dt - \int t^2 dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+c = \frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+c$;

Пример 11. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left|t=\sqrt{x}, dx=2tdt\right| = \int\frac{e^t\cdot 2tdt}{t} = 2\int e^t dt = 2e^t+c = 2e^{\sqrt{x}}+c$.

Пример 12. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx = \begin{vmatrix}x=t^2,\\ dx=2tdt\end{vmatrix} = \int\frac{2t^2}{t+1}dt = 2\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt =$

$= 2\left(\int(t-1)dt+\int\frac{dt}{t+1}\right) = 2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)+2\ln|t+1|+c = x-2\sqrt{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$.

Непосредственное интегрирование.

В простых случаях введение новой переменной можно проводить в уме, применяя следующие преобразования дифференциала *dx:* $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$; $2xdx=d(x^2)$; $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$; $\cos xdx=d(\sin x)$ и т.п., мысленно обозначая выражение в скобках через *t*. Такой метод интегрирования называется непосредственным и является частным случаем метода подстановки.

Пример 13. $\int(3-2x)^4dx=-\frac{1}{2}\int(3-2x)^4d(3-2x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^5}{5}+c=-\frac{(3-2x)^5}{10}+c.$

Пример 14. $\int\sin x\cdot\cos xdx=\int\sin xd(\sin x)=\frac{\sin^2 x}{2}+c.$

Пример 15. $\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+c.$

Пример 16. $\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx-\int\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c.$

Пример 17. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}xdx=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+c=$

$=-\sqrt{1-x^2}+c.$

Пример 18. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+\alpha\right)}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\sqrt{x^2+\alpha}+c.$

Пример 19. $\int\frac{6x^3dx}{3+x^4}=\frac{6}{4}\int\frac{d\left(3+x^4\right)}{3+x^4}=\frac{3}{2}\ln\left(3+x^4\right)+c.$

Пример 20. $\int\left(e^{\frac{x+1}{2}}+e^{-\frac{x+1}{2}}\right)dx=\int e^{\frac{x+1}{2}}dx+\int e^{-\frac{x+1}{2}}dx=2\int e^{\frac{x+1}{2}}d\left(\frac{x+1}{2}\right)-2\int e^{-\frac{x+1}{2}}d\left(-\frac{x+1}{2}\right)=$

$=2e^{\frac{x+1}{2}}-2e^{-\frac{x+1}{2}}+c=2\left(e^{\frac{x+1}{2}}-e^{-\frac{x+1}{2}}\right)+c.$

Пример 21. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+c.$

Пример 22. $\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}/2}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}+c=$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

Пример 23. $\int\frac{\left(x^2-x^5\right)dx}{\sqrt{1-x^6}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}-\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}+$

$+\frac{1}{6}\int\left(1-x^6\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^6\right)=\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x^3\right)+\sqrt{1-x^6}\right)+c.$

Замечание. Если подынтегральная функция представляет собой рациональную функцию от *sinx* и *cosx,* то используется универсальная тригометрическая подстановка $tg\frac{x}{2}=t$. Если $tg\frac{x}{2}=t$, то $x=2arctg\ t$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$;

$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Пример24. $\int\frac{dx}{\cos x}=\left|\begin{matrix} t=tg\frac{x}{2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=2\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=$

$$=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln|1+t|-\ln|1-t|+c=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+c.$$

4. *Метод интегрирования по частям*

Теорема. Пусть на некотором промежутке X определены функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ и существуют непрерывные производные $u'=u'(x)$ и $v'=v'(x)$ на этом промежутке. Тогда имеет место формула: $\int udv=uv-\int vdu$. (27)

Формула (27) называется ***формулой интегрирования по частям***.

Замечание. Формула интегрирования по частям чаще всего применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функции, например, $\int x^2e^xdx$ или $\int x^3\ln xdx$. При этом за $u=u(x)$ выбирается функция, которая дифференцированием упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, содержащая dx, интеграл от которой известен или может быть найден.

Из трансцендентных функций за u обычно принимаются *ln x, arctg x, arcsin x.*

Например, в интеграле $\int x^2\ln xdx$ за u надо принять *ln x* (а не x^2), а в интеграле $\int x^2e^xdx$ за u надо принять x^2 (а не e^x).

Пример 25. $\int\ln xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx, v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+c.$

Пример 26. $\int x\cdot arctgxdx=\left|\begin{matrix} u=arctgx, du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx, v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\int\frac{x^2dx}{2(1+x^2)}=$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+c=\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+c.$$

Пример27. $\int\ln^2xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2x, du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=dx, v=x\end{matrix}\right|=x\ln^2x-2\int\ln xdx=$

$=x\ln^2x-2x\ln x+2x+c.$

Пример28.

$$\int x^2\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{matrix}\right|=-x^2\cos x+\int 2x\cos xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx.$$

Чтобы вычислить полученный в правой части новый интеграл, еще раз применим метод интегрирования по частям.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C_1 .$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x + C_1) = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x + c .$$

По формуле интегрирования по частям можно вычислять интегралы следующего вида:

1) $\int P_n(x)e^x dx, \quad u = P_n(x)$ – многочлен n - ой степени,

2) $\int P_n(x)\sin x dx, \quad u = P_n(x)$,

3) $\int P_n(x)\ln x dx, \quad u = \ln x$,

4) $\int P_n(x)\arcsin x dx, \quad u = \arcsin x$,

5) $\int P_n(x) arctgx dx, \quad u = arctgx$.

Упражнения. Вычислить интегралы:

14. $\int \cos 5x dx$; 15. $\int e^{-7x} dx$; 16. $\int (3-2x)^4 dx$; 17. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$; 18. $\int \sin^2 x \cos x dx$;

19. $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; 20. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; 21. $\int x\sqrt{x^2+1}dx$; 22. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx$; 23. $\int x \cdot e^{2x} dx$;

24. $\int e^x \sin x dx$; 25. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; 26. $\int x^3 \cdot e^{-x} dx$; 27. $\int \frac{xdx}{3^x}$; 28. $\int (x+1)\ln^2 x dx$;

29. $\int x \cdot 2^x dx$; 30. $\int (x^2+1) \cdot e^x dx$; 31. $\int \left(x^3 - 5x^2 + 1\right) \cdot e^x dx$; 32. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+9}$;

33. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$; 34. $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$; 35. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$; 36. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$; 37. $\int \frac{dx}{e^{3x} - e^x}$;

38. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 39. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$.

5. *Интегрирование рациональных функций*

Целая рациональная функция, то есть многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ интегрируется непосредственно.

Если имеем дробную рациональную функцию, то есть дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, то в случае, когда степень многочлена в числителе не ниже степени многочлена в знаменателе, данная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы целой части (частного от деления $P(x)$ на $Q(x)$) и правильной рациональной дроби (с числителем – остатком от деления и со знаменателем $Q(x)$), то есть такой дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Таким образом, возникает вопрос только об интегрировании правильных рациональных дробей.

Теорема. Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{B}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,4,\cdots)$; III. $\frac{Cx+D}{x^2+px+\eta}$;

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+\eta)^n}$ $(n=2,3,4,\cdots)$, где A, B, C, D, M, N - числовые коэффициенты. При этом предполагается, что трехчлен $x^2+px+\eta$, фигурирующий в дробях III и IV типов, не имеет действительных корней (следовательно, $\frac{p^2}{4}-\eta<0$).

Остановимся на интегрировании простых дробей. Дроби I и II типов мы уже умеем интегрировать: $\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+c$; $\int\frac{B}{(x-a)^k}dx=\frac{B}{1-k}(x-a)^{1-k}+c$.

При интегрировании дробей III и IV типа применяем подстановку $x+\frac{p}{2}=t$.

Пример 29. $\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx=\int\frac{6x+5}{(x+2)^2+5}dx=\begin{vmatrix}x+2=t,\\x=t-2,\\dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{6(t-2)+5}{t^2+5}dt=\int\frac{6t-7}{t^2+5}dt=$

$=3\int\frac{2tdt}{t^2+5}-7\int\frac{dt}{t^2+5}=3\ln(t^2+5)-\frac{7}{\sqrt5}arctg\frac{t}{\sqrt5}+c=3\ln(x^2+4x+5)-\frac{7}{\sqrt5}arctg\frac{x+2}{\sqrt5}+c$.

Пример 30. $\int\frac{3x+2}{x^2-6x+5}dx=\int\frac{3x+2}{(x-3)^2-4}dx=\begin{vmatrix}x-3=t,\\x=t+3,\\dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{3(t+3)-2}{t^2-4}dt=\int\frac{3t+7}{t^2-4}dt=$

$=\frac{3}{2}\int\frac{2tdt}{t^2-4}+7\int\frac{dt}{t^2-4}=\frac{3}{2}\ln|t^2-4|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+c=\frac{3}{2}\ln|x^2-6x+5|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+c$.

Перейдем к вопросу о разложении рациональных дробей на простые дроби. Из курса алгебры известно, что всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше второй разлагается единственным образом на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами, при этом:

1. Каждому неповторяющемуся множителю вида $x-a$ отвечает в разложении одна простая дробь вида $\frac{A}{x-a}$.

2. Каждому множителю вида $(x-a)^k$ отвечает сумма k простых дробей вида $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$.

3. Неповторяющемуся множителю $x^2+px+\eta$ отвечает одна простая дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+\eta}$.

4. Каждому множителю вида $\left(x^2+px+\eta\right)^r$ отвечает сумма r простых дробей вида $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+\eta}+\dfrac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+\eta\right)^2}+\dots+\dfrac{M_rx+N_r}{\left(x^2+px+\eta\right)^r}$.

Здесь A, M, N, A_i, M_i, N_i - числовые коэффициенты.

Для определения этих коэффициентов используют метод неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем: после того как правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ записана в виде суммы простых дробей, в числителях которых стоят неопределенные буквенные коэффициенты, эти дроби приводем к общему знаменателю, которым будет $Q(x)$. Затем отбрасываем знаменатель в обеих частях равенства и получаем равенство двух многочленов: слева – многочлен $P(x)$ с известными коэффициентами, а справа – многочлен с неизвестными буквенными коэффициентами $(n-1)$-й степени. Так как это равенство должно быть тождественным, то, приравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными, из которой и находим эти неизвестные коэффициенты.

Пример 31. $\displaystyle\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx$. Разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$\dfrac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$, где коэффициенты A, B, C пока неизвестны и их численные значения требуется определить. Умножая обе части этого тождества на общий знаменатель $x(x-1)(x+2)$, и затем, отбросив его, мы получим тождество: $2x^2-x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$,

или $\quad 2x^2-x+3=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого тождества, мы получим следующую систему из трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C: $\begin{cases} A+B+C=2, \\ A+2B-C=-1, \\ -2A=3. \end{cases}$

Решая эту систему, найдем $A=-\dfrac{3}{2}$; $B=\dfrac{4}{3}$; $C=\dfrac{13}{6}$. Таким образом:

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2x}+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{6(x+2)}.$$

$$\int\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}dx=-\int\frac{3}{2x}dx+\int\frac{4}{3(x-1)}dx+\int\frac{13}{6(x+2)}dx=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{13}{6}\ln|x+2|+c.$$

Пример 32. $\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx$. Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь, поэтому выделим ее целую часть делением числителя на знаменатель. В результате получим: $\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}=x-2+\frac{2x+6}{x^3+1}=x-2+2\cdot\frac{x+3}{x^3+1}$. Полученную справа правильную дробь разложим на простые дроби: $\frac{x+3}{x^3+1}=\frac{x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

Отсюда $x+3=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$. Полагая $x=-1$, находим $2=3A,\ A=\frac{2}{3}$.

Сравнивая коэффициенты, получим: при x^2: $A+B=0$, отсюда $B=-\frac{2}{3}$;

при x: $-A+B+C=1$, отсюда $C=\frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{x+3}{x^3+1}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{2x-7}{3(x^2-x+1)}$, тогда

$$\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx=\int\left(x-2+\frac{4}{3(x+1)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-7}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}\ln|x+1|-$$

$$-\frac{2}{3}\left(\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-6\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{8}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

Пример 33. $\int\frac{x+1}{(x-1)^2x}dx$.

$\frac{x+1}{(x-1)^2x}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x}$; $x+1=A_1x+A_2\left(x^2-x\right)+B(x-1)^2$. Полагая $x=1$, находим $A_1=2$. Полагая $x=0$, находим $B=1$. Полагая $x=-1$, получаем $0=-2+2A_2+4$, откуда $A_2=-1$. Таким образом, $\frac{x+1}{(x-1)^2x}=\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}$.

$$\int\frac{x+1}{(x-1)^2x}dx=\int\frac{2}{(x-1)^2}dx-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x}=-2(x-1)^{-1}-\ln|x-1|+\ln|x|+c.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

40. $\int\frac{x+2}{x^2-6x+5}dx$; 41. $\int\frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}dx$; 42. $\int\frac{3x-1}{x^3-x^2-2x}dx$;

43. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; 44. $\int\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$; 45. $\int\frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2}dx$;

46. $\int\frac{7x-6}{2x^2-6x+4}dx$; 47. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$; 48. $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}dx$;

49. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 50. $\int\frac{3x^2+x-5}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}dx$.

Лекция 9. Определенный интеграл и его свойства

1. Определение определенного интеграла

Пусть на отрезке [*a, b*] определена непрерывная функция y = *f(x)*. Разобьем отрезок [*a, b*] на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Из каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку c_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой.***

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$, то он и называется ***определенным интегралом*** от функции *f(x)* на отрезке [*a,b*].

В этом случае функция *f(x)* называется ***интегрируемой*** на отрезке [*a,b*].

Обозначение: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$,

где *f(x)* – подынтегральная функция, *a* и *b* – нижний и верхний пределы интегрирования соответственно.

Замечание. По определению полагают, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.

2. Геометрический смысл определенного интеграла. Свойства определенного интеграла

Пусть *f(x)* – положительная, непрерывная на отрезке [*a, b*] функция.

Определение. Фигура, ограниченная сверху графиком функции *y=f(x)*, снизу – отрезком [*a, b*] оси *Ox*, слева и справа – прямыми *x = a*, *x = b* соответственно, называется ***криволинейной трапецией***.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – есть площадь криволинейной трапеции.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

2) Для любых чисел a, b, c справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, *k=const*;

4) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

5) Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$;

6) Если $f(x)$ – неотрицательная функция на $[a;b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ в промежутке $[a;b]$, где $a < b$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

8) (<u>Теорема о среднем</u>). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

<u>Геометрический смысл теоремы о среднем:</u> для площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной кривой, всегда существует равновеликий ей прямоугольник с тем же основанием и высотой – равной одной из ординат этой кривой.

3. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

<u>Определение</u>. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

<u>Теорема</u> (основная теорема интегрального исчисления). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда функция $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x) = f(x)$.

<u>Следствие.</u> Любая непрерывная на $[a;b]$ функция имеет на этом отрезке первообразную.

<u>Теорема.</u> Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $F(x)$ – ее первообразная. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \qquad (28)$$

Формула (28) называется ***формулой Ньютона-Лейбница.***

Пример 1. $\int\limits_2^5 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{16}{4} = \frac{609}{4} = 152\frac{1}{4}$.

Пример2.

$$\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx = \int\limits_1^2 x^2 dx + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4} = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{1}{3x^3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1^3}\right) = \frac{7}{3} + \frac{7}{24} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8}.$$

4. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Если на отрезке [a,b] функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными, то справедлива формула:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du, \text{ где } dv = v'(x)dx, \;\; du = u'(x)dx.$$

Пример 3. $\int_0^1 xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u=x, du=dx \\ dv=e^{-x}dx, v=-e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -1\cdot e^{-1} + 0\cdot e^{0} - e^{-x}\Big|_0^1 =$

$= -e^{-1} - e^{-1} + e^{0} = 2e^{-1} + 1 = \dfrac{e-2}{e}.$

Пример 4. $\int_1^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\dfrac{dx}{x} = 2\cdot\ln 2 - 1\cdot\ln 1 - x\Big|_1^2 =$

$= 2\ln 2 - (2-1) = \ln 4 - 1 = \ln\dfrac{4}{e}.$

Теорема. Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $x=\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi(t)$– функция, заданная на промежутке $[\alpha,\beta]$ и непрерывная на нем вместе со своей производной $\varphi'(t)$; 2) значения функции $x=\varphi(t)$ не выходят за пределы промежутка $[a, b]$ при изменении t в промежутке $[\alpha,\beta]$; 3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тогда имеет место следующая формула:
$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

Пример5. $\int_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x}dx = \begin{vmatrix} \ln x = t, \dfrac{dx}{x} = dt \\ x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=1 \end{vmatrix} = \int_0^1 t^2 dt = \dfrac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}.$

Пример 6. $\int_2^3 \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}dx = \begin{vmatrix} x=t^2, dx=2tdt \\ x=2 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=3 \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{vmatrix} = \int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\dfrac{1+t}{t^2+1}\cdot 2tdt = 2\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\dfrac{tdt}{1+t^2} + 2\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\dfrac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2}\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\dfrac{dt^2}{1+t^2} + 2\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}dt - 2\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\dfrac{dt}{1+t^2} = \ln(t^2+1)\Big|_{\sqrt2}^{\sqrt3} + 2t\Big|_{\sqrt2}^{\sqrt3} - 2arctgt\Big|_{\sqrt2}^{\sqrt3} = \ln\dfrac{4}{3} + 2\left(\sqrt3 - \sqrt2\right) -$
$-2(arctg\sqrt3 - arctg\sqrt2)$.

Упражнения. Вычислить интегралы:

1. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx$; 2. $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 3. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$; 4. $\int_1^e \dfrac{1+\ln x}{x}dx$; 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 xdx$;

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos xdx$; 7. $\int_1^{\sqrt2}\sqrt{2-x^2}dx$; 8. $\int_1^2 x\cdot\log_2 xdx$; 9. $\int_1^e \ln^3 xdx$; 10. $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$.

Лекция 10. Приложения определенного интеграла

1. *Понятие площади фигуры*

Пусть дана произвольная плоская фигура (P), ограниченная замкнутой кривой, которую называют границей или контуром данной фигуры, P – площадь фигуры (P).

Рассмотрим всевозможные многоугольники (A) площади A, целиком содержащиеся в (P), и многоугольники (B) площади B, целиком содержащие в себе (P).

Для площадей этих многоугольников будем всегда иметь $A \le B$. Отсюда следует, что множество чисел $\{A\}$ ограничено сверху, например, любым числом B. Следовательно, это множество имеет верхнюю грань $P_* = \sup\{A\}$ и, кроме того, $P_* \le B$, где B – площадь любого многоугольника (B). Так как множество чисел $\{B\}$, таким образом, ограничено снизу числом P_*, то оно имеет конечную нижнюю грань $P^* = \inf\{B\}$, причем $P_* \le P^*$. Это следует из того, что P_* является просто нижней границей для множества $\{B\}$, а P^* - нижняя грань этого множества, то есть наибольшая из нижних границ.

Определение. Если $P_* = P^* = P$, то их общее значение P называется площадью фигуры (P), а саму фигуру в этом случае называют ***квадрируемой.***

Теорема. Для того чтобы фигура (P) была квадрируемой необходимо и достаточно, чтобы существовали две последовательности многоугольников $\{(A_n)\}$ и $\{(B_n)\}$, содержащихся в (P) и содержащих (P) соответственно, площади которых имели бы общий предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = P.$

Следствие. Вместо многоугольников можно брать произвольные квадрируемые фигуры, содержащиеся в (P) («входящие») и содержащие (P) («выходящие»): (Q_n), (R_n), для которых $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_n = P.$

Свойства площади.

1. Если фигура (P) разбита на две фигуры (P_1) и (P_2) (рис. 4), то $P = P_1 + P_2$.
2. Площадь части фигуры меньше чем площадь всей фигуры $P_1 < P$.
3. Конгруэнтные (равные) фигуры имеют равные площади.

2. *Площадь фигуры в декартовых координатах*

Теорема. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью абсцисс и с боков – прямыми $x = a$, $x = b$– квадрируема.

Из теоремы следует, что площадь P данной криволинейной трапеции существует и равна интегралу:

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Рассмотрим частные случаи функции $y = f(x)$.

1) Пусть $f(x) \le 0$ на [*a*, *b*], тогда $\varphi(x) = -f(x) \ge 0$: $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

2) Если на отрезке [*a*, *b*] функция $y = f(x)$ меняет знак, то площади суммируются: $S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$.

3) Если $f_2(x) > f_1(x)$ на отрезке [*a*,*b*], то $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$.

Приведем ***алгоритм нахождения площади*** плоской фигуры с помощью определенного интеграла.

- Построить графики граничных функций. Определить искомую фигуру.
- Найти пределы интегрирования *x*= *a*, *x*= *b*.
- Записать площадь искомой фигуры с помощью определенного интеграла по формулам:

а) $S = \int_a^b f(x)dx$ (если $f(x) \ge 0$ на [*a*, *b*]) или

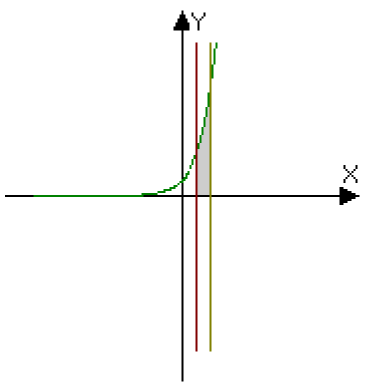
$S = -\int_a^b f(x)dx$ (если $f(x) < 0$ на [*a*, *b*]) в случае, когда данная фигура ограничена осью *OX* и графиком кривой $y = f(x)$.

б) $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$ в случае, когда данная фигура ограничена кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ ($f(x) \ge \varphi(x)$) и прямыми *x*=*a* и *x*=*b*.

- Вычислить полученные интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница.
- Выписать искомую площадь.

Пример 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = e^x$, *x=1*, *x=2*, *y=0*.

Решение. Построим графики данных линий в одной системе координат.



Нам надо найти площадь закрашенной фигуры.

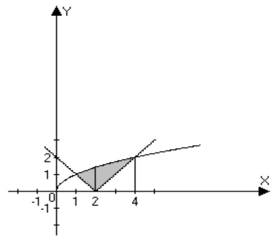
Пределами интегрирования будут *x=1* и *x=2*. Так как $f(x) = e^x > 0$ на отрезке [1, 2], то площадь фигуры будет $S = \int_1^2 e^x dx$.

Вычислим полученный интеграл, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

$$S=\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1).$$

Итак, искомая площадь фигуры $S = e(e-1)$ $(ед^2)$.

Пример 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=|x-2|$ и $y=\sqrt{x}$.



Решение. Искомая площадь может быть вычислена как сумма площадей двух смежных криволинейных трапеций:

$$S=S_1+S_2=\int_1^2(\sqrt{x}-(2-x))dx+\int_2^4(\sqrt{x}-(x-2))dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2-2x\Big|_1^2+$$

$$+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4-\frac{1}{2}x^2\Big|_2^4+2x\Big|_2^4=\frac{13}{6}.$$ Итак, искомая площадь фигуры $S=\frac{13}{6}$ **$(ед^2)$.**

Упражнения. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y=x^2-3x,\ x=-2$ *и осью ох*; 2. $y^2=4x,\ x=2$; 3. $y^2=9x,\ y=3x$; 4. $y^2=2x+1,\ y=x-1$; 5. $y=3-2x-x^2,\ y=0$; 6. $y=\ln x,\ y=0,\ x=e$; 7. $y=5x-x^2+6,\ y=0$; 8. $y=3x^2-6x,\ y=0,\ x=4$ *на отрезке* $[0;4]$; 9. $y=\sin x,\ y=0$ *на отрезке* $[0;\pi]$; 10. $y=2x^2+3x-9,\ y=0$; 11. $y=x^2+6x+5,\ y=0$; 12. $y=2x^2,\ x=1,\ x=2$; 13. $y=\frac{1}{4}x^3,\ x=0,\ x=2$; 14. $y=0,\ y=x^3-6x^2+11x-6$; 15. $y=x^2,\ x=y^2$; 16. $y=0,\ y=(x+2)^2,\ y=4-x$; 17. $y=0,\ y=(x-4)^2,\ y=16-x^2$; 18. $xy=3,\ x+y=4$; 19. $xy=4,\ x=1,\ x=5,\ y=0$; 20. $y=\frac{8}{4+x^2},\ y=\frac{x^2}{4}$; 21. $y=\frac{1}{x^2},\ x=3,\ y=0$; 22. $y=\frac{1}{x},\ x=2,\ y=0$; 23. $y=0,\ y=\frac{1}{1+x^2}$; 24. $y=\frac{1}{x^2\sqrt{x}},\ x=4,\ y=0$; 25. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ x=1,\ y=0$; 26. $y=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x=0,\ x=9$.

3. Вычисление длины дуги в прямоугольных координатах

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y=f(x),\ a\le x\le b$, где $f(x)$ – непрерывная функция на промежутке $[a;b]$. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_i, M_{i+1}, \cdots, M_n=B$ (занумерованными по порядку от A до B). Соединив эти точки хордами, получим некоторую вписанную ломаную линию, периметр которой обозначим через p.

Определение. Если существует конечный предел l периметра p вписанной в кривую ломаной, когда наибольшее из ее звеньев стремится к нулю, то этот предел называется ***длиной дуги*** AB:

$$l = \lim_{M \to 0} p,$$

где M – длина наибольшего звена ломаной.

Кривую, длина которой существует, называют ***спрямляемой.***

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на промежутке $[a;b]$, то кривая AB спрямляема, и длина ее выражается формулой:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \qquad (29)$$

Пример 3. Найти длину дуги цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от $x = 0$ до $x = a$.

Решение. Из уравнения цепной линии находим: $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Применяя (29), получим:

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_0^a = \frac{a}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Упражнения. Вычислить длину:

1. Окружности радиуса R с центром в начале координат;
2. Цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между точками с абсциссами 0 и 2;
3. Дуги параболы $y = x^2$ от вершины до точки с абсциссой 1;
4. Дуги кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой 1 до точки с абсциссой $\sqrt{3}$;
5. Дуги линии $y = e^x$ от точки $x = 0$ до точки $x = 2$;
6. Дуги кривой $y = \arcsin e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

4. Вычисление объема тела. Объем тела вращения

Пусть для некоторого тела высотой *h* площадь сечения (перпендикулярного оси *OZ) S* может быть выражена как функция высоты этого тела *S=S(z)* В этом случае объем тела *V* вычисляется по формуле: $V = \pi\int_0^h S(z)dz$.

Пример 4. Вычислите объем конуса высотой *H* и радиусом основания *R.*
Решение. Каждое сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости *XOY* есть окружность радиуса *r*. Из геометрии известно, что радиус сечения *r*

выражается через расстояние сечения до вершины h и высоту конуса H: $H-r=\frac{hR}{H}$ – следовательно, площадь сечения $S(h)=\pi\cdot\frac{R^2}{H^2}\cdot h^2$. Искомый объем вычисляется по формуле: $V=\int_0^H \pi\cdot\frac{R^2}{H^2}\cdot h^2dh=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{h^3}{3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H$ (ед^3).

<u>Объем тела вращения.</u>

Рассмотрим тело, полученное вращением некоторой кривой $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ вокруг оси ox. Объем полученного тела вращения выражается формулой:

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2dx \text{ или } V=\pi\int_a^b y^2dx$$

<u>Замечание.</u> Тело, имеющее объем, называется ***кубируемым***.

Пример 5. Найдите объем шара радиуса R.

Решение. Будем рассматривать круг радиуса R с центром в начале координат. Этот круг, вращаясь вокруг оси OX, образует шар. Уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=R^2$, поэтому $y^2=R^2-x^2$. Учитывая симметрию круга относительно оси ординат, найдем сначала половину искомого объема:

$$\frac{1}{2}V_ш=\pi\int_0^R[f(x)]^2dx=\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R=\pi\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Следовательно, объем всего шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$ (ед^3).

Упражнения. Определите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:
1. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг оси OX; **2**. $y=|x|$, $y=3$ вокруг оси OX; **3**. $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=\frac{4}{3}$; **4.** Найти объем тела, образованного вращением параболы $y^2=x$ вокруг оси ox и ограниченного плоскостью $x=4$; **5.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2=x$ и прямыми $x=1$ и $x=2$; **6.** Найти объем тела, образованного вращением дуги синусоиды от точки $x=0$ до точки $x=\pi$; **7.** Найти объем криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $x=1$ и $x=3$; **8.** Найти объем криволинейной трапеции, ограниченной цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x=-2$ и $x=2$; **9.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2=x$ и $y=x^2$; **10.** Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболами $y=-x^2+3$ и $y=x^2+1$; **11.** Найти объем тела, образованного вращением косинусоиды $y=\cos x,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Лекция 11. Комплексные числа

1. Основные понятия

Определение. ***Комплексным числом*** z называется упорядоченная пара действительных чисел (x; y), первое из которых x называется его ***действительной частью***, а второе число y – ***мнимой частью.***
Обозначение: $z = x + iy$. ***Символ i*** называется ***мнимой единицей***.

Если $x=0$, то число $0 + iy = iy$ называется ***чисто мнимым***, если $y=0$, то число $x + i\cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\boldsymbol{C}$ всех комплексных чисел, то есть $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Число x называется ***действительной частью комплексног числа*** z и обозначается $x = Re\, z$, а y – ***мнимой частью,*** $y = Im\, z$.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными*** ($z_1=z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, то есть $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Определение. Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости Oxy, такой что о $x = Re\, z, y = Im\, z$ и наоборот.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью*** и обозначается (z). Ось Ox называется ***действительной осью***, ось Oy – ***мнимой осью***.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью ***радиус-вектора*** $\overline{OM} = \bar{r} = \overline{(x;y)}$.

Определение. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z называется ***модулем*** комплексного числа и обозначается $|z|$ или r.

Модуль числа $z = x + iy$ определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, назвается ***аргументом*** этого числа, обозначается $Arg\, z$.

Для нулевой точки $z = 0$ аргумент не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k,\ k\in Z$, где $arg\, z = \varphi$ – ***главное значение*** аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi;\pi]$.

Для аргумента φ имеем: $\cos\varphi=x/r$, $\sin\varphi=y/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Отсюда получаем: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$.

Определение. Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется ***тригонометрической формой***.

Два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме ***равны*** тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k (k \in Z)$.

Главное значение аргумента можно найти из формулы $tg\,\varphi=y/x$, учитывая, что $\varphi\in(-\pi;\pi]$, получаем:

$$\varphi = arg\, z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \text{ при } x>0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x}+\pi, \text{ при } x<0, y>0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x}-\pi, \text{ при } x<0, y<0. \end{cases}$$

2. Действия над комплексными числами

Определение. Пусть даны два комплексных числа в алгебраической форме $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. ***Сумма, разность, произведение*** и ***частное*** комплексных чисел определяются следующими равенствами:

I. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\cdot(y_1 + y_2)$;

II. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\cdot(y_1 - y_2)$;

III. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\cdot(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

IV. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$, $(z_2 \neq 0)$.

Из равенства III, в частности, получаем важное соотношение

$i\cdot i = (0 + i\cdot 1)\cdot(0 + i\cdot 1) = (0-1) + i\cdot(0+0) = -1$, то есть $i^2 = -1$. (30)

Замечание. Правило умножения III получается формально путем умножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ с учетом (30).

Очевидно, что для $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ имеем $z\cdot\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Пример 1. Даны $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 2 - i$. Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1 / z_2.

Решение. $z_1 + z_2 = 3 + i$; $z_1 - z_2 = -1 + 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = (1+2i)\cdot(2-i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i - 2(-1) = 4 + 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{2+4i+i+2i^2}{4+1} = \frac{2+5i+2(-1)}{5} = \frac{5i}{5} = i.$$

Геометрическое истолкование действий с комплексными числами.

При сложении комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (по правилу параллелограмма).

При вычитании комплексных чисел их радиусы-векторы вычитаются.

Теорема. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

Доказательство. Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] =$
$= r_1 r_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Отсюда $|z_1\cdot z_2| = r_1\cdot r_2 = |z_1|\cdot|z_2|$ и $Arg\, z_1\cdot z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$, где значения многозначных функций Arg, стоящих в левой и правой частях последнего равенства, следует подбирать соответствующим образом. *Теорема доказана.*

Следствие. (Формула Муавра для возведения комплексного числа в натуральную степень). $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (31)

Теорема. Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а аргумент частного равен разности аргумента делителя и делимого, то есть $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, $(z_2 \neq 0)$.

Извлечение корня из комплексного числа.

Теорема. Корень *n-ой* степени из комплексного числа имеет *n* различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1. \qquad (32)$$

Доказательство. $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$, где $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда имеем $z = [\rho(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$. Таким образом: $r = \rho^n$, $n\psi = \varphi + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ или $\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$, $\psi = Arg\sqrt[n]{|z|} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}$.

Заметим, что здесь под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня.

Здесь в качестве числа *k* достаточно брать лишь значения *k=0, 1, 2,…, n– 1*, так как при всех прочих значениях *k* получаются повторения уже найденных значений корня. *Теорема доказана.*

Пример 2. Вычислить $(-1 - i\sqrt{3})^9$.

Решение. Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \varphi = arctg\frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$, то есть $-1 - i\sqrt{3} =$ $= 2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$. По формуле Муавра (31) имеем

$$(-1 - i\sqrt{3})^9 = [2(\cos(-\frac{2\pi}{3}\} + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))]^9 = 2^9(\cos(-6\pi) + i\sin(-6\pi)) = 2^9(1 + i\cdot 0) = 2^9 = 512.$$

Пример 3. Решить уравнение $z^3 + 8 = 0$ на множестве ***C.***

Решение. Запишем уравнение в виде $z = -8$ или $z = \sqrt[3]{-8}$. Число -8 запишем в тригонометрической форме: $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. По формуле (32) находим

$$z = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}) = 2(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}),$$

где $k = 0, 1, 2$. Полагая $k = 0, 1, 2$, получаем:

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2,$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса *R=2* с центром в начале координат.

Упражнение. Вычислить: $\sqrt{2i}$; $\sqrt{3-4i}$; $\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt[4]{2 - i\cdot 2\sqrt{3}}$; $\sqrt[7]{3+4i}$; $\sqrt[5]{1}$; $\sqrt[4]{i}$.

Лекция 12. Дифференциальные уравнения

1. *Основные понятия*

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную *x*, искомую (неизвестную) функцию *y(x)* и ее производные, называется (***обыкновенным) дифференциальным уравнением.***

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

$F(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n)}(x)) = 0 -$ дифференциальное уравнение ***n****-го* порядка.

Дифференциальное уравнение ***n****-го* порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид: $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n-1)}(x)).$ (33)

Определение. ***Решением*** дифференциального уравнения (33) *называется* функция *y=φ(x)*, непрерывная вместе со своими производными до порядка ***n*** включительно, которая при подстановке в уравнение (33) обращает его в тождество, то есть $\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x),\ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$

Решение, которое содержит столько производных постоянных, каков порядок дифференциального уравнения, называется ***общим решением***: $y = \varphi(x, C_1,\ldots, C_n) -$ общее решение уравнения (33).

Если задать конкретные значения произвольным постоянным, то получим ***частное решение.***

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его ***интегрированием,*** а график решения дифференциального уравнения – ***интегральной кривой.***

2. *Дифференциальные уравнения первого порядка. Некоторые типы уравнений*

Общий вид: $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ или в виде, разрешенном относительно производной: $y' = f(x, y).$ (34)

$y = \varphi(x, C) -$ общее решение.

Дифференциальное уравнение (34) можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

или в виде $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (35),

где *P(x,y)* и *Q(x,y)* – известные функции.

Уравнение в симметричной форме (35) удобно тем, что переменные *x* и *y* в нем равноправны, то есть каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Теорема (Коши). Если в уравнении (34) функция *f(x,y)* и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области *G* плоскости *Oxy*, то какова бы ни была внутренняя точка (x_0; y_0) области *G*, существует единственное решение *y=φ(x)* данного уравнения, удовлетворяющее условию $y=y_0$ при $x=x_0$ (или $y(x_0)=y_0$). (36)

Геометрически теорема утверждает, что через внутреннюю точку (x_0; y_0) области *G* проходит единственная интегральная кривая.

Условия (36) называются ***начальными условиями.***

Задача отыскания решения уравнения (34), удовлетворяющего начальным условиям (36) называется ***задачей Коши.*** С геометрической точки зрения решить задачу Коши – означает из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку точка $(x_0;y_0)$ плоскости Oxy.

Общего метода решения дифференциальных уравнений первого порядка не существует. Рассмотрим некоторые типы таких уравнений, для каждого из которых дается свой способ решения.

3. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида $P(x)N(y)dx + Q(y)M(x)dy = 0$ (37)
(или $y' = f(x)g(y)$), где $P(x)$, $N(y)$, $Q(y)$, $M(x)$, $(f(x), g(y))$ – непрерывные функции, зависящие только от одного аргумента, называется дифференциальным уравнением ***с разделяющимися переменными.***

Для решения уравнения (37) разделим обе его части на произведение $N(y)M(x) \neq 0$ («разделим переменные»), получим после сокращений: $\frac{P(x)dx}{M(x)} + \frac{Q(y)dy}{N(y)} = 0$, (38) – уравнение ***с разделенными переменными***, так как в уравнении (38) перед dx стоит функция только от x, а при dy стоит функция только от y. Беря интегралы от левой и правой частей равенства (38), будем иметь $\int \frac{P(x)}{M(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C$, (39) – общее решение уравнения (37), выраженное в неявной форме (***общий интеграл***).

Замечание. При делении обеих частей уравнения (37) на выражение $N(y)M(x) \neq 0$ могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример 1. Решить уравнение $x^2y^2y' + 1 = y$.

Решение. Разрешаем уравнение относительно y', получим $y' = \frac{y-1}{x^2y^2}$.

Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2y^2}$. Умножаем обе части на dx и разделяя переменные, получаем: $\frac{y^2dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2}$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, будем иметь $\int \frac{y^2}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2}$, или $\int (y + 1 + \frac{1}{y-1})dy = \int x^{-2}dx$. Используя методы разложения и подстановки, получаем: $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$ – общий интеграл данного уравнения, где C – произвольная постоянная. Заметим, что $y=1$ – является решением уравнения, оно было потеряно при делении на $(y-1)$.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида $y' + p(x)y = f(x)$ (40)
где *p(x), f(x)* – непрерывные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.***

Если *f(x)=0*, то уравнение (40) называется ***линейным однородным*** уравнением. Если *f(x)≠0*, то уравнение (40) называется ***линейным неоднородным*** уравнением.

Метод вариации произвольной постоянной для нахождения общего решения уравнения (40).

1. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение: $y' + p(x)y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем: $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$, $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ (41) – общее решение линейного однородного уравнения.
2. Будем искать общее решение линейного неоднородного уравнения (40) в виде (41), где *C = C(x)*, то есть в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, (42), где *C(x)* – новая неизвестная функция. Чтобы найти её и тем самым решение в виде (42), подставим функцию (42) в уравнение (40). Получим:

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$, или $C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$.

Интегрируя его, находим: $C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение в (42), получаем общее решение линейного уравнения (40).

Пример 2. Решить уравнение $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Здесь *p(x)=2/x*, *f(x)=2x³*.

1. Составим соответствующее однородное уравнение: $y' - \frac{2y}{x} = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, находим $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$, или $y = Cx^2$.
2. Ищем общее решение данного уравнения в виде $y = C(x)x^2$. Дифференцируя, находим $y' = C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x$. Подставляя в данное уравнение выражения для y и y', получаем $C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}\cdot C(x)x^2 = 2x^3$ или $C'(x) = \frac{2x^3}{x^2} = 2x$, откуда $C(x) = \int C'(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид $y = (x^2 + C_1)x^2$.

5. Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид: $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$ или в виде, разрешенном относительно второй производной: $y'' = f(x, y(x), y'(x))$. (43)

Задача отыскания решения уравнения (43) по заданным ***начальным условиям***: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ (44) называется ***задачей Коши.***

Функция $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2, называется ***общим решением*** уравнения (43) в некоторой области G, если она является решением уравнения (43) при любых значениях постоянных C_1 и C_2 и если при любых начальных условиях (44) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Всякая функция $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$, получающаяся из общего решения $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ уравнения (43) при определенных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, называется ***частным решением.***

Пример 3. Решить уравнение $y''=2$.

Решение. Общее решение заданного уравнения найдем путем его двукратного последовательного интегрирования: $y'=2x+C_1$, $y=x^2+C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. Уравнение вида $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, (45)

где y – искомая функция, а $p(x), q(x), f(x)$ – непрерывные функции на некотором интервале (a, b), называется ***линейным дифференциальным уравнением второго порядка***.

Если $f(x)=0$, то уравнение (45) называется ***линейным однородным*** уравнением. Если $f(x)\neq 0$, уравнение (45) называется ***линейным неоднородным*** уравнением.

Рассмотрим некоторые свойства линейных однородных уравнений второго порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$. (46)

Теорема. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения (46), то функция $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является решением уравнения (46).

Доказательство. Продифференцируем дважды функцию $y(x) = C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ и, подставив выражения для y, y', y'' в левую часть уравнения (46), получим:

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+p(x)(C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x))+q(x)(C_1y_1(x)+C_2y_2(x))=$$
$$=C_1[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)]+C_2[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)].$$

Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по условию являются решениями уравнения (46), то выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю, а это значит, что функция $y(x) =C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ является решением уравнения (46). *Теорема доказана.*

Определение. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются ***линейно-зависимыми*** на (a,b), если существуют такие числа α_1 и α_2, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для любого $x\in(a,b)$ имеет место равенство $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)=0$. (47)

В противном случае – равенство (47) выполняется сразу для всех $x\in(a,b)$, только если $\alpha_1=\alpha_2=0$, – функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются ***линейно-независимыми*** на (a, b)

Теорема. Если решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (46) линейно-независимы на (a, b), то определитель (***определитель Вронского***), составленный из них $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ на этом интервале.

Теорема. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно-независимые на (a, b) решения уравнения (46), то функция $y = C_1y_1(x)+ C_2y_2(x),$ (48) где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (46) на (a, b).

7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Теорема. Общее решение уравнения (45) есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения: $y = \tilde{y}(x) + Y(x)$, где $\tilde{y}(x)$ – частное решение уравнения (45), а $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (46).

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применяется метод вариации произвольных постоянных, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ – общее решение однородного уравнения. Будем искать частное решение неоднородного уравнения (45) в виде:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{50}$$

рассматривая C_1 и C_2 как некоторые искомые функции. Подставляя (47) в уравнение (45), получаем для нахождения $C_1(x)$и $C_2(x)$ систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{51}$$

в которой $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$ неизвестны, а $y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y'_2(x)$ и $f(x)$ известны. Так как определителем этой системы является определитель Вронского $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, составленный из линейно-независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (46), то он не равен нулю, а значит, система (51) имеет единственное решение относительно $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$. Решив эту систему, получим $C'_1(x)=\varphi_1(x)$, $C'_2(x)= \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – известные функции, откуда, интегрируя, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Подставляя полученные выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (50), получим искомое частное решение уравнения (45).

8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{52}$$

где p и q – действительные числа.

Теорема. Если число k является корнем уравнения

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{53}$$

то функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (52).

Уравнение (53) называется ***характеристическим*** уравнением данного уравнения (52). Характеристическое уравнение является квадратным уравнением: его корни k_1 и k_2.

Теорема. Общее решение уравнения (52) может быть записано следующим образом:

1) если корни характеристического уравнения действительные и различные ($k_1 \neq k_2$), то общее решение имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) если корни характеристического уравнения действительные и равные ($k_1 = k_2$), то общее решение имеет вид $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$;

3) если корни характеристического уравнения комплексные ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$), то общее решение имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Пример 4. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$, его корни $k_1 = 1$, $k_2 = -2$ – действительные и различные. Общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 6k + 9 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 3$ – действительные и равные. Общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

Пример 6. Решить уравнение $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 10 = 0$, его корни $k_{1,2} = -1 \pm i3$ – комплексные. Общее решение уравнения имеет вид: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (54)$$

где p и q – действительные числа, $f(x)$ – непрерывная функция.

Мы знаем, что общее решение такого уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения можно применять метод вариации произвольных постоянных. В ряде случаев можно использовать ***метод неопределенных коэффициентов***. Этот метод позволяет находить частное решение неоднородного уравнения для некоторых специальных видов правой части $f(x)$ (если в правой части стоит многочлен, или показательная функция, или тригонометрическая функция $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, или линейная комбинация из названных функций).

Случай 1. $f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m. Тогда уравнение (54) будет иметь частное решение вида $\tilde{y} = x^r Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $Q_m(x)$ – общий вид многочлена степени m, r – кратность корня α характеристического уравнения, то есть число корней характеристического уравнения, равных α ($r=0$, если α не является корнем характеристического уравнения).

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 3x^2$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 1 = 0$, его корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ – действительные и различные. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$. Правая часть $f(x) = 3x^2$. Имеем: $m=2$, $\alpha = 0$, $r=0$; частное решение ищем в виде $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$ и подставляя $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в данное уравнение, находим: $2a - ax^2 - bx - c \equiv 3x^2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства: $-a = 3,\ \ -b = 0,\ \ 2a - c = 0$, находим $a = -3,\ \ b = 0,\ \ c = -6$. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\tilde{y} = -3x^2 - 6$, а его общее решение – $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 3x^2 - 6$.

<u>Случай 2.</u> $f(x) = [P_m(x)\cos\beta x + Q_n \sin\beta x)] \cdot e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно. Тогда уравнение (54) будет иметь частное решение вида $\tilde{y} = x^r\,[R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\,] \cdot e^{\alpha x}$, где $R(x)$ и $S(x)$ – многочлены степени $N = max\{m,\ n\}$, r – кратность корня $\alpha + \imath\beta$ характеристического уравнения, то есть число корней характеристического уравнения, равных $\alpha + \imath\beta$ ($r=0$, если $\alpha + \imath\beta$ не является корнем характеристического уравнения).

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 4\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 1 = 0$, его корни $k_{1,2} = \pm\imath$ – комплексные. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Правая часть: $f(x) = 4\sin x$. Имеем: $P_m(x) = 0$, $m=0$, $Q_n(x) = 4$, $n=0$, $N=0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, так как число $\alpha + \imath\beta = 0 + \imath = \imath$ является одним из корней характеристического уравнения, то $r=1$; частное решение ищем в виде $\tilde{y} = x \cdot [a \cdot \cos x + b \cdot \sin x]$. Дифференцируя и подставляя в уравнение, получим $-2a \cdot \sin x + 2b \cdot \cos x \equiv 4\sin x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, находим $-2a = 4,\ \ 2b = 0$, отсюда $a = -2, b = 0$. Таким образом, частное решение уравнения имеет вид $\tilde{y} = x(-2 \cdot \cos x) = -2x\cos x$, а его общее решение – $y = \tilde{y} + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x$.

Упражнения.

1. Показать, что данная функция является решением данного уравнения:

а) $y = (x+5)e^x,\ \ y' - y = e^x$; ***б)*** $y = \ln\cos x,\ \ y' = -tgx$; ***в)*** $y = Ce^{-3x},\ \ y' + 3y = 0$.

2. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1-y)dx - (1-x)dy = 0$; ***б)*** $\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; ***в)*** $y' - x^2 y = 0$; ***г)*** $xyy' = 1 + x^2$;

д) $y' = x + y$; ***е)*** $y' + x^2 y = x^2$; ***ж)*** $y' + \dfrac{y}{1+x} + x^2 = 0$; ***з)*** $xy' + y = 3$.

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а) $y' = 8y, y(0) = 4$; ***б)*** $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0, y(1) = 2$; ***в)*** $1 + y^2 = xyy', y(2) = 1$;

г) $y' - 2xy = 1 - 2x^2, y(0) = 2$; ***д)*** $xy' - y - x^2 = 0, y(2) = 4$; ***е)*** $y'\sin x - y\cos x = 1, y(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 5y' + 6y = x;$; ***б)*** $y'' + 4y' + 4y = 3e^{3x}$; ***в)*** $y'' + 4y = 8\sin 2x$; ***г)*** $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}\cos x$.

Лекция 13. Элементы комбинаторики

1. Правила комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Многие комбинаторные задачи решаются с использованием двух правил – правила сложения и правила умножения.

Теорема (правило сложения). Если некоторый объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать k способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов ***a или b*** можно выбрать $(m+k)$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Теорема (правило умножения). Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать m способами, а второй объект (элемент b) можно выбрать k способами, то упорядоченную пару $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$ можно выбрать $m\cdot k$ способами.

Это правило распространяется на случай трёх и более объектов.

Пример 1. Сколько чисел, содержащих не менее двух попарно различных цифр, можно составить из цифр 1,3,5,7,9?

Решение. По правилу умножения двузначных чисел можно составить $5\cdot4 = 20$ способами, трехзначных чисел – $5\cdot4\cdot3 = 60$ способами, а четырехзначных – $5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$ способами, столько же пятизначных чисел – $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$. По правилу сложения, всего можно составить $20 + 60 + 120 + 120 = 320$ чисел, состоящих не менее чем из двух попарно различных цифр.

2. Размещения, перестановки, сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Определение. ***Размещением из n элементов по k элементов*** $(0 \le k \le n)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k и вычисляется по формуле: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, где $n! = 1\cdot2\cdot3\ldots\cdot n$, причем $0! = 1$, $1! = 1$.

Определение. ***Перестановкой из n элементов*** называется размещение из n элементов по n элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = A_n^n = n!$.

Определение. ***Сочетанием из n элементов по k элементов*** $(0 \le k \le n)$ называется любое подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k и вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Числа C_n^k называются ***биномиальными коэффициентами***.

Свойства биномиальных коэффициентов.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (правило симметрии).
2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (правило Паскаля).
3. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать из студенческой группы, состоящей из 15 человек, старосту, физорга и организатора культмассовой работы?

Решение. Любой такой выбор является размещением из 15 по 3 (так как порядок расположения элементов в тройке существенен). Значит, число способов выбора равно $A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

Пример 3. Сколькими способами можно расставить на книжной полке четырехтомник М.Зощенко?

Решение. Число способов расстановки 4 книг равно числу перестановок из 4 элементов: $P_4 = 4! = 24$.

Пример 4. Сколькими способами можно выбрать из студенческой группы, состоящей из 15 человек, трех дежурных?

Решение. Так как порядок выбора дежурных не имеет значения, то выбрать 3 из 15 можно $C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ способами.

3. Схема выбора с возвращением

Если при выборе k элементов из n элементов заданного множества выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге, то говорят о ***схеме выбора с возвращением***.

Если при упорядоченной выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки называются ***размещениями с повторениями***.

Число всех размещений с повторениями из n элементов по k элементов обозначается $\overline{A_n^k}$ (черта указывает на возможность повторения элементов) и вычисляется по формуле $\overline{A_n^k} = n^k$. (55)

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, то есть повторяться), то полученные выборки называются ***сочетаниями с повторениями***.

Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается $\overline{C_n^k}$ и вычисляется по формуле $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$. (56)

Пусть множество из n элементов содержит k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется n_1 раз, 2-й – n_2 раз, …, ***k***-й – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Тогда перестановки элементов данного множества называются ***перестановками с повторениями***.

Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}$. (57)

Пример 5. Четыре человека вошли в лиф на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?
Решение. Каждый из четырех пассажиров может выйти на любом из восьми этажей, начиная со 2-го по 9-й включительно. Возможными вариантами выхода являются, например, 2-2-2-2 (все вышли на втором этаже) или 2-5-7-7 (на втором этаже вышел один, на пятом – один, а двое вышли на седьмом) и т.д. Общее число выходов пассажиров находим, используя формулу (55): $\overline{A_8^4} = 8^4 = 4096$.

Пример 6. Сколько различных «слов» (под «словом» понимается любая комбинация букв) можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?
Решение. В слове «математика» 10 букв, причем буква М повторяется два раза, буква А – три раза, буква Т – два раза, а перестановка одинаковых букв не меняет «слова». Поэтому число перестановок с повторениями меньше числа перестановок (без повторений) во столько раз, сколько можно переставлять повторяющиеся буквы. Применяем формулу (57): здесь n=10, n_1 =2 (2 буквы М), n_2 = 3 (3 буквы А), n_3 =2 (2 буквы Т), n_4 = 1 (1 буквы Е), n_5 =1 (1 буквы И), n_6 = 1 (1 буквы К), получаем $P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$ «слов».

Пример 7. Сколько наборов из 5 пирожных можно составить, если в кондитерской имеется 4 вида пирожных?
Решение. Поскольку порядок расположения пирожных в наборе не играет роли, то искомое число наборов равно числу сочетаний с повторениями из 4 по 5. По формуле (56) имеем $\overline{C_4^5} = C_{5+4-1}^5 = C_8^5 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ наборов.

Замечание. Комбинаторика используется во многих задачах классической теории вероятностей.

Упражнения.

1. Сколькими способами золотая, серебряная и бронзовая медали могут быть распределены среди 12 участников соревнований?
2. Сколько номеров, состоящих из трех букв, за которыми идут четыре цифры, можно составить, используя 32 буквы и 10 цифр?
3. На окружности выбраны 8 точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках?
4. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы слова «парабола»? слова «гипербола»? слова «комбинаторика»?
5. Сколькими способами можно распределить 6 разных книг между 3 студентами?
6. Сколько имеется семизначных чисел, все цифры у которых различны?

Лекция 14. Определение вероятности. Основные теоремы теории вероятностей

1. *Случайные события: основные понятия*

Определение. ***Случайным событием*** называется такой исход испытания, который может произойти или не произойти.

Обозначение: $A, B, C, \ldots$.

Пример 1. Студент экзамен сдает или не сдает.

Определение. Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно наступит в результате данного испытания (обозначается через Ω).

Событие называется ***невозможным***, если оно заведомо не произойдет в результате проведения испытания (обозначается через Ø).

Пример 2. Достоверно, что при подбрасывании монета упадет; невозможно, что она зависнет в воздухе.

Определение. ***Противоположным*** для события A называется событие, обозначаемое $\overline{A}$, которое совершается тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Каждому событию A, B, C соотносится некоторое число $P(A), P(B), P(C)$ – вероятность события.

2. *Классическое определение вероятности*

Определение. Несколько событий называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие (т.е. все события имеют равные «шансы»).

Определение. Под ***вероятностью*** $P(A)$ события A понимается отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу равновозможных исходов $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число исходов, m – число благоприятствующих событию A исходов.

Пример 3. Вероятность события A: «При подбрасывании монеты выпадет цифра 6» равна $P(A) = 1/6$, так как $n = 6$, $m = 1$.

Свойства вероятности.

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\varnothing) = 0$.
3. $P(\Omega) = 1$.
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. *Геометрическое определение вероятности*.

Пусть число исходов испытания бесконечно.

Определение. Пусть исходы испытаний распределены равномерно в бесконечной области $S_{общ}$. Тогда вероятность события A, состоящего в том, что исход испытания окажется заключен в некоторой части S, равна $P(A) = S/S_{общ}$.

Пример 4. На отрезке L длины 20 см. помещен меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на отрезке L, попадет и на отрезок l.

Решение. Искомая вероятность $P(A)=(длина\ отрезка\ l)/(длина\ отрезка\ L)= =10/20=1/2$.

4. *Теорема сложения вероятностей*

Определение. ***Суммой*** событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A и B (т.е. или A или B или оба вместе). Обозначение: $A+B$ или $A \cup B$.

Определение. ***Произведением*** событий A и B называется событие, которое происходит, когда события A и B выполняются вместе. Обозначение: AB.

Определение. События A и B называются ***несовместными***, если их произведение AB – невозможное событие (т.е. появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании). В противном случае события называются ***совместными***.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны.

Доказательство. Пусть n – общее число исходов, m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A, m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B. Тогда событию $A+B$ благоприятствует $(m_1 + m_2)$ исходов. $P(A+B) = (m_1 + m_2)/ n = = m_1/ n + m_2/ n = P(A) + P(B)$. *Теорема доказана.*

Следствие. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, если A и B совместны.

Доказательство. Пусть n – общее число исходов, k – число исходов, благоприятствующих событию AB, m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A, m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B. Событию $A+B$ будут благоприятствовать $(m_1 + m_2 - k)$ исходов. Тогда $P(A+B) = (m_1 + m_2 - k)/ n = m_1/ n + m_2/ n - k/ n = P(A) + P(B) - P(AB)$. *Теорема доказана.*

5. *Теорема умножения вероятностей*

Определение. ***Условной вероятностью*** события A при условии B называется вероятность события A, найденная при условии, что событие B произошло. Обозначение: $P_B(A)$.

Пример 5. В урне 3 белых и 2 черных шара. Событие *Б* – вытаскиваем белый шар, событие *Ч* – вытаскиваем черный шар.

Решение. $P(Б) = 3/5$; $P(Ч) = 2/5$; $P_Б(Ч) = ½$; $P_Ч(Б) = 3/4$.

Определение. Два события A и B называются ***независимыми,*** если вероятность наступления одного не зависит от наступления или не наступления другого.

Теорема. Вероятность произведения AB равна произведению вероятности A на условную вероятность B при условии A: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Доказательство. Пусть n – общее число исходов, k – число исходов, благоприятствующих событию AB, m – число исходов, благоприятствующих событию A. $P(AB) = k/n = km/nm = (m/n) \cdot (k/m) = P(A) \cdot P_A(B)$. *Теорема доказана.*

Следствие 1. $P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Следствие 2. Если A и B независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 6. Два стрелка стреляют в мишень. Один попадает с вероятностью 0,8 (A), а другой – с вероятностью 0,7 (B). Найти вероятность того, что хотя бы один попадет в мишень.

Решение. Способ 1) $P(AB+\overline{A}B+A\overline{B}) = P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B}) = P(A)P(B)+$ $+P(\overline{A})P(B) +P(A)\,P(\overline{B})= 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}7 + 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}24 + 0{,}14 + 0{,}56 = 0{,}94.$

Способ 2) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}06$ – вероятность того, что оба промахнулись; $1 – 0{,}06 = 0{,}94$.

6. Формула полной вероятности

<u>Определение</u>. Система событий $H_1, H_2,\ldots,H_n$ называется ***полной группой событий*** в данном эксперименте, если в результате проведения данного эксперимента наступает одно и только одно событие этой группы и выполняются два условия:

1) $P(H_1 + H_2 +\ldots+H_n) = 1;$
2) $P(H_i \cdot H_j) = 0,$ где $i \neq j.$

События этой группы обычно называются ***гипотезами.***

<u>Теорема</u>. Пусть событие A может произойти только вместе с одним и только одним из событий полной группы $H_1,H_2 ,\ldots,H_n$. Тогда вероятность события A равна

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H2}(A)+\ldots+ P(H_n)\cdot P_{Hn}(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P_{Hk}(A)$$ – ***формула полной вероятности***.

Доказательство. Событие $H_1+H_2+\ldots+H_n$ – достоверное. По условию событие A может произойти лишь вместе с одним из событий $H_1,H_2,\ldots,H_n$, следовательно, $A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n$. События AH_k несовместны, так как несовместны $H_1,H_2,\ldots,H_n$. Тогда $P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n)=$ $=P(H_1)\cdot P_{H1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H2}(A)+\ldots+ P(Hn)\cdot P_{Hn}(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P_{Hk}(A)$. *Теорема доказана*.

Пример 7. Имеются два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора (I) стандартна, равна 0,8; а второго (II) – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь стандартна (из наудачу взятого набора).

Решение. Событие A – извлеченная деталь стандартна; H_1 – деталь взята из I набора; H_2 – деталь взята из II набора. $P(H_1)=P(H_2)=1/2$. $P_{H1}(A)=0{,}8;$ $P_{H2}(A)=0{,}9.$ Тогда $P(A)=(1/2)\cdot 0{,}8+(1/2)\cdot 0{,}8 = 0{,}85.$

7. Формулы Бейеса

Рассмотрим следующую <u>задачу</u>: имеется полная группа несовместных гипотез $H_1,H_2 ,\ldots,H_n$, вероятности которых $P(H_k)$ ($k=1,2,\ldots,n$) известны до опыта (***вероятности априори***). Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события A, причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности $P_{H\,k}(A)$ ($k=1,2,\ldots,n$). Спрашивается, каковы будут вероятности этих гипотез· (т.е. $P_A(H_1)$, $P_A(H_2), \ldots, P_A(H_n)$) после опыта (***вероятности апостериори***). Проблема состоит в том, что, имея новую информацию, нужно переоценить вероятности наших гипотез.

Рассмотрим $P(AH_k) = P(H_k)\cdot P_{Hk}(A) = P(A)\cdot P_A(H_k)$ ($k = 1,2,\ldots n$); следовательно

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)\cdot P_{Hk}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\cdot P_{Hk}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P_{Hk}(A)}$$ – ***формула Бейеса.***

Пример 8. Вероятность поражения вертолета при одиночном выстреле для 1-го ракетного расчета (событие A) равна 0,2, а для 2-го (событие B) – 0,1. Каждое из орудий производит по одному выстрелу, причем зарегистрировано одно попадание в вертолет (событие C). Какова вероятность, что удачный выстрел принадлежит первому расчету?

Решение. До выстрела возможны четыре гипотезы: $H_1=AB$, $H_2=A\overline{B}$, $H_3=\overline{A}B$, $H_4=\overline{A}\,\overline{B}$; эти гипотезы образуют полную группу событий.

Вероятности их, при независимом действии расчетов, соответственно равны: $P(H_1)=0,2\cdot 0,1=0,02$, $P(H_2)=0,2\cdot 0,9=0,18$, $P(H_3)=0,8\cdot 0,1=0,08$, $P(H_4)=0,8\cdot 0,9=0,72$, причем $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=1$.

Условные вероятности для наблюдаемого события C при данных гипотезах будут $P_{H1}(C)=0,\ P_{H2}(C)=1,\ P_{H3}(C)=1,\ P_{H4}(C)=0.$ Следовательно, гипотезы H_1 и H_4 отпадают, а вероятности гипотез H_2 и H_3 вычисляются по формуле Бейеса: $P_C(H_2)=\dfrac{0,18\cdot 1}{0,18\cdot 1+0,08\cdot 1}\approx 0,7$, $P_C(H_3\}=\dfrac{0,08\cdot 1}{0,18\cdot 1+0,08\cdot 1}\approx 0,3$.

Таким образом, с вероятностью приблизительно 0,7 можно утверждать, что удачный выстрел принадлежит первому расчету.

8. Схема испытаний Бернулли

Серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью, не зависящей от номера испытания, называется ***схемой испытания Бернулли***.

Поставим задачу: вычислить вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A появиться ровно k раз. Обозначим эту вероятность $P_n(k)$; при этом $P(A) = p$ – одна и та же. $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ – вероятность противоположного события.

$$P_n(k) = C_n^k\cdot p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k q^{n-k}$$ – ***формула Бернулли.***

(C_n^k – число сочетаний из n по k).

Пример 9. Игральную кость (кубик) бросили 10 раз. Найти вероятность того, что цифра 6 выпадет: ***а)*** ровно 5 раз; ***б)*** не более 2 раз; ***в)*** хотя бы 1 раз.

Решение. ***а)*** Имеем $P(A)=\frac{1}{6}=p$; $P(\overline{A})=\frac{5}{6}$; $P_{10}(5)=C_{10}^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10-5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{5^5}{6^{10}}$.

б) Искомая вероятность равна $P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)=$

$$C_{10}^0\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0+C_{10}^1\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1+C_{10}^2\left(\frac{1}{6}\right)^8\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{6^{10}}+\frac{10\cdot 5}{6^{10}}+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{25}{6^{10}}=\frac{1176}{6^{10}}.$$

в) Искомая вероятность равна $P_{10}(m\ge 1) = 1-(5/6)^{10}$.

Лекция 15. Случайные величины

1. *Понятие случайной величины. Функция распределения*

Под ***случайной величиной*** понимается величина, которая в результате опыта (испытания) со случайным исходом принимает единственное значение, предугадать которое заранее невозможно.

Случайные величины обозначают *X, Y,…*, а их возможные значения – $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$.

Определение. Случайная величина называется ***дискретной***, если множество её возможных значений конечное или счетное (то есть может быть перечислено с помощью натурального ряда чисел).

Определение. Случайная величина называется ***непрерывной***, если множество её значений есть некоторый промежуток числовой оси.

Пример 1. X – число выпадений «герба» при 7 бросаниях монеты. Её возможные значения 0,1,2,3,4,5,6,7. Y – масса яблока: 40 *гр.* $\le Y \le$ 400 *гр.* Случайная величина X – дискретная, случайная величина Y – непрерывная.

Важно знать не только какие значения принимает случайная величина, но и насколько часто они «выпадают» в результате испытаний. Для этой цели используют понятие закона распределения.

Определение. ***Законом распределения*** (или просто ***распределением***) случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений.

Если для случайной величины X задан закон распределения, то говорят, что она распределена по этому закону.

Одним из универсальных способов задания закона распределения является функция распределения.

Определение. ***Функцией распределения*** или ***интегральной функцией распределения*** случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой для любого числа $x \in X$ равно вероятности события $(X < x)$, то есть вероятности события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение из промежутка $(-\infty, x)$: $F(x)=P(X < x)$.

Свойства функции распределения.

1. Область определения – $(-\infty, +\infty)$.
2. $0 \le F(x) \le 1$, так как $0 \le P(A) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.
4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке $x \in R$.
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

2. *Дискретная случайная величина*

Для дискретной случайной величины X с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначим через $p_i=P(X=x_i)$, $(i=1,2,…n)$ – вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X принимает значение x_i . Числа p_i удовлетворяют двум условиям: 1) $p_i \geq 0;$ 2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (или $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$).

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан формулой, таблицей, графиком.

Определение. Таблица, в которой перечислены все значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется ***рядом распределения*** дискретной случайной величины.

Ряд распределения дискретной случайной величины имеет вид:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Определение. Ломаная, абсциссы вершин которой есть возможные значения дискретной случайной величины, а ординаты – вероятности этих значений, называется ***многоугольником*** (или ***полигоном***) ***распределения.***

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, где суммирование ведется по всем индексам i , для которых $x_i < x$.

Биномиальное распределение.

Определение. Случайная величина X, принимающая значения $0,1,2, \ldots,n$, называется ***распределенной по биномиальному закону*** или имеющей ***биномиальное распределение,*** если $P(X=k)$ задается формулой Бернулли, т.е. $P(X=k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0,1,\ldots,n$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Случайная величина X – число появлений события A при n независимых испытаниях в условиях схемы Бернулли,распределена по биномиальному закону.

Пример 2. Монета брошена 4 раза. Написать закон распределения вероятностей случайной величины X – числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления герба в каждом испытании (бросании монеты) равна $p=1/2$. Значит, вероятность не выпадения герба $q=1-p=1/2$. При четырех бросаниях монеты герб может появиться либо 4 раза, либо 3 раза, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться (0 раз). Таким образом, возможные значения случайной величины X таковы: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли.

$P_4(4) = C_4^4 p^4 = (1/2)^4 = 1/16;$
$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4(1/2)^3(1/2) = 1/4;$
$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6(1/2)^2(1/2)^2 = 3/8;$
$P_4(1) = C_4^1 p q^3 = 4(1/2)\cdot(1/2)^3 = 1/4;$
$P_4(0) = C_4^0 q^4 = (1/2)^4 = 1/16.$

Запишем искомый закон распределения в виде таблицы (ряд распределения):

X	0	1	2	3	4
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Контроль: 1/16 +1/4 +3/8 +1/4 +1/16 = 1.

3. Операции над дискретными случайными величинами

Определение. ***Суммой*** (***произведением***) дискретной случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i=P(X=x_i)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ и дискретной случайной величины Y, принимающей значения y_j с вероятностями $q_j=P(Y=y_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ называется дискретная случайная величина, обозначаемая $X+Y$ $(X\cdot Y)$, принимающая все значения вида $x_i + y_j$ $(x_i\cdot y_j)$ с вероятностями $p_{i\,j}=P((X=x_i)\cdot P(Y=y_j))=P(X=x_i,Y=y_j)$.

Определение. ***Произведением*** дискретной случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i=P(X=x_i)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ ***на число*** c называется дискретная случайная величина, обозначаемая cX, принимающая значения cx_i с вероятностями $p_i = P(X=x_i)$.

Определение. ***Квадратом*** дискретной случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i=P(X=x_i)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ называется дискретная случайной величины, обозначаемая X^2, принимающей значения x_i^2 с вероятностями $p_i=P(X=x_i)$.

Определение. Дискретные случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если независимы события $(X=x)$ и $(Y=y)$ при любых $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$.

4. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью описывает случайную величину. В ряде случаев достаточно получить лишь некоторое суммарное представление о случайной величине. Числа, которые описывают суммарно случайную величину, называют ее числовыми характеристиками. Важнейшими среди них являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание.

Определение. ***Математическим ожиданием*** (или средним значением) $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности: $M(X) = \sum_i x_i p_i$.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ее математическое ожидание находится по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример 3. Найти математическое ожидание случайной величины X

X	0	1	2
p	0,2	0,3	0,5

Решение. $M(X) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 = 1{,}3$.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной: $M(C)= C$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$.
3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых: $M(X\pm Y) = M(X)\pm M(Y)$.
4. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины.

Теорема (о математическом ожидании биномиального распределения). Математическое ожидание случайной величины X – числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании, то есть $M(X)= np$, где n – число испытаний, а $p=P(A)$.

Дисперсия.

Определение. ***Отклонением*** случайной величины называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Обозначается: $X – M(X)$.

Если случайная величина X имеет ряд распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

то отклонение $X – M(X)$ имеет ряд

$X – M(X)$	$x_1– M(X)$	$x_2– M(X)$	…	$x_n– M(X)$
P	p_1	p_2	…	p_n

Теорема. Математическое ожидание отклонения равно нулю.

Доказательство. $M(X – M(X)) = M(X) – M(M(X)) = M(X) – M(X) = 0$. *Теорема доказана.*

Определение. ***Дисперсией*** (рассеянием) случайной величины X (обозначается $D(X)$) называется математическое ожидание квадрата её отклонения: $D(X) = M([X – M(X)]^2)$.

Теорема. Для дискретной случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i=P(X=x_i)$, $(i=1,2,…,n)$: $D(X) =\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 \cdot p_i$. (58)

Свойства дисперсии.

1. $D(C)= 0$, где C – постоянная.
2. $D(CX) = C^2\cdot D(X)$.
3. $D(X) = M(X^2) – [M(X)]^2$. (59)
4. $D(X\pm Y) = D(X)+ D(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

Доказательство (для 3). $D(X)= M([X – M(X)]^2) = M(X^2 – 2M(X)X+ (M(X))^2 = =M(X^2) – 2M(X)M(X) – M ((M(X))^2)= M(X^2) –2(M(X))^2+ (M(X))^2= M(X^2) – [M(X)]^2$. *Свойство доказано.*

Замечание. При вычислении дисперсии удобнее пользоваться не определением, а формулой (59).

Пример 4. Найти дисперсию случайной величины X

X	0	1	2
p	0,2	0,3	0,5

Решение. Случайная величина X^2 имеет ряд распределения

X^2	0	1	4
p	0,2	0,3	0,5

$M(X) = 1{,}3$; $M(X^2) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}5 = 2{,}3$. Тогда по (59) получаем $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2{,}3 - (1{,}3)^2 = 0{,}61$.

Теорема (о дисперсии биномиального распределения). Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, находится по формуле $D(X)=npq$, где $q = 1 - p$.

Определение. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называется число $\sigma(X)$, определяемое равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

5. Непрерывные случайные величины

Понятие непрерывной случайной величины было введено в первом пункте. Можно дать другое определение, используя понятие функции распределения.

Определение. Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

Для непрерывной случайной величины вероятность того, что она примет отдельное значение, равна нулю: $P(X=c)=0,\ \forall c \in R.$ Поэтому для непрерывной случайной величины имеем: $P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) =$ $= P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$, то есть вероятности того, что случайная величина X примет значение из промежутков $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b]$ равна приращению её функции распределения на каждом из этих промежутков.

Определение. Производная $f(x) = F'(x)$ от функции распределения непрерывной случайной величины называется ***плотностью распределения*** (***плотностью вероятности***, или просто ***плотностью***) или ***дифференциальной функцией распределения*** случайной величины.

Обозначение: $f(x)$ или $p(x)$.

Свойства плотности распределения.

1. $f(x) \ge 0$ (свойство неотрицательности); 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (свойство нормированности); 3. $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$; 4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$; 5. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$

Определение. График плотности распределения $f(x)$ называется ***кривой распределения.***

6. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

1. Математическое ожидание непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности *f(x)* есть число $M(X)=a=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

2. $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot f(x)dx$ или $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-a^2$.

3. $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}$.

7. Закон равномерного распределения вероятностей

Определение. Непрерывная случайная величина X называется ***равномерно распределенной на отрезке*** $[a;b]$, если ее плотность распределения *f(x)* постоянна на этом отрезке, а вне отрезка равна нулю:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x\in[a,b],\\ 0, & \text{при } x\notin[a,b].\end{cases}$$

Функция распределения *F(x)* для равномерно распределенной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a<x\le b,\\ 1, & \text{при } b<x.\end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного распределения: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

8. *Нормальный закон распределения случайной величины*

Определение. Непрерывная случайная величина X называется ***распределенной по нормальному закону*** или по закону Гаусса, если её плотность распределения находится по формуле $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и σ – параметры распределения.

График функции *f(x)* называется ***кривой Гаусса.***

Параметры a и σ представляют собой соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины X, то есть $a=M(X)$, $\sigma=\sigma(X)$. Отсюда $D(X)=\sigma^2$.

Если $a=0$ и $\sigma=1$, то нормальное распределение называется ***стандартным*** и функция распределения имеет вид $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Имеет место равенство $\Phi(\dfrac{x-a}{\sigma})=0{,}5+\Phi_0(\dfrac{x-a}{\sigma})$, где функция $\Phi_0(x)$ называется ***функцией Лапласа*** и табулирована.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задание 1. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Nx^2+2}{(N+1)x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-N}{Nx^3+6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Nx^3+8}{3x^2+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin Nx}{\ln x}$.

Задание 2. Вычислить интегралы:

а) $\int\dfrac{(1-x)^2}{x^N}dx$; б) $\int\dfrac{1-N\cdot\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int\limits_{-1}^{1}(N\cdot e^x-(N+1)\cdot x^{2N})dx$; г) $\int\limits_{1}^{e}N\cdot\ln x dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) дугой синусоиды $y=N\cdot\sin x$ от $x=0$ до $x=\pi$ и осью *Ox;*

б) параболой $y=N\cdot x-x^2$ и осью *Ox;* в) параболой $y=N\cdot x^2-1$ и осью *Ox*.

Задание 4. Найдите модуль и аргумент комплексного числа: **а)** $-N$; **б)** Ni.

Задание 5. Вычислите $N\bullet\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1002}$.

Задание 6. Вычислите все значения следующего корня:

а) $\sqrt{N-i}$. **б)** $\sqrt[3]{N}$. **в)** $\sqrt[4]{Ni}$.

Задание 7. Проверьте, является ли функция $y=2x+N$ решением уравнения $x^2y''-2xy'+2y=0$.

Задание 8. Найти частное решение дифференциального уравнения $(N+1)\,y^2+x^2y'=0;\ y(-1)=1$.

Задание 9. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $e^{Nx+(N+2)y}dy=xdx$; **б)** $(xy+x^{N+2}y)y'=1+y^2$.

Задание 10. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а) $y''+(N+2)y=0$; **б)** $y''-2Ny'+5Ny=0$; **в)** $y''+y'=2x-N$.

Задание 11. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, закон распределения которой выражается таблицей.

№ варианта	*X* *P*	*№ варианта*	*X* *P*
1	*X* 1 3 5 *P* 0,4 0,25 0,35	*6*	*X* 0 2 4 *P* 0,25 0,5 0,25
2	***X*** 0 1 2 3 *P* 0,1 0,3 0,5 0,1	*7*	*X* 1 2 3 4 5 *P* 0,06 0,12 0,46 0,08 0,28
3	***X*** 1 2 3 4 5 *P* 0,1 0,2 0,45 0,15 0,1	*8*	*X* 0 2 3 *P* 0,1 0,2 0,7
4	*X* 0 3 6 *P* 0,3 0,2 0,5	*9*	*X* 1 3 6 8 *P* 0,1 0,5 0,2 0,2
5	***X*** 1 2 3 4 5 *P* 0,38 0,26 0,20 0,14 0,02	*10*	*X* 0 2 4 6 *P* 0,1 0,2 0,5 0,2

Задание № 12

№ варианта	Текст задания
1	В ящиках находятся детали: в первом - 10 (из них 3 стандартные), во втором - 15 (из них 9 стандартных). Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
2	В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны извлекают подряд 4 шара. Определить вероятность того, что будут извлечены 2 белых и 2 черных шара.
3	Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков - 0,3; вероятность выбить 8 очков или менее - 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.
4	Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что номер 4 выпадет хотя бы на одной из них?
5	Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в мишень, равна 0,9. Стрелок произвел три выстрела. Найти вероятность того, что все три выстрела дали попадание.
6	Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, случайным образом извлеченного жетона не содержит цифры 7.
7	Из партии в 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных 2 деталей хотя бы одна стандартная.
8	В студии 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6.Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.
9	Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий нестандартно только одно.
10	Из 12 билетов, пронумерованных от 1 до 12, один за другим (без возвращения) выбирают 2 билета. Какова вероятность того, что номера этих билетов четные?

Задание № 13

№ варианта	Текст задания
1	Трое охотников одновременно выстрелили по кабану, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что зверь бы убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,3; 0,4; 0,7.
2	Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,2. Найти вероятность того, что событие *A* появится хотя бы два раза.
3	В первом ящике содержится 20 деталей, из них 18 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что случайным образом извлеченная деталь из наугад взятого ящика стандартна.
4	В двух ящиках имеются радиолампы: в первом ящике их 12, из них одна нестандартная, во втором - 10, из них одна нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет стандартной.
5	Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что стандартна деталь завода №1, равна 0,7; завода №2 — 0,8. Сборщик наудачу извлек деталь из наугад взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная делать.
6	В телевизионном ателье 5 кинескопов. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок службы, соответственно равны 0,75; 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок службы.
7	В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.
8	На склад поступила готовая продукция трех фабрик. Продукция первой фабрики составила 20%, второй - 46%, третьей - 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий первой фабрики равен 3, второй - 2, третьей - 1.Найти вероятность того, что наугад взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.
9	Некто, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 тропинок. Известно, что для различных тропинок вероятности выхода из леса за час соответственно равны 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Определите вероятность того, что заблудившийся пошел по первой дороге, если известно, что он вышел из леса через час.
10	Найти вероятность того, что событие *A* появится в 5 независимых испытаниях не менее 3 раз, если в каждом испытании вероятность появления события *A* равна 0,4.

Примечание. *N* – номер варианта (сообщается преподавателем).

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1978.
3. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс /К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2005.
4. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс /К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2005.
5. Щипачев В.С. Курс высшей математики: учеб./ под ред. А.Н.Тихонова. – М.: Изд-во Проспект, 2005.
6. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: Астрель-АСТ, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Капитонова Татьяна Александровна

МАТЕМАТИКА

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать 14.10.2013 Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Бумага офсетная Гарнитура Times
Усл. печ. л. 5,6