

С.Ф.ЛУКОМСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

2013

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

УДК 517

ББК 22.19;

Л84 **Лукомский С.Ф.** Математический анализ. Дифференциальное исчисление функций многих переменных Саратов, 2013, 63с.

Излагаются основы дифференциального исчисления функций многих переменных. Предназначено студентам математических специальностей университетов.

Рецензент: профессор Терехин П.А.

Учебное издание

Лукомский Сергей Федорович

Математический анализ.

Дифференциальное исчисление в \mathbb{R}^m .

УДК 517

©Лукомский С.Ф., 2013

Глава 1

Функции многих переменных. Предел и непрерывность

1. Метрические пространства.

Множества в метрических пространствах

Определение 1.1. Пусть $X \neq \emptyset$ – произвольное множество. отображение $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется расстоянием, если оно удовлетворяет следующим условиям

- 1) $\forall x, y \in X \rho(x, y) \geq 0$,
- 2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- 4) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ – неравенство треугольника.

Число $\rho(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y . Множество X , в котором определено расстояние ρ называют метрическим пространством и обозначают (X, ρ) .

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) \stackrel{df}{=} |x - y|$.

- 1) $\rho(x, y) = |x - y| \geq 0$ – очевидно.
- 2) $\rho(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 3) $\rho(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho(y, x)$.
- 4) $\rho(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Определение 1.2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $x_0 \in X$, $r > 0$.

- 1) Множество $B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$ называется замкнутым шаром, x_0 – центр, r – радиус.
- 2) Множество $O_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$ называется открытым шаром в пространстве X или окрестностью. x_0 – центр, r – радиус.

Определение 1.3. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $x_0 \in X$ называется предельной точкой множества A , если в любой $O_\delta(x_0)$ содержится точка $x \in A$, $x \neq x_0$.

Предложение 1.1. x_0 будет предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное число точек множества A .

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x_0 – предельная точка множества A , $O_{r_0}(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0 . Тогда $\exists x_1 \in O_{r_0}(x_0)$, $x_1 \neq x_0$. Выбираем число r_1 так, чтобы $0 < r_1 < \frac{|x_0 - x_1|}{2} < \frac{r_0}{2}$. В $O_{r_1}(x_0)$ существует точка $x_2 \neq x_0$. Выбираем число r_2 так, чтобы $0 < r_2 < \frac{|x_0 - x_2|}{2} < \frac{r_1}{2} < \frac{r_0}{2^2}$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность точек $(x_k)_{k=1}^\infty$ таких, что $x_{k+1} \in O_{r_k}(x_0)$, $r_k < \frac{r_0}{2^k}$, $x_k \neq x_0$, т.е. в $O_{r_0}(x_0)$ содержится бесконечное число элементов множества A .

Д о с т а т о ч н о с т ь очевидна. \square

Определение 1.4. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $(x_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность элементов пространства X . Последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ называется сходящейся к элементу $x_0 \in X$ в пространстве X , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

Для обозначения предела последовательности в метрическом пространстве (X, ρ) используются стандартные обозначения: $x_n \rightarrow x_0$ или $\lim x_n = x_0$.

Предложение 1.2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$. x_0 – предельная точка множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x_0 – предельная точка A . При доказательстве предложения 1.1 была построена последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ такая, что $x_n \neq x_0$, $x_{n+1} \in O_{r_n}(x_0)$ и $r_n \leq \frac{r_0}{2^n}$, следовательно, $\rho(x_{n+1}, x_0) < \frac{r_0}{2^n} \rightarrow 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть существует последовательность (x_n) такая, что $x_n \in A$, $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ и пусть $O_\delta(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0 . Значит, $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \rho(x_n, x_0) < \delta$. Следовательно, $x_n \in O_\delta(x_0) \forall n \geq n_0$, т.е. в $O_\delta(x_0)$ существует бесконечно много элементов множества A . \square

Определение 1.5. Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если любая предельная точка множества F ему же и принадлежит.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, $F = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$, $x = 0$ – предельная точка, но $x_0 \notin F$, следовательно, F не является замкнутым.

Теорема 1.3. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

1) Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.

2) Объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Доказательство. 1) Пусть $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ – семейство замкнутых множеств, $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$, x_0 – предельная точка множества F , $O_\delta(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0 . Так как x_0 – предельная точка множества F , то в $O_\delta(x_0)$ существует точка $x \in F$. Отсюда $x \in F_\alpha$ для $\forall \alpha \in I$. Следовательно, x_0 есть предельная точка множества $F_\alpha \forall \alpha \in I$. Но F_α – замкнутое, значит, $x_0 \in F_\alpha \forall \alpha \in I$. Поэтому $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$. Следовательно, $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ – замкнуто.

2) Пусть $(F_k)_{k=1}^n$ – конечное семейство замкнутых множеств и пусть $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$. Пусть x_0 предельная точка множества F . Тогда x_0 является предельной точкой по крайней мере для одного из множеств F_k ($k = \overline{1, n}$). Покажем это от противного. Предположим, что x_0 не является предельной точкой ни для одного множества F_k ($k = \overline{1, n}$). Значит, $\forall k = \overline{1, n} \exists O_{r_k}(x_0)$, в которой нет точек множества F_k . Пусть $r_0 = \min_{k=\overline{1, n}} r_k$. Тогда в $O_{r_0}(x_0)$ нет точек множеств F_k при любом k . Значит, в $O_{r_0}(x_0)$ нет точек множества $\bigcup_{k=1}^n F_k$, следовательно, x_0 не является предельной точкой, что противоречит выбору точки x_0 . Т.е. $\exists k_0$, что x_0 – предельная точка множества F_{k_0} . Так как F_{k_0} замкнуто, то $x_0 \in F_{k_0} \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{k=1}^n F_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n F_k$ – замкнуто. \square

Определение 1.6. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$. Точка $x_0 \in A$ называется внутренней точкой множества A , если существует окрестность точки x_0 , целиком лежащая внутри A .

Определение 1.7. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Множество $G \subset X$ называется открытым, если любая точка множества G является его внутренней точкой.

Теорема 1.4. 1) Объединение любого семейства открытых множеств есть открытое множество.

2) Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Доказательство. 1) Пусть $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ – семейство открытых множеств, $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Выберем $x_0 \in G \Rightarrow \exists \alpha_0, x_0 \in G_{\alpha_0}$. Так как G_{α_0} – открытое, то $\exists O_{r_0}(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

2) Пусть $(G_k)_{k=1}^n$ – открытые множества, $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$. Пусть $x_0 \in G \Rightarrow x_0 \in G_k \forall k = \overline{1, n}$. Т.к. G_k – открытое, то $\exists O_{r_k}(x_0) \subset G_k$. Пусть $r_0 = \min_{k=1, n} r_k$.

Тогда $O_{r_0}(x_0) \subset O_{r_k}(x_0) \subset G_k \Rightarrow O_{r_0}(x_0) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$. Следовательно, x_0 – внутренняя точка. \square

2. Полные метрические пространства.

Принцип вложенных шаров

Определение 2.1. Последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall m, n \geq n_0 \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Определение 2.2. Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность (x_n) сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$, т.е.

$$\exists x_0 \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Лемма 2.1. Расстояние ρ в метрическом пространстве (X, ρ) есть функция непрерывная в следующем смысле:

если $x_n \rightarrow x_0$, то $\forall y \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y, x_n) = \rho(y, x_0)$.

Доказательство. По неравенству треугольника $\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, x_0)$. Следовательно

$$\rho(y, x_0) - \rho(y, x_n) \leq \rho(x_n, x_0).$$

С другой стороны: $\rho(y, x_n) \leq \rho(y, x_0) + \rho(x_0, x_n)$, следовательно

$$\rho(y, x_n) - \rho(y, x_0) \leq \rho(x_0, x_n).$$

Соединяя эти неравенства получаем

$$|\rho(y, x_0) - \rho(y, x_n)| \leq \rho(x_0, x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y, x_n) = \rho(y, x_0). \quad \square$$

Теорема 2.2. Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство,

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к 0. Тогда $\exists! x_0 \in X$, принадлежащая всем этим шарам, т.е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x_0\}.$$

Доказательство. 1) Пусть $B_n = B_{r_n}(x_n)$ – шар радиуса r_n с центром в точке x_n . Рассмотрим последовательность центров $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что эта последовательность фундаментальна. Пусть $m > n$. Тогда $B_{r_m}(x_m) \subset B_{r_n}(x_n)$. Значит, $\rho(x_m, x_n) \leq r_n$ для $\forall m > n$. Но $r_n \rightarrow 0$, следовательно, последовательность (x_n) фундаментальна. В самом деле, т.к. $r_n \rightarrow 0$, то $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0, r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall m, n, (m > n \geq n_0) \rho(x_m, x_n) \leq r_n < \varepsilon$. Так как (X, ρ) – полное, то существует элемент $x_0 \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) = 0$.

2) Покажем, что $x_0 \in B_{r_n}(x_n) \forall n$. В самом деле, при $m > n$ $\rho(x_m, x_n) \leq r_n$. Перейдем в последнем неравенстве к пределу по $m \rightarrow \infty$ при фиксированном n . По свойству непрерывности расстояния отсюда находим $\rho(x_0, x_n) \leq r_n$, т.е. $x_0 \in B_{r_n}(x_n)$.

3) Покажем, что общая точка единственная. Пусть $x_0, y_0 \in B_n \forall n \Rightarrow \rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) \leq 2r_n \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$. \square

3. Линейное нормированное пространство.

Связь нормы с расстоянием

Определение 3.1. Пусть $(X, +, \cdot \lambda)$ – линейное пространство, т.е. пространство с операцией сложения и умножения на число λ , удовлетворяющее аксиомам:

A1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,

A2. $x + y = y + x$,

A3. $\exists \Theta \in X, \forall x \ x + \Theta = x$,

A4. $\forall x \in X \exists -x \in X, \ x + (-x) = 0$,

A5. $(x + y) \cdot \lambda = \lambda x + \lambda y$,

A6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

A7. $1 \cdot x = x$,

A8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) \cdot x$,

Отображение $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется нормой в X , если оно удовлетворяет условиям

$$1) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta.$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Для нормированного пр-ва будем использовать обозначение $(X, \|\cdot\|)$.

Пример. \mathbb{R} – есть линейное нормированное пространство с нормой $\|x\| \stackrel{df}{=} |x|$.

Предложение 3.1. Если $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство, то равенство

$$\rho(x, y) \stackrel{df}{=} \|x - y\| = \|x + (-1) \cdot y\|$$

определяет расстояние в X .

Доказательство. 1) $\rho(x, y) \geq 0$ – очевидно.

$$2) \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \Theta \Leftrightarrow x = y.$$

$$3) \rho(x, y) = \|x - y\| = \|(y - x) \cdot (-1)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x).$$

$$4) \rho(x, y) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

□

Так как в линейном нормированном пространстве есть расстояние, то можно говорить о сходящихся и фундаментальных последовательностях и о полных линейных нормированных пространствах. В частности:

1) Последовательность (x_n) сходится к элементу x по норме пространства X тогда и только тогда, когда $\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0$.

2) Последовательность (x_n) – фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

4. Линейное пространство со скалярным произведением. Неравенство Коши–Буняковского

Определение 4.1. Пусть $(X, +, \cdot \lambda)$ – линейное пространство. Отображение пространства $X \times X$ в \mathbb{R} , которое каждой паре (x, y) элементов из X ставит в соответствие действительное число, которое обозначается символом (x, y) , называется скалярным произведением, если выполняются следующие аксиомы

$$A1. (x, x) \geq 0 \text{ и } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$$

$$A2. (x, y) = (y, x)$$

$$A3. \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y)$$

$$A4. (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

Предложение 4.1. Справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}. \quad (4.1)$$

Неравенство (4.1) называется неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство. $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$ – по определению скалярного произведения. Отсюда $0 \leq (x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) \cdot \lambda^2$. Относительно λ правая часть есть квадратный трехчлен, и он сохраняет знак, значит, дискриминант $D \leq 0 \Rightarrow (2(x, y))^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \Rightarrow |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$. \square

Предложение 4.2. Равенство $\|x\| \stackrel{df}{=} \sqrt{(x, x)}$ определяет в пространстве со скалярным произведением норму.

Доказательство. 1) $\|x\| \geq 0$ – очевидно.

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x, x)} = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.

3) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

4) $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} + (y, y) = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. \square

5. Пространство \mathbb{R}^m как линейное нормированное пространство. Эквивалентные нормы в \mathbb{R}^m

Определение 5.1. Положим по определению $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, т.е. элементами \mathbb{R}^m являются кортежи длины m , состоящие из действительных чисел:

$$\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}).$$

При $m = 2$ $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ – т.е. упорядоченная пара. Числа $x^{(j)}$ называются координатами или компонентами точки \mathbf{x}

Определение 5.2. Определим в \mathbb{R}^m операции $+$ и умножения на число:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^{(1)} + y^{(1)}, x^{(2)} + y^{(2)}, \dots, x^{(m)} + y^{(m)})$$

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x^{(1)}, \lambda x^{(2)}, \dots, \lambda x^{(m)}).$$

С такими операциями \mathbb{R}^m есть линейное пространство. Роль нулевого элемента играет роль вектор $\Theta = (0, 0, \dots, 0)$.

Предложение 5.1. *Равенство*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{df}{=} \sum_{j=1}^m (x^{(j)}, y^{(j)})$$

определяет в \mathbb{R}^m скалярное произведение.

Доказательство. 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m x^{(j)} x^{(j)} = \sum_{j=1}^m (x^{(j)})^2 \geq 0$.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m (x^{(j)})^2 = 0 \Leftrightarrow \forall j, x^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0).$$

2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – очевидно.

3) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – очевидно.

4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^m (x^{(j)} + y^{(j)}) \cdot z^{(j)} = \sum_{j=1}^m x^{(j)} z^{(j)} + \sum_{j=1}^m y^{(j)} z^{(j)} = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$. □

Следствие 1. $\left| \sum_{j=1}^m x^{(j)} y^{(j)} \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m |y^{(j)}|^2}$.

Это неравенство Коши-Буняковского в пространстве \mathbb{R}^m .

Следствие 2. Равенство

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2}$$

определяет норму в \mathbb{R}^m . Эту норму называют Евклидовой.

6. Другие нормы в \mathbb{R}^m

Определение 6.1. *Две нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^m называются эквивалентными, если $\exists c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что*

$$c_1 \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| \leq c_2 \|\mathbf{x}\|.$$

Теорема 6.1. *Равенство*

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^m |x^{(j)}|$$

определяет в \mathbb{R}^m норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|_2$.

Доказательство. 1) $\|\mathbf{x}\|_1 \geq 0$ – очевидно.

2) $\|\mathbf{x}\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| = 0 \Leftrightarrow \forall j, x^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3) $\|\lambda\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^m |\lambda x^{(j)}| = |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_1$.

4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_{j=1}^m |x^{(j)} + y^{(j)}| \leq \sum_{j=1}^m (|x^{(j)}| + |y^{(j)}|) = \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| + \sum_{j=1}^m |y^{(j)}| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$.

Покажем, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| \cdot 1 \leq \left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^m 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m} \cdot \|\mathbf{x}\|_2.$$

Обратное неравенство:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}| \right)^2 = (\|\mathbf{x}\|_1)^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1. \quad \square$$

Замечание. Выясним, что является единичным шаром относительно нормы $\|\cdot\|_1$.

$$B_1(\mathbf{0}) = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| \leq 1 \right\}.$$

Если $m = 2$, то $B_2(\mathbf{0}) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) : |x^{(1)}| + |x^{(2)}| \leq 1\}$. Так как равенство $|x^{(1)}| + |x^{(2)}| = 1$ определяет на плоскости квадрат с вершинами в точках $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$, то единичный шар – это квадрат с указанными вершинами.

Теорема 6.2. *Равенство*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \stackrel{df}{=} \max_{j=1, \dots, m} |x^{(j)}|$$

определяет в \mathbb{R}^m норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|_2$.

Доказательство. 1) $\|\mathbf{x}\|_\infty \geq 0$ – очевидно.

2) $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ – очевидно.

3) $\|\lambda\mathbf{x}\|_\infty = \max_{j=1, \dots, m} |\lambda| \cdot |x^{(j)}| = |\lambda| \cdot \max_{j=1, \dots, m} |x^{(j)}| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty$.

4) Неравенство треугольника: $|x^{(j)} + y^{(j)}| \leq |x^{(j)}| + |y^{(j)}| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$.

Отсюда $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \max_{j=1, \dots, m} |x^{(j)} + y^{(j)}| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty. \quad \frac{1}{2} \square$

Покажем, что норма $\|\mathbf{x}\|_\infty$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_2$

$$|x^{(j)}| = \sqrt{|x^{(j)}|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2} = \|\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{j=1,m} |x^{(j)}| \leq \|\mathbf{x}\|_2.$$

Противоположное неравенство

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^m (\max_{k=1,m} |x^{(k)}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \sqrt{m}. \quad \square$$

Теорема 6.3. Нормы $\|\mathbf{x}\|_1$ и $\|\mathbf{x}\|_\infty$ эквивалентны.

Доказательство. 1) $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| \leq \sum_{j=1}^m \|\mathbf{x}\|_\infty = m \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty.$

2) $|x^{(j)}| \leq \sum_{j=1}^m |x^{(j)}| = \|\mathbf{x}\|_1 \Rightarrow \max_{j=1,m} |x^{(j)}| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1. \quad \square$

Замечание. Выясним, как выглядит единичный шар в норме $\|\cdot\|_\infty$. При $m = 2$ $B_1(0) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) : \max_{j=1,2} |x^{(j)}| \leq 1\}$. Равенство $\max(|x^{(1)}|, |x^{(2)}|) = 1$ определяет на плоскости квадрат, вершины которого находятся в точках $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$. Таким образом единичный шар в норме $\|\cdot\|_\infty$ тоже квадрат (точнее квадрат вместе с его внутренностью) как и в случае нормы $\|\cdot\|_1$, но со сторонами, параллельными осям координат.

7. Предел последовательности точек в \mathbb{R}^m

В соответствии с тем, что мы определили в \mathbb{R}^m три нормы, мы можем говорить о трех видах сходимости. Пусть $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ есть последовательность точек в \mathbb{R}^m , $\mathbf{x}_n = (x_n^{(j)})_{j=1}^\infty$.

$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ по норме $\|\cdot\|_1$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_1 = 0.$

$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ по норме $\|\cdot\|_\infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_\infty = 0.$

$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ по норме $\|\cdot\|_2$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_2 = 0.$

Теорема 7.1. Если $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ по одной из норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, то $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ и по остальным двум нормам.

Доказательство. Из эквивалентности норм получаем

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

т.е. из сходимости по норме $\|\cdot\|_1$ следует сходимость по нормам $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. \square

Теорема 7.2. Последовательность $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ в \mathbb{R}^m тогда и только тогда, когда последовательность \mathbf{x}_n сходится к \mathbf{x}_0 по координатам, т.е.

$$\forall j = \overline{1, m} \quad x_n^{(j)} \rightarrow x_0^{(j)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ в \mathbb{R}^m . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_\infty = 0$. Но

$$|x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| \leq \max_{j=\overline{1, m}} |x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_\infty \rightarrow 0,$$

т.е. $\forall j$, последовательность $x_n^{(j)} \rightarrow x_0^{(j)} \quad (n \rightarrow \infty)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $x_n^{(j)} \rightarrow x_0^{(j)} \quad (j = \overline{1, m})$. Отсюда $|x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| \rightarrow 0$. Но $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_1 = \sum_{j=1}^m |x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| \rightarrow 0$, т.к. предел суммы равен сумме пределов. \square

8. Полнота пространства \mathbb{R}^m

Замечание. Так как нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ эквивалентны, то последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$, фундаментальная по одной норме, будет фундаментальна и по двум другим.

Теорема 8.1. Если последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ фундаментальна в \mathbb{R}_m , то она сходится к некоторому элементу $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_m$ по норме пространства \mathbb{R}^m , т.е. \mathbb{R}^m – полное нормированное пространство.

Доказательство. Выберем в \mathbb{R}^m фундаментальную последовательность (\mathbf{x}_n) по норме $\|\cdot\|_\infty$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n, k \geq n_0 \quad \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Но для любого вектора $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$: $x^{(j)} \leq \max_{j=\overline{1, m}} |x^{(j)}| = \|\mathbf{x}\|_\infty$, следовательно

$$\forall n, k \geq n_0 \quad |x_n^{(j)} - x_k^{(j)}| < \varepsilon,$$

и это верно при всех $j = \overline{1, m}$. Это означает, что последовательности $(x_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ при каждом $j = \overline{1, m}$ фундаментальны. Но $(x_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ – числовая последовательность, и по критерию Коши для любого $j = \overline{1, m}$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(j)} = x_0^{(j)}$. Таким образом определены числа $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m)}$, т.е. вектор \mathbf{x}_0 . Так как последовательность $x_n^{(j)} \rightarrow x_0^{(j)}$, то по теореме 7.2 $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. \square

9. Компактные множества в \mathbb{R}^m .

Замкнутый куб – компактное множество

Определение 9.1. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, причем $\forall j, a^{(j)} \leq b^{(j)}$. Множество

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \stackrel{df}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : a^{(j)} \leq x^{(j)} < b^{(j)}\}$$

будем называть замкнутым прямоугольником в \mathbb{R}^m . Если $\forall j = \overline{1, m} \quad b^{(j)} - a^{(j)} = d$, то такой прямоугольник называется замкнутым кубом.

Замечание. Если \mathbf{d} – вектор, все компоненты которого равны числу $d > 0$, то каждый куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ есть замкнутый шар в \mathbb{R}^m с центром в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{d}}{2}$ и радиуса $\frac{d}{2}$ по норме $\|\cdot\|_\infty$.

Определение 9.2. Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется компактным в \mathbb{R}^m , если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 9.1. Замкнутый куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ в \mathbb{R}^m есть полное множество.

Доказательство. От противного. Пусть существует покрытие $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset [\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$, где $\mathbf{d} = (d, d, \dots, d)$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Разобьем куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ на 2^m замкнутых кубов вида $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}]$, где $a_1^{(j)} = a^{(j)}$ или $a_1^{(j)} = a^{(j)} + \frac{d}{2}$. Тогда среди этих кубов найдется по крайней мере один, из покрытия которого множествами G_α ($\alpha \in I$) нельзя выделить конечное подпокрытие. Обозначим его через $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}]$. Очевидно, что это замкнутый шар радиуса $\frac{d}{2}$, лежащий внутри $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Этот куб $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}]$ разделим на 2^m кубов $[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{d}}{2^2}]$, где $a_2^{(j)} = a_1^{(j)}$ или $a_2^{(j)} = a_1^{(j)} + \frac{d}{2^2}$. Тогда среди них есть по крайней мере один куб, из покрытия которого множествами G_α ($\alpha \in I$) нельзя выделить конечное подпокрытие. Обозначим его $[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{d}}{2^2}]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных кубов

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}] \supset [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}] \supset [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{d}}{2^2}] \supset \dots,$$

которые являются замкнутыми шарами радиусов $\frac{d}{2^{n+1}} \rightarrow 0$. Так как \mathbb{R}^m полное пространство, то существует точка \mathbf{x}_0 , принадлежащая всем кубам $[\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n + \frac{\mathbf{d}}{2^n}]$ одновременно. Очевидно, что \mathbf{x}_0 принадлежит некоторому открытому множеству G_{α_0} . Так как G_{α_0} открытое, то существует шар

$B_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}_0) \subset G_{\alpha_0}$. Но тогда \mathbf{x}_0 принадлежит замкнутому кубу с длиной стороны $< \varepsilon_0$. Пусть это куб $[\mathbf{a}_{n_0}, \mathbf{a}_{n_0} + \frac{\mathbf{d}}{2^{n_0}}]$. Тогда G_{α_0} есть открытое покрытие этого куба, что противоречит построению кубов. \square

10. Структура компактного множества в \mathbb{R}^m

Определение 10.1. Множество $X \subset \mathbb{R}^m$ ограничено, если оно лежит внутри некоторого шара.

Теорема 10.1. Всякое компактное множество в \mathbb{R}^m ограничено.

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ – компактно. При каждом натуральном n выберем окрестность $O_n(0)$. Объединение этих окрестностей есть все \mathbb{R}^m , и значит совокупность окрестностей $O_n(0)$ образует открытое покрытие множества K . Так как K компактно, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $(O_n(0))_{n=1}^N$. Тогда множество K лежит в шаре $O_N(0)$ с центром в точке $\mathbf{x}_0 = 0$ радиуса $R = N$. Это означает, что K – ограниченное множество. \square

Теорема 10.2. Всякое компактное множество в \mathbb{R}^m замкнуто.

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ компактно. Покажем, что оно замкнуто. Выберем точку \mathbf{a} – предельную точку множества K . Покажем, что $\mathbf{a} \in K$. Рассуждаем от противного. Пусть это не так, т.е. $\mathbf{a} \notin K$. Выберем произвольную точку $\mathbf{x} \in K$. Так как $\mathbf{a} \notin K$, то существует $O(\mathbf{x})$, которая не пересекается с некоторой $O_{r_x}(\mathbf{a})$. Совокупность всех таких окрестностей $O(\mathbf{x})$ образует покрытие множества K . Но K – компактное множество. Следовательно, можно выбрать конечное число окрестностей

$$O_{r_1}(\mathbf{x}_1), O_{r_2}(\mathbf{x}_2), \dots, O_{r_n}(\mathbf{x}_n),$$

которые покрывают множество K . Каждая окрестность $O_{r_j}(\mathbf{x}_j)$ не пересекается с окрестностью $O_{r_{x_j}}(\mathbf{a})$ (по построению). Пусть

$$r = \min(r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_m}) > 0.$$

В окрестности $O_r(\mathbf{a})$ нет точек множества K , т.е. \mathbf{a} не является предельной точкой, что противоречит выбору \mathbf{a} . \square

Теорема 10.3. Если K – компактное множество и $F \subset K$ – замкнутое множество, то F – компактно.

Доказательство. Выберем покрытие множества F открытыми множествами $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$. Если $\cup G_\alpha \supset K$, то все доказано.

Пусть неверно, что $\cup G_\alpha \supset K$. Для каждой точки $\mathbf{x} \in K \setminus (\cup G_\alpha)$ выберем окрестность $O(\mathbf{x})$, которая не содержит точек множества F , что возможно, ибо F замкнутое множество. Тогда множества G_α и $O(\mathbf{x})$ образуют открытое покрытие множества K . Но K – компактно, следовательно, можно выделить конечное подпокрытие множества K

$$G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} \cup O(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup O(\mathbf{x}_s).$$

Но множество $O(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup O(\mathbf{x}_s)$ не содержит точек из F , тогда множества $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}$ образуют конечное покрытие F . Т.е. F – компактно. \square

Теорема 10.4. В пространстве \mathbb{R}^m множество K компактно тогда и только тогда, когда K ограничено и замкнуто.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь – это теорема 10.1 и теорема 10.2.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть K ограничено и замкнуто. Так как K замкнуто, то существует замкнутый куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}] \supset K$. Но куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ – компактное множество по теореме 9.1, K – замкнутое и $K \subset [\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$, следовательно, по теореме 10.3 K – компактно. \square

Замечание. В общем случае (т.е. не в пространстве \mathbb{R}^m) теорема 10.4 неверна. Этот факт будет доказан в курсе топологии.

Теорема 10.5. $K \subset \mathbb{R}^m$ компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности $(\mathbf{x})_{n=1}^\infty$ элементов из K можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу $\mathbf{x}_0 \in K$.

11. Структура открытого множества в \mathbb{R}^m

Определение 11.1. Пусть $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{i} = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(m)}) \in \mathbb{Z}^m$.

Прямоугольник

$$\Delta_{\mathbf{i}}^{(n)} = \left[\frac{i^{(1)}}{2^n}, \frac{i^{(1)} + 1}{2^n} \right) \times \left[\frac{i^{(2)}}{2^n}, \frac{i^{(2)} + 1}{2^n} \right) \times \dots \times \left[\frac{i^{(n)}}{2^n}, \frac{i^{(n)} + 1}{2^n} \right)$$

будем называть двоичным кубом ранга n .

Замечание. Если на плоскости \mathbb{R}^2 провести прямые $x^{(1)} = \frac{i}{2^n}$, $x^{(2)} = \frac{j}{2^n}$, то вся плоскость \mathbb{R}^2 будет разбита на счетное семейство дизъюнктивных двоичных кубов ранга n .

Теорема 11.1. *Всякое открытое множество в \mathbb{R}^m ($m \geq 2$) есть объединение счетного семейства дизъюнктивных двоичных кубов.*

Доказательство. Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество. Из всех двоичных кубов $\Delta_i^{(0)}$ ранга $n = 0$ выберем те кубы, которые лежат внутри G . Обозначим через \mathcal{N}_0 – семейство этих кубов и через E_0 их объединение. Рассмотрим кубы ранга $n = 1$. Обозначим через \mathcal{N}_1 совокупность кубов ранга $n = 1$, которые лежат внутри $G \setminus E_0$ и пусть E_1 их объединение. Продолжим этот процесс до бесконечности. Получим семейство множеств $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ таких, что

- 1) E_n – объединение дизъюнктивных кубов ранга n ,
- 2) E_n – лежит внутри множества $G \setminus E_0 \setminus E_1 \setminus \dots \setminus E_{n-1}$. Очевидно, что $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \subset G$, так как любое $E_n \subset G$. Покажем, что $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \supset G$. Выберем

$\mathbf{x}_0 \in G$ и покажем, что $\mathbf{x}_0 \in \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Так как G – открытое, то существует окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset G$. Если n такое, что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, то внутри $O_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ есть двоичный куб ранга n , содержащий \mathbf{x}_0 и лежащий внутри $O_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ и, следовательно, внутри G . Пусть n_0 есть наименьший из тех n , для которых $\Delta_i^{(n)} \subset G$ и содержащих точку \mathbf{x}_0 . Тогда этот куб $\Delta_i^{(n_0)}$ есть один из кубов семейства \mathcal{N}_{n_0} . Отсюда

$$\Delta_i^{(n_0)} \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Т.е. $G \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n$. \square

12. Функции m переменных. Различные определения предела в точке

Определение 12.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$). Отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией m переменных. Если $f : \mathbf{x} \rightarrow y$, то y называют значением функции в точке \mathbf{x} и пишут $y = f(\mathbf{x})$. Так как $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$, то вместо $y = f(\mathbf{x})$ можно писать $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$. Множество $f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{x} \in X, y = f(\mathbf{x})\}$ – это множество всех значений $f(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in X$. $f(X)$ называется образом множества X .

Определение 12.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, \mathbf{x}_0 – предельная точка на X . Число

f_0 называется пределом функции f в точке \mathbf{x}_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}_0) - f_0| < \varepsilon.$$

Обозначаем

$$f_0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}).$$

Замечание 1. Так как нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ эквивалентны, то определение предела не зависит от того, какая норма используется в определении.

Замечание 2. Определение 1.2 можно записать в виде

$$\forall O_\varepsilon(f_0) \exists O_\delta(\mathbf{x}_0) \forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X, f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f_0).$$

Это определение на языке окрестностей.

Теорема 12.1. Пусть \mathbf{x}_0 – предельная точка множества X , f определена на X . $f_0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, ($\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_n \in X$) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f_0$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f_0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Выбираем последовательность $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}_n) - f_0| < \varepsilon.$$

Так как $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$, значит $\forall n \geq n_0$, $|f(\mathbf{x}_n) - f_0| < \varepsilon$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\forall \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f_0$. Покажем, что $f_0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Предположим, что это не верно. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta = \frac{1}{n}, \exists \mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n \in X \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \frac{1}{n}, |f(\mathbf{x}_n) - f_0| \geq \varepsilon_0,$$

т.е. $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, но $f(\mathbf{x}_n) \not\rightarrow f_0$. Получили противоречие. \square

Замечание. Таким образом, определение предела можно задать в виде:

Определение 12.3.

$$f_0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \stackrel{df}{=} \forall \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0, (\mathbf{x}_n \in X, \mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f_0.$$

Это определение предела на языке на языке последовательностей или по Гейне.

13. Свойства предела функции в точке

1) Если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $A = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \wedge B = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in X, |f(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$\exists \delta_2 > 0, \forall \mathbf{x} \in X, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_2 \quad |f(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall \mathbf{x}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \quad |B - A| \leq |B - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отсюда $|B - A| = 0$, следовательно, $A = B$. \square

2) Если $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0$, то $\exists \overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{x}_0)$, в которой $\text{sign} f(\mathbf{x}) = \text{sign} A$.

3) Если $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \wedge \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B$, то

3.1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.

3.2. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.

3.3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.

3.4. Если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B \neq 0$, то $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{g(\mathbf{x})} = \frac{1}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$.

3.5. Если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B \neq 0$, то $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$.

4) Если в $\overset{\circ}{O}(\mathbf{x}_0) \cap X$, $h_1(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h_2(\mathbf{x})$ и $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h_1(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h_2(\mathbf{x}) = A$,

то $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$.

5) Если в $\overset{\circ}{O}(\mathbf{x}_0) \cap X$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, то $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.

6) Если $f(\mathbf{x})$ ограничена на множестве X , т.е. $\exists c > 0 \forall \mathbf{x} \in X, |f(\mathbf{x})| \leq c$ и $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$, то $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = 0$.

7) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{f(\mathbf{x})} = 0$.

8) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in \overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X \quad |f(\mathbf{x})| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Все свойства 2)–8) доказываются аналогично одномерному случаю. Доказать самостоятельно.

14. Предел по направлению

Определение 14.1. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, \mathbf{e}_0 – единичный вектор в \mathbb{R}^m , т.е. $\|\mathbf{e}_0\|_2 = 1$. Множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_0\}$ называют прямой в \mathbb{R}^m .

Определение 14.2. Пусть f определена в $\overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{x}_0)$ и пусть $l : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ – прямая, проходящая через точку \mathbf{x}_0 . Рассмотрим функцию $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$, которая есть функция одной переменной t . Число $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$ называется пределом по направлению l или по направлению вектора \mathbf{e} . Обозначается $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in l} f(\mathbf{x})$.

Теорема 14.1. Если f определена в $\overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{x}_0)$ и в точке \mathbf{x}_0 существует предел, равный A , то в точке \mathbf{x}_0 существует предел по любому направлению l , равный этому числу A .

Доказательство. Пусть $A = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$. Пусть теперь $|t| < \delta$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$. Тогда $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 = |t| \cdot \|\mathbf{e}\|_2 = |t| < \delta$. Отсюда $\forall t \neq 0, |t| < \delta, |f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - A| < \varepsilon$, следовательно, предел по направлению l равен A . \square

Замечание. Обратное неверно. Для примера рассмотрим функцию $f(x, y) = 0$ на плоскости XOY кроме точек (x, y) , лежащих на параболе $y = x^2$, в которых $f(x, y) = 1$. Тогда по любому направлению $l \lim f(x, y) = 0$. Но $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ не существует, т.к. в любой $O(0, 0)$ есть точки, в которых $f(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 1$.

15. Повторные пределы

Рассмотрим для простоты случай размерности $m = 2$.

Определение 15.1. Пусть $f(x, y)$ определена в прямоугольной окрестности точки (x_0, y_0) за исключением быть может точки (x_0, y_0) . Предел

$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$ называется повторным пределом.

Вопрос: когда $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ равен повторному?

Теорема 15.1. Пусть $f(x, y)$ определена в прямоугольной окрестности точки (x_0, y_0) за исключением быть может точки (x_0, y_0) , и пусть

1) $\forall y \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$.

$$2) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

Тогда существует повторный предел $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$.

Доказательство. Запишем разность

$$|\varphi(y) - A| \leq |\varphi(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - A|.$$

По определению предела в точке

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (x,y), |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta, |f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь y такое, что $|y - y_0| < \delta$. Так как $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \varphi(y)$, то $\exists \delta_2 < \delta$, такое, что $\forall x, |x - x_0| < \delta_2 |f(x,y) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. \square

16. Непрерывность функции в точке

Определение 16.1. Пусть f определена на $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in X$. f называется непрерывной в точке \mathbf{x}_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Это определение на языке $\varepsilon - \delta$ (по Коши).

Определение 16.2. Функция f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , если

$$\forall O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0)) \exists O_\delta(\mathbf{x}_0) \forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X \quad f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0)).$$

Это определение на языке окрестностей.

Определение 16.3. Функция f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , если

$$\forall O(f(\mathbf{x}_0)) \exists O_\delta(\mathbf{x}_0) \quad f(O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X) \subset O(f(\mathbf{x}_0)).$$

Это топологическое определение.

Теорема 16.1. Если \mathbf{x}_0 – предельная точка множества X , то f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Доказательство повторяет одномерный случай.

17. Свойства непрерывных функций

Теорема 17.1. Пусть f, g непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 \in X$, f, g определены на X . Тогда

- 1) $f \pm g$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 .
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ функция λf непрерывна в точке \mathbf{x}_0 .
- 3) $f \cdot g$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 .
- 4) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\exists O(\mathbf{x}_0)$, в которой $|g(\mathbf{x})| \geq \frac{|g(\mathbf{x}_0)|}{2}$.
- 5) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\exists O(\mathbf{x}_0)$, в которой $\text{sign } g(\mathbf{x}) = \text{sign } g(\mathbf{x}_0)$.
- 6) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\frac{1}{g(\mathbf{x})}$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 .
- 7) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 .
- 8) Если $f(\mathbf{x})$ непрерывна, то $|f(\mathbf{x})|$ – непрерывная функция.

Эти свойства доказываются так же, как в одномерном случае. Доказать самостоятельно.

Примеры. 1) $f(\mathbf{x}) = x^{(j)}$ – непрерывная функция в любой точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$.

В самом деле, $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |x^{(j)} - x_0^{(j)}| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty$, и, если $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty < \varepsilon$, то в определении надо взять $\delta = \varepsilon$.

2) Функция $P_n(\mathbf{x}) = \sum_{n_1 + \dots + n_m \leq n} a_{n_1 n_2 \dots n_m} (x^{(1)})^{n_1} (x^{(2)})^{n_2} \dots (x^{(m)})^{n_m}$ – назы-

вается многочленом степени n от m переменных. Так как он выражается через функции $f_j(\mathbf{x}) = x^{(j)}$ с помощью конечного числа операций сложения и умножения, то многочлен $P_n(\mathbf{x})$ есть непрерывная функция.

18. Свойства функций непрерывных на компактных множествах

Определение 18.1. Функция f , определенная на $X \subset \mathbb{R}^m$, называется непрерывной на множестве X , если она непрерывна в каждой точке множества X . Функция f называется ограниченной на X , если $\exists c > 0, \forall \mathbf{x} \in X \quad |f(\mathbf{x})| \leq c$.

Теорема 18.1. Если f непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то f ограничена на K .

Доказательство. От противного. Пусть f не является ограниченной на K . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \mathbf{x}_n \in K, \quad |f(\mathbf{x}_n)| \geq n. \quad (18.1)$$

Последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ принадлежит компакту K , значит, из нее можно выделить подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in K$. Но f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , следовательно, $f(\mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_{n_k})$. Отсюда последовательность $f(\mathbf{x}_{n_k})$ – ограничена, что противоречит предположению (18.1). \square

Теорема 18.2. *Если функция f непрерывна на компакте K , то она достигает на компакте K своего наибольшего и наименьшего значения.*

Доказательство. Так как f непрерывна на компакте K , то по теореме 18.1 f ограничена на K . Значит множество $f(K)$ – ограничено. Следовательно,

$$\exists \sup_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) = M, \quad \exists \inf_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) = m.$$

По определению \sup существует последовательность $\mathbf{x}_n \in K$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = M \quad \text{и} \quad f(\mathbf{x}_n) \leq M.$$

Из последовательности \mathbf{x}_n выделяем сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in K$. Так как f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , то $f(\mathbf{x}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_{n_k}) = M$, т.е. существует точка \mathbf{x}_0 , в которой f принимает наибольшее значение.

Аналогично доказывается, что в некоторой точке \mathbf{y}_0 функция f принимает наименьшее значение. \square

Определение 18.2. *Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X , если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Очевидно, что если f равномерно непрерывна на X , то она непрерывна.

Теорема 18.3. *Если функция f непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то f равномерно непрерывна на K .*

Доказательство. От противного. Пусть f не равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta = \frac{1}{n}, \exists \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < \frac{1}{n}, \quad \text{но} \quad |f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (18.2)$$

Так как K компактно, то из \mathbf{x}_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in K$. Тогда и $\mathbf{y}_{n_k} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Так как f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , то $f(\mathbf{x}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{y}_{n_k})$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(\mathbf{x}_{n_k}) - f(\mathbf{y}_{n_k})| = 0$, что противоречит (18.2). \square

19. Отображение из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n , непрерывные отображения

Определение 19.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), тогда отображение \mathbf{f} называется отображением из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n . Таким образом $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть вектор в \mathbb{R}^n , т.е.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}).$$

Замечание. Так как $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, то при каждом $j = 1, \dots, n$ значение $y^{(j)}$ есть функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, обозначим ее $f^{(j)}(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть вектор $(f^{(1)}(\mathbf{x}), f^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, f^{(n)}(\mathbf{x}))$. Таким образом, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ можно рассматривать как совокупность из n скалярных векторов $f^{(j)}(\mathbf{x})$, ($j = 1, 2, \dots, n$).

Определение 19.2. Вектор $\mathbf{A} = (A^{(j)})_{j=1}^n$ называется пределом отображения \mathbf{f} в точке \mathbf{x}_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\mathbf{A} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Теорема 19.1. $\mathbf{A} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда

$$\forall j = \overline{1, n} \quad A^{(j)} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f^{(j)}(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как $|A^{(j)} - f^{(j)}(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty$, то необходимость очевидна.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta_j$ ($j = \overline{1, n}$), что $\forall \mathbf{x} \in \overset{\circ}{O}_{\delta_j}(\mathbf{x}_0) \quad |f^{(j)}(\mathbf{x}) - A^{(j)}| < \varepsilon$. Пусть $\delta = \min \delta_j$. Тогда

$$\forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\|_\infty < \varepsilon. \quad \square$$

Определение 19.3. Пусть $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in X$. \mathbf{f} называется непрерывной в точке \mathbf{x}_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Замечание. Из определения 19.2 и 19.1 следует, что если \mathbf{x}_0 есть предельная точка X , то \mathbf{f} непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Теорема 19.2. Вектор-функция \mathbf{f} непрерывна в точке \mathbf{x}_0 тогда и только тогда, когда функции $f^{(k)}(\mathbf{x})$ ($k = \overline{1, n}$) непрерывны в точке \mathbf{x}_0 .

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь очевидно следует из неравенства

$$|f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_\infty.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f^{(k)}$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 ($k = \overline{1, n}$). Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_k > 0 \forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_k \Rightarrow |f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min \delta_k$, имеем

$$\forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \max_{k=\overline{1, n}} |f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{x}_0)| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_\infty < \varepsilon. \quad \square$$

Задача. Доказать теорему 19.2, используя 19.1.

Теорема 19.3. Пусть 1) вектор-функция \mathbf{f} определена в $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in X$, \mathbf{f} непрерывна в точке \mathbf{x}_0 ;

2) вектор-функция $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ определена на множестве $T \subset \mathbb{R}^l$, $\mathbf{t}_0 \in T$, $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ непрерывна в точке \mathbf{t}_0 , $\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$;

3) значения $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in X$, если $\mathbf{t} \in T$, т.е. $\mathbf{x}(T) \subset X$.

Тогда композиция $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ непрерывна в точке \mathbf{t}_0 .

Доказательство. По определению $(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$. Так как \mathbf{f} непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Так как $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ непрерывна в точке \mathbf{t}_0 , то для выбранного $\delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall \mathbf{t}, \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\| < \sigma \Rightarrow \|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)\| < \delta$, значит, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}_0))\| < \varepsilon$. Следовательно, \mathbf{f} непрерывна в точке \mathbf{t}_0 . \square

Т.е. композиция двух непрерывных вектор-функций есть непрерывная вектор-функция.

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Частные производные.

Дифференцируемость функции в точке

Определение 1.1. Пусть f определена в $O(\mathbf{x}_0)$, $f : O(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x^{(j)} \rightarrow x_0^{(j)}} \frac{f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \dots, x_0^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(j-1)}, x_0^{(j)}, \dots, x_0^{(m)})}{x^{(j)} - x_0^{(j)}},$$

то он называется частной производной функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_0 по переменной $x^{(j)}$. Обозначение: $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ или $\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$. Таким образом, в точке \mathbf{x}_0 может существовать m частных производных

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(2)}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(m)}}.$$

Замечание. Из определения следует, что для нахождения производной $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ нужно зафиксировать все переменные, кроме $x^{(j)}$, и искать производную по этой переменной $x^{(j)}$ как от функции одной переменной. Поэтому при нахождении частной производной $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ остаются справедливы формулы нахождения производных суммы, произведения, частного.

Определение 1.2. Пусть f определена в $O(\mathbf{x}_0)$. f называется дифференцируемой в точке \mathbf{x}_0 , если существуют числа A_1, A_2, \dots, A_m , зависящие от точки \mathbf{x}_0 , такие, что приращение $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m A_j \cdot (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \quad (1.1)$$

где $\alpha(\mathbf{x})$ определена в $O(\mathbf{x}_0)$ и $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \alpha(\mathbf{x}) = 0$.

Теорема 1.1. Если f дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 , то в точке \mathbf{x}_0 существуют все частные производные $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ и справедливы равенства $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} = A_j$.

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 . Положим в (1.1)

$$x^{(1)} = x_0^{(1)}, \dots, x^{(j-1)} = x_0^{(j-1)}, x^{(j+1)} = x_0^{(j+1)}, \dots, x^{(m)} = x_0^{(m)}.$$

Тогда (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \dots, x_0^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m)}) &= \\ &= A_j(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \cdot |x^{(j)} - x_0^{(j)}|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \dots, x_0^{(m)}) - f(\mathbf{x}_0)}{x^{(j)} - x_0^{(j)}} = A_j + \alpha(\mathbf{x}) \cdot \text{sign}(x^{(j)} - x_0^{(j)}).$$

Перейдем к пределу при $x^{(j)} \rightarrow x_0^{(j)}$. Тогда $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, значит, $\alpha(\mathbf{x}) \rightarrow 0$. Следовательно, предел правой части существует и равен A_j . Но тогда существует предел и левой части, который и есть частная производная по $x^{(j)}$. \square

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. из существования частной производной не следует дифференцируемость. Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \wedge y \neq 0. \\ 0, & x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$$

Тогда обе частные производные в точке $(x, y) = (0, 0)$ равны нулю, т.е. равенство (1.1) принимает вид

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \alpha(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\|. \quad (1.2)$$

Но если $x = y$, причем $x \neq 0$, то $f(x, y) - f(x_0, y_0) = 1 - 0 = 1 \not\rightarrow 0$, и равенство (1.2) невозможно.

2. Дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные

Вопрос: в каком случае из существования частных производных следует дифференцируемость?

Теорема 2.1. Пусть f имеет в $O(\mathbf{x}_0)$ частные производные, которые непрерывны в точке \mathbf{x}_0 . Тогда

- 1) f непрерывна в точке \mathbf{x}_0 .
- 2) f дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 .

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m)}) = \\ &= f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x^{(m)}) + \\ &+ f(x_0^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(m)}) + \\ &+ f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(m)}) - \dots \\ &\dots \dots \dots \\ &+ f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m-1)}, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m-1)}, x_0^{(m)}) = \end{aligned}$$

по теореме Лагранжа для функции одной переменной

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f(\xi_1)}{\partial x^{(1)}}(x^{(1)} - x_0^{(1)}) + \frac{\partial f(\xi_2)}{\partial x^{(2)}}(x^{(2)} - x_0^{(2)}) + \dots + \frac{\partial f(\xi_m)}{\partial x^{(m)}}(x^{(m)} - x_0^{(m)}) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right) (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)}) \quad (2.1) \end{aligned}$$

Обозначим $\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right) (x^{(j)} - x_0^{(j)}) = \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2$. Тогда (2.2) примет вид

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2. \quad (2.2)$$

Покажем, что $\alpha(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. По неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right) (x^{(j)} - x_0^{(j)}) \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\alpha(\mathbf{x})| \leq \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, т.к. в этом случае $\xi_j \rightarrow \mathbf{x}_0$. \square

3. Производная сложной функции

Теорема 3.1. Пусть 1) $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 ;

2) функции $x^{(j)} = x^{(j)}(t)$ дифференцируемы в точке $t = t_0$;

3) $x^{(j)}(t_0) = x_0^{(j)}$.

Тогда 1) функция $F(t) = f(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(m)}(t))$ дифференцируема в точке $t = t_0$;

2) справедливо равенство

$$\frac{dF(t_0)}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 , то

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2. \quad (3.2)$$

где $\alpha(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Будем считать, что $\alpha(\mathbf{x}_0) = 0$, тогда $\alpha(\mathbf{x})$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 . Так как функции $x^{(j)}(t)$ дифференцируемы в точке $t = t_0$, то

$$x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0) = \frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} (t - t_0) + \alpha_j(t) |t - t_0| \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.3)$$

где $\alpha_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$. Будем считать, что $\alpha_j(t_0) = 0$. В этом случае $\alpha_j(t)$ непрерывны в точке $t = t_0$. По условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Подставляя значения $x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t) - x_0^{(j)}$ из (3.3) в (3.2), получим

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} (t - t_0) + \alpha_j(t) |t - t_0| \right) + \\ &+ \alpha(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)\|_2 = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} (t - t_0) + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \alpha_j(t) \right) |t - t_0| + \alpha(\mathbf{x}(t)) \cdot \left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учитывая (3.3), имеем

$$\left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0)|^2 \right)^{1/2} = |t - t_0| \cdot \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} + \alpha_j(t) \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Подставим (3.5) в (3.4). Обозначим

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \alpha_j(t) + \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} + \alpha_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \alpha(\mathbf{x}(t)) = \beta(t).$$

Покажем, что $\lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = 0$.

1) Так как $\alpha_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, то $\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \alpha_j(t) \rightarrow 0$.

2) Так как $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_j(t) \rightarrow 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} + \alpha_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

3) Так как $\mathbf{x}(t)$ непрерывна в точке t_0 и $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, функция $\alpha(\mathbf{x})$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 и $\alpha(\mathbf{x}_0) = 0$, но функция $\alpha(\mathbf{x}(t))$ непрерывна в точке $t = t_0$ и $\alpha(\mathbf{x}(t_0)) = 0$. Отсюда $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(\mathbf{x}(t)) = 0$. Это означает, что $\beta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$. Запишем (3.4) в виде

$$F(t) - F(t_0) = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \frac{dx^{(j)}(t_0)}{dt} \right) (t - t_0) + \beta(t) \cdot |t - t_0|.$$

Это означает, что F дифференцируема в точке $t = t_0$, и справедливо (3.1). \square

Пример. $f(x, y) = xy^2$, $x = \sin^2 t$, $y = \cos t$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = y^2 \cdot 2 \sin t \cdot \cos t + 2xy \cdot (-\sin t).$$

4. Производная по направлению. Вектор-градиент

Определение 4.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ определена в $O(\mathbf{x}_0)$, \mathbf{e} – единичный вектор, $l: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ – прямая, проходящая через точку \mathbf{x}_0 . Тогда функция $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$ есть функция переменной t , при этом точка $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ пробегает прямую l . Производная $F'(0)$ называется производной функции f в точке \mathbf{x}_0 по направлению l (или по направлению вектора \mathbf{e}) и обозначают

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial l} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}}.$$

Теорема 4.1. Пусть f дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 , \mathbf{e} – единичный вектор с координатами

$$\mathbf{e} = (e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(m)}).$$

Тогда в точке \mathbf{x}_0 существует производная по направлению \mathbf{e} , и справедливо равенство

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot e^{(j)}.$$

Доказательство. Функция $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ имеет координаты $x^{(j)}(t) = x_0^{(j)} + te^{(j)}$, которые есть дифференциал функции в точке $t = 0$ и $x^{(j)}(0) = x_0^{(j)}$. По теореме о дифференцируемости сложной функции функция $F(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{e})$ дифференцируема в точке $t = 0$ и

$$F'(0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{dx^{(j)}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot e^{(j)}. \quad \square$$

Определение 4.2. Вектор с координатами $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ называется вектором-градиентом и обозначается $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$. Таким образом, по определению

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \mathbf{e}_j,$$

где $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Следствие 1. Из определения вектора $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ и теоремы 4.1 следует, что

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = (\text{grad } f(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}),$$

т.е. $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}}$ есть скалярное произведение вектора $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ на вектор \mathbf{e} .

Следствие 2. По неравенству Коши – Буняковского

$$\|(\text{grad } f(\mathbf{x}_0), \mathbf{e})\|_2 \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x}_0)\|_2 \cdot \|\mathbf{e}\|_2 = \|\text{grad } f(\mathbf{x}_0)\|_2.$$

Но в неравенстве Коши – Буняковского

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

равенство достигается в случае, когда $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, т.е. векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. Поэтому в неравенстве

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} \right| \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x}_0)\|_2$$

равенство достигается, когда $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \lambda \mathbf{e}$, т.е. вектор-градиент указывает направление наибольшего изменения функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_0 .

5. Дифференциал функции. Касательная плоскости, уравнение касательной плоскости

Определение 5.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в $O(\mathbf{x}_0)$, т.е. справедливо равенство

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Линейная часть приращения, т.е. сумма

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)})$$

называется дифференциалом функции f в точке \mathbf{x}_0 и обозначается $df(\mathbf{x}_0)$. Таким образом,

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)}). \quad (5.1)$$

Замечание 1. Равенство (5.1) можно записать в виде

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \Delta x^{(j)0}, \quad \text{где } \Delta x_0^{(j)} = x^{(j)} - x_0^{(j)}.$$

Заменяя в нем \mathbf{x}_0 на произвольную точку \mathbf{x} , получаем

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \Delta x^{(j)}. \quad (5.2)$$

Замечание 2. Так как для функции одной переменной $f(x^{(j)}) = x^{(j)}$ приращение $\Delta x^{(j)}$ совпадает с дифференциалом, то равенство (5.2) можно записать в виде

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} dx^{(j)}. \quad (5.3)$$

Замечание 3. Равенство (5.3) сохранится, если \mathbf{x} есть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, но в этом случае $dx^{(j)}$ есть вектор не независимой переменной, а функции $x^{(j)}(t)$. Т.е, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, то

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}(t)) &= \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t)) \cdot dt = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \frac{dx^{(j)}}{dt} \right) dt = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{dx^{(j)}}{dt} \cdot dt \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} dx^{(j)}(t), \end{aligned}$$

т.е. внешний вид дифференциала не изменился. Это свойство называют инвариантностью формы 1-го дифференциала.

Замечание 4. Для дифференциала справедливы свойства:

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$.

2) $d(fg) = fdg + gdf$.

3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(df) \cdot g - (dg) \cdot f}{g^2}$.

Эти свойства проверяются непосредственно.

Определение 5.2. Пусть $f = f(x, y)$ определена в $O(x_0, y_0)$. Множество

$$S = \{M(x, y, z) : z = f(x, y)\} \quad (5.4)$$

называют поверхностью в пространстве \mathbb{R}^3 . (5.4) называют записью поверхности S в явном виде.

Определение 5.3. Пусть f определена в $O(x_0, y_0)$, $S : z = f(x, y)$ – поверхность, $M_0 = M_0(x_0, y_0, f(x_0))$. Плоскость Π , проходящую через точку M_0 и такую, что

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in S}} \frac{d(M, \pi)}{d(M, M_0)} = 0, \quad (5.5)$$

называют касательной плоскостью.

Теорема 5.1. Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то в точке $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x_0, y_0, f(x_0))$ существует касательная плоскость и ее уравнение

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \quad (5.6)$$

Доказательство. 1) Очевидно, что (5.6) есть уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) . Поэтому достаточно проверить, что эта плоскость удовлетворяет условию (5.5). Выбираем точку $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$, т.е. $z_1 = f(x_1, y_1)$. Тогда

$$d(M_1, \Pi) = \frac{\left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0) \right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 + (-1)^2}}.$$

Так как f дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0) \right| = \\ & = |\alpha(x, y)| \cdot \|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| = |\alpha(x_1, y_1)| \cdot \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d(N_1, \pi) \leq \frac{|\alpha(x_1, y_1)| \cdot \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2}}{1}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} d(M_1, M_0) &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (f(x_1, y_1) - z_0)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d(M_1, \Pi)}{d(M_1, M_0)} \leq |\alpha(x_1, y_1)| \rightarrow 0$$

при $(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)$, т.е. при $M_1 \rightarrow M_0$, т.е. S есть касательная плоскость. \square

6. Производные высших порядков.

Независимость от порядка дифференцирования

Определение 6.1. Частная производная по переменной $x^{(i)}$ от частной производной $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ называется частной производной 2-го порядка. Обозначается

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}}.$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} \stackrel{df}{=} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i)}} \right).$$

Аналогично определяется производная любого порядка, а именно:

$$\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} (\partial x^{(2)})^{n_2} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} = \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \left(\frac{\partial^{n-1} f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1-1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m-1}} \right) \quad (6.1)$$

($n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$).

Вопрос: зависит ли производная от того, в каком порядке выполнено дифференцирование?

Теорема 6.1. Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)})$ имеет в точке $(x^{(1)}, x^{(2)})$ обе смешанные производные $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)} \partial x^{(2)}}$ и $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(2)} \partial x^{(1)}}$. Если эти производные непрерывны в точке \mathbf{x} , то в этой точке они равны.

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}) = f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

и назовем приращением по переменной $x^{(1)}$. Образует два приращения $\Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}))$ и $\Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}))$. Покажем, что эти приращения равны. В самом деле:

$$\begin{aligned} \Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) &= \Delta_{h^{(1)}}(f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)})) - f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \\ &= f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) + f(x^{(1)}, x^{(2)}). \\ \Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) &= \Delta_{h^{(2)}}(f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)})) - f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \\ &= f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)}) + f(x^{(1)}, x^{(2)}). \end{aligned}$$

Видим, что эти приращения равны, т.е.

$$\Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) = \Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})). \quad (6.2)$$

По теореме о среднем имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) &= (f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - \\ &- f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)})) - (f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)})) = \end{aligned}$$

по теореме Лагранжа

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} (f(x^{(1)} + \Theta_1 h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)} + \Theta_1 h^{(1)}, x^{(2)})) h^{(1)} =$$

снова по теореме Лагранжа

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}} f(x^{(1)} + \Theta_1 h^{(1)}, x^{(2)} + \Theta_2 h^{(2)}) \right) \cdot h^{(1)} h^{(2)}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}}f(x^{(1)}, x^{(2)})) &= (f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - \\ &- f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)})) - (f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)})) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}(f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + \tilde{\Theta}_2 h^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)} + \tilde{\Theta}_2 h^{(2)}))h^{(2)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} f(x^{(1)} + \tilde{\Theta}_1 h^{(1)}, x^{(2)} + \tilde{\Theta}_2 h^{(2)}) \right) \cdot h^{(2)} h^{(1)}. \end{aligned}$$

Подставляя в (6.2), получаем

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x} + \Theta \mathbf{h})}{\partial x^{(1)} \partial x^{(2)}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x} + \tilde{\Theta} \mathbf{h})}{\partial x^{(2)} \partial x^{(1)}}.$$

Переходя к пределу при $(h^{(1)}, h^{(2)}) \rightarrow 0$, получаем ввиду непрерывности смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)} \partial x^{(2)}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(2)} \partial x^{(1)}}. \quad \square$$

7. Дифференциалы высших порядков

Определение 7.1. Пусть $df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} dx^{(j)}$ – дифференциал функции f . Он есть функция переменных \mathbf{x} и приращений $\Delta x^{(j)} = dx^{(j)}$. Поэтому можно говорить о дифференциале от $df(\mathbf{x})$. Дифференциал от 1-го дифференциала (т.е. от $df(\mathbf{x})$) называется дифференциалом 2-го порядка. Обозначается $d^2 f(\mathbf{x})$. В общем случае: $d^n f(\mathbf{x}) \stackrel{df}{=} d(d^{n-1} f(\mathbf{x}))$.

Замечание. Так как приращения $\Delta x^{(j)} = dx^{(j)}$ не зависят от \mathbf{x} , то при нахождении 2-го и прочих дифференциалов надо *** $\Delta x^{(j)}$ понятным.??

Теорема 7.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет в $O(\mathbf{x})$ непрерывные частные производные до порядка n включительно. Тогда

$$d^n f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)} \partial x^{(i_2)} \dots \partial x^{(i_n)}} dx^{(i_1)} dx^{(i_2)} \dots dx^{(i_n)}.$$

Доказательство проведем индукцией по n .

1) $n = 1$. $df(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}} dx^{(i_1)}$ – справедливое равенство.

2) Пусть $d^{n-1}f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_{n-1}=1}^m \frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}\partial x^{(i_2)}\dots\partial x^{(i_{n-1})}} dx^{(i_1)} dx^{(i_2)} \dots dx^{(i_{n-1})}$.

Тогда

$$\begin{aligned} d^n f(\mathbf{x}) &= d(d^{n-1}f(\mathbf{x})) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{n-1}=1}^m dx^{(i_1)} \dots dx^{(i_{n-1})} d \left(\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_{n-1})}} \right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{n-1}=1}^m dx^{(i_1)} \dots dx^{(i_{n-1})} \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial}{\partial x^{(i_n)}} \left(\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_{n-1})}} \right) dx^{(i_n)}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 7.2. Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет в $O(\mathbf{x})$ непрерывные частные производные до порядка n включительно. Тогда

$$d^n f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_m = n}} \frac{(n_1 + \dots + n_m)!}{n_1! \dots n_m!} \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m} \quad (7.1)$$

Доказательство проведем индукцией по n .

1) $n = 1$. В правой части будут слагаемые, которые соответствуют кортежам $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= \frac{1!}{1!0! \dots 0!} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)}} dx^{(1)} + \frac{1!}{0!1!0! \dots 0!} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(2)}} dx^{(2)} + \dots + \\ &\quad + \frac{1!}{0!0! \dots 1!} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(m)}} dx^{(m)} \end{aligned}$$

– справедливое равенство.

2) Пусть

$$d^{n-1}f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_m = n-1}} \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_m!} \frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^n f(\mathbf{x}) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_m = n-1}} \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_m!} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m} \cdot d \left(\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} \right) = \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_m = n-1}} \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_m!} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1+1} (\partial x^{(2)})^{n_2} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} dx^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} (\partial x^{(2)})^{n_2+1} (\partial x^{(3)})^{n_3} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} dx^{(2)} + \dots + \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m-1)})^{n_m} (\partial x^{(m)})^{n_{m+1}}} dx^{(m)} \Big). \quad (7.2)$$

Таким образом правая часть в (7.2) состоит из слагаемых вида

$$c_{n_1, \dots, n_m} \cdot \frac{\partial^n}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m}. \quad (7.3)$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ (а не $n - 1$). Но каждое такое слагаемое в (7.2) присутствует несколько раз, а именно: слагаемое

$$c_{n_1, \dots, n_m} \cdot \frac{\partial^n}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m}$$

получается от дифференцирования выражений вида

$$\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!\dots n_m!} \frac{\partial^{n-1} f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1-1} (\partial x^{(2)})^{n_2} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}}, \quad (\text{по } x^{(1)})$$

.....

$$\frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_{m-1}!(n_m-1)!} \frac{\partial^{n-1} f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m-1)})^{n_{m-1}} (\partial x^{(m)})^{n_m-1}} \quad (\text{по } x^{(m)}).$$

Поэтому слагаемое (7.3) равно сумме

$$\left(\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!\dots n_m!} + \frac{(n-1)!}{n_1!(n_2-1)!n_3!\dots n_m!} + \dots + \frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_{m-1}!(n_m-1)!} \right) \cdot \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1} \dots (\partial x^{(m)})^{n_m}} (dx^{(1)})^{n_1} \dots (dx^{(m)})^{n_m}.$$

Но

$$c_{n_1, \dots, n_m} = \frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\dots n_m!} (n_1+n_2+\dots+n_m) = \frac{(n-1)! \cdot n}{n_1!n_2!\dots n_m!} = \frac{(n)!}{n_1!n_2!\dots n_m!}. \quad \square$$

8. Формула Тейлора для функций m переменных

Теорема 8.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет в окрестности $O(\mathbf{x}_0)$ непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(n+1)!} \quad (8.1)$$

Равенство (8.1) называют формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа, т.к. при $m = 1$ она превращается в обычную формулу Тейлора:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{f'(\mathbf{x}_0)}{1!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{f''(\mathbf{x}_0)}{2!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\mathbf{x}_0)}{n!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(n+1)!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0)$ и рассмотрим функцию $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ на отрезке $[0, 1]$. Запишем для нее формулу Тейлора в точке $t_0 = 0$, получим

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\Theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \quad (8.2)$$

Вычислим производные, входящие в (8.2). По правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'(t) = \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(\partial x^{(i_1)})} \frac{dx^{(i_1)}}{dt} = \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(\partial x^{(i_1)})} \cdot \Delta x_0^{(i_1)} \Rightarrow$$

$$F'(0) = df(\mathbf{x}_0).$$

$$F''(t) = \sum_{i_1=1}^m \Delta x_0^{(i_1)} \cdot \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial}{\partial x^{(i_2)}} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)}} \right) \cdot \Delta x_0^{(i_2)} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)} \partial x^{(i_2)}} \Delta x_0^{(i_1)} \Delta x_0^{(i_2)} \Rightarrow$$

$$F''(0) = d^2 f(\mathbf{x}_0).$$

.....

$$F^{(n)}(t) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_n)}} \Delta x_0^{(i_1)} \dots \Delta x_0^{(i_n)} \Rightarrow$$

$$F^{(n)}(0) = d^n f(\mathbf{x}_0).$$

$$F^{(n+1)}(\Theta t) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n+1}=1}^m \frac{\partial^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_n)} \partial x^{(i_{n+1})}} \Delta x_0^{(i_1)} \dots \Delta x_0^{(i_{n+1})} \Rightarrow$$

$$F^{(n+1)}(0) = d^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).$$

Подставим эти выражения для производных в (8.2), получим

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!}t + \frac{d^2f(\mathbf{x}_0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!}t^n + \\ + \frac{d^{n+1}f(\mathbf{x}_0 + \Theta t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(n+1)!}t^{n+1}.$$

Положим в этом равенстве $t = 1$. Так как $F(1) = f(\mathbf{x})$, то получаем

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(n+1)!}.$$

□

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Глава 3

Приложения дифференциального исчисления

1. Экстремум функции в точке. Необходимое условие

Снова рассматриваем функции, определенные в \mathbb{R}^m ($m > 1$).

Определение 1.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ определена в $O(\mathbf{x}_0)$. Если существует $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset O(\mathbf{x}_0)$, в которой $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$, то говорят, что в точке \mathbf{x}_0 $f(\mathbf{x})$ имеет \min .

Если $\forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$, то говорят, что в точке \mathbf{x}_0 $f(\mathbf{x})$ имеет \max . Если в точке \mathbf{x}_0 имеется \min или \max , то говорят, что в точке \mathbf{x}_0 $f(\mathbf{x})$ имеет экстремум.

Замечание. Понятие экстремума имеет локальный характер, т.е. при определении экстремума используются значения только в некоторой (возможно, очень малой) окрестности точки \mathbf{x}_0 .

Теорема 1.1 (Необходимое условие экстремума). Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет экстремум в точке \mathbf{x}_0 , и в этой точке существуют все частные производные $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Доказательство. Так как $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_0 экстремум, то функция

$$\tilde{f}(x^{(j)}) = f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \dots, x_0^{(m-1)}, x_0^{(m)})$$

имеет экстремум в точке $x_0^{(j)}$, тогда по необходимому условию экстремума для функции одной переменной,

$$\frac{d}{dx^{(j)}} \tilde{f}(x_0^{(j)}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} = 0. \quad \square$$

2. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 2.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет в $O(\mathbf{x}_0)$ непрерывные частные производные до порядка n включительно. Тогда

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^n, \quad (2.1)$$

где $\alpha(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Доказательство. Записываем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1}f(\mathbf{x}_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{n!}. \quad (2.2)$$

Запишем остаток в виде

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{d^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{n!} + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} = A(\mathbf{x}) + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!}.$$

Для $A(\mathbf{x})$ имеем

$$|A(\mathbf{x})| = \frac{1}{n!} \left| \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \left(\frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_n)}} \right) \cdot (x^{(i_1)} - x_0^{(i_1)}) \dots (x^{(i_n)} - x_0^{(i_n)}) \right| \leq$$

по неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n!} \left(\sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \left(\frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_n)}} - \frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_n)}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m (x^{(i_1)} - x_0^{(i_1)})^2 \dots (x^{(i_n)} - x_0^{(i_n)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{n!} \alpha(\mathbf{x}) \cdot \left(\sum_{i_1=1}^m (x^{(i_1)} - x_0^{(i_1)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(\sum_{i_n=1}^m (x^{(i_n)} - x_0^{(i_n)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n!} \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^n. \end{aligned}$$

Так как производная $\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_n)}}$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 , то $\alpha(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Таким образом,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \frac{1}{n!} \alpha(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^n. \quad \square$$

3. Достаточные условия экстремума в точке

Теорема 3.1. Пусть 1) $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_0 непрерывную производную до 2-го порядка включительно.

2) $df(\mathbf{x}_0) = 0$ (т.е. в точке \mathbf{x}_0 выполнено необходимое условие экстремума). Тогда

1) если $d^2f(\mathbf{x}_0) > 0$, то в точке \mathbf{x}_0 — \min ;

2) если $d^2f(\mathbf{x}_0) < 0$, то в точке \mathbf{x}_0 — \max ;

3) если в любой окрестности точки \mathbf{x}_0 существуют точки, в которых $d^2f(\mathbf{x}_0) > 0$ и $d^2f(\mathbf{x}_0) < 0$, то экстремума нет.

Доказательство. Запишем для $f(\mathbf{x})$ формулу Тейлора с остатком в форме Пеано.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= df(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}d^2f(\mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 = \frac{1}{2}d^2f(\mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} (x^{(i)} - x_0^{(i)})(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 = \\ &= \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \frac{x^{(i)} - x_0^{(i)}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2} \cdot \frac{x^{(j)} - x_0^{(j)}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2} + \alpha(\mathbf{x}) \right). \quad (3.1) \end{aligned}$$

Обозначим: $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} = a_{i,j}$, $\xi_i = \frac{x^{(i)} - x_0^{(i)}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2}$ ($i = 1, \dots, m$), $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$.

Очевидно, что

$$\|\xi\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |\xi^{(i)}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{|x^{(i)} - x_0^{(i)}|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2}} = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 = 1.$$

2) Отображение, которое каждой точке \mathbf{x} , для которой $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 = R$ ставит в соответствие точку $\xi = (\xi^{(i)})_{i=1}^m$ по формуле $\xi = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{R}$, является взаимно-однозначным.

Запишем равенство (3.1) в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} \xi^{(i)} \xi^{(j)} + \alpha(\mathbf{x}) \right).$$

Функция

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} \xi^{(i)} \xi^{(j)}$$

определена на единичной сфере $\|\xi\|_2 = 1$. Но сфера является ограниченным, замкнутым множеством, значит, компактным множеством. На этом множестве непрерывная функция $p(\xi)$ достигает как наибольшего, так и наименьшего значений. Рассмотрим возможные случаи:

1) $d^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Тогда $p(\xi) > 0$ на сфере S , следовательно, $p(\xi)$ достигает наименьшего значения, тогда существует точка ξ_0 , $\|\xi_0\|_2 = 1$, в которой $p(\xi_0) = m_0$ – наименьшее значение. Очевидно, что $m_0 > 0$. Но тогда $\exists O(\mathbf{x}_0)$, в которой $|\alpha(\mathbf{x}_0)| < \frac{m_0}{2}$. Отсюда $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ в $O(\mathbf{x}_0)$, значит, $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$, следовательно, в точке \mathbf{x}_0 – \min .

2) $d^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. $\Rightarrow p(\xi) < 0$ на сфере $S \Rightarrow p(\xi)$ достигается наибольшее значения $M_0 > 0$ в точке $\xi_0 \in S$. Тогда $\exists O(\mathbf{x}_0)$, в которой $|\alpha(\mathbf{x}_0)| < \frac{M_0}{2} = 1$. $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \Rightarrow$ в точке \mathbf{x}_0 – \max .

3) Пусть $\exists \mathbf{x}_1$, в которой $df(\mathbf{x}_0) > 0$. Обозначим $\xi_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_2}$ и рассмотрим прямую $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\xi_1$. Тогда при $t \neq 0$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{i,j} \xi_i \xi_j \cdot t^2 + \varphi(\mathbf{x}) t^2 \cdot \|\xi_1\|_2 = \frac{1}{2} t^2 \left(\sum_{i,j=1}^m a_{i,j} \xi_i \xi_j + \varphi(\mathbf{x}) \right)$$

и т.к. $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, то на прямой $l: \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\xi_1$ в некоторой $O_\delta(\mathbf{x}_0)$, $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$.

Пусть $\exists \mathbf{x}_2$, в которой $df(\mathbf{x}_0) < 0$. Аналогично убеждаемся, что $\exists O_\delta(\mathbf{x}_0)$, в которой на прямой $l: \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\xi_2$, имеем $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$, т.е. в точке \mathbf{x}_0 экстремума нет. \square

Определение 3.1. Функция

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} \xi_i \xi_j$$

называется квадратичной формой.

Замечание 1. Если обозначить $dx_0^{(i)} = \xi^{(i)}$, то дифференциал можно записать в виде

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} \xi^{(i)} \xi^{(j)} \right) \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2}{2}.$$

Поэтому достаточное условие можно записать в виде:

1) если квадратичная форма $p(\xi)$ положительно определена (т.е. $\forall \xi \neq 0$, $p(\xi) > 0$), то в точке \mathbf{x}_0 – \min .

2) если квадратичная форма $p(\xi)$ отрицательно определена (т.е. $\forall \xi \neq 0$

0, $p(\xi) < 0$), то в точке \mathbf{x}_0 — макс.

3) если квадратичная форма не определена, т.е. $p(\xi)$ принимает значения разных знаков, то в точке \mathbf{x}_0 нет экстремума.

Замечание 2. Для выяснения, является ли квадратичная форма определенной или нет, можно воспользоваться теоремой Сильвестра:

а) если

$$\Delta_1 = a_{1,1} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} > 0,$$

то квадратичная форма $p(\xi)$ положительно определена;

б) если

$$\Delta_1 = a_{1,1} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} > 0, \dots, \\ \dots, \Delta_m (-1)^m > 0,$$

то квадратичная форма $p(\xi)$ отрицательно определена;

в) если $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} < 0$, то квадратичная форма $p(\xi)$ не определена.

Замечание 3. Если размерность $m = 2$, то, с учетом теоремы Сильвестра, получаем достаточное условие экстремума.

Пусть $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$,

$$B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

1) Если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0, y_0) — min.

2) Если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке (x_0, y_0) — макс.

3) Если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет.

4. Неявные функции. 1-я теорема о неявных функциях

Постановка задачи: $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$. Возможно ли уравнение $F(\mathbf{x}, y) = 0 \Leftrightarrow F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, y) = 0$ разрешить относительно y ?

Определение 4.1. Пусть $F(\mathbf{x}, y)$ определена в прямоугольнике $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [c, d]$. Если $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \exists! y = y(\mathbf{x}) \in [c, d]$ такое, что $F(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) = 0$, то говорят, что равенство $F(\mathbf{x}, y) = 0$ в прямоугольнике $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [c, d]$ определяет неявно функцию $y = y(\mathbf{x})$

Теорема 4.1 (1-я теорема о неявных функциях). Пусть $F(\mathbf{x}, y)$ определена в прямоугольнике

$$\Pi = [\mathbf{x}_0 - \Delta, \mathbf{x}_0 + \Delta] \times [y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$$

$$(\Delta = (\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(m)}), \Delta^{(j)} > 0)$$

и пусть выполнены условия

1) $F(\mathbf{x}, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π .

2) $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$.

3) $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \Delta, \mathbf{x}_0 + \Delta]$ функция $F(\mathbf{x}, y)$, как функция переменной y строго монотонна на $[y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$. Тогда $\forall \delta^{(m+1)} > 0$ такого, что $0 < \delta^{(m+1)} < \Delta^{(m+1)}$ существует $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m)}), \delta^{(j)} > 0, 0 < \delta^{(j)} < \Delta^{(j)}$ так, что

1) в прямоугольнике $\tilde{\Pi} = [\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x}_0 + \delta] \times [y_0 - \delta^{(m+1)}, y_0 + \delta^{(m+1)}]$ равенство $F(\mathbf{x}, y) = 0$ определяет неявно функцию $y = y(\mathbf{x})$;

2) $y(\mathbf{x}_0) = y_0$;

3) $y(\mathbf{x})$ непрерывна в $\tilde{\Pi}$.

Доказательство. Пусть для определенности $F(\mathbf{x}, y)$ строго возрастает по y . Выберем произвольные $\delta^{(m+1)}; 0 < \delta^{(m+1)} < \Delta^{(m+1)}$. Рассмотрим функцию $F(\mathbf{x}_0, y)$ на отрезке $[y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$. По условию

$$F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \Rightarrow F(\mathbf{x}_0, y_0 - \Delta^{(m+1)}) < 0 \wedge F(\mathbf{x}_0, y_0 + \Delta^{(m+1)}) > 0.$$

Следовательно, ввиду непрерывности функции $F(\mathbf{x}, y)$ в точке $(\mathbf{x}_0, y_0 - \Delta^{(m+1)})$ существует окрестность этой точки, в которой $F(\mathbf{x}, y)$ сохраняет знак, т.е. $F(\mathbf{x}, y) < 0$.

Аналогично, $\exists O(\mathbf{x}_0, y_0 + \Delta^{(m+1)})$, в которой $F(\mathbf{x}, y) > 0$. Поэтому $\exists \delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m)}) (\delta^{(j)} > 0)$ так, что $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x}_0 + \delta], F(\mathbf{x}, y_0 - \Delta^{(m+1)}) < 0, F(\mathbf{x}, y_0 + \Delta^{(m+1)}) > 0$. Но $F(\mathbf{x}, y)$ строго возрастает, тогда $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x}_0 + \delta], \exists! y = y(\mathbf{x})$ так, что $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Очевидно, что $y(\mathbf{x}_0) = y_0$. Условие $y(\mathbf{x}) \in [y_0 - \delta^{(m+1)}, y_0 + \delta^{(m+1)}]$ можно записать в виде $|y(\mathbf{x}) - y_0| < \delta^{(m+1)}$ при $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$. Это означает, что функция $y(\mathbf{x})$ непрерывна в точке \mathbf{x}_0 . Покажем, что $y(\mathbf{x})$ непрерывна в любой точке $\mathbf{x}_1 \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$. Выберем $\mathbf{x}_1 \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, положим $y_1 = y(\mathbf{x}_1)$. Применяя доказанную теорему в точке (\mathbf{x}_1, y_1) , получаем непрерывность функции $y(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_1 . \square

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(\mathbf{x})(x^{(j)} - x_0^{(j)}),$$

где $\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} + \alpha_j(x^{(j)})$ и ввиду непрерывности производных $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi_j(\mathbf{x}) = 0$. \square

Теорема 5.2 (2-я теорема о неявных функциях). Пусть $F(\mathbf{x}, y)$ определена в прямоугольнике

$$\Pi^{m+1} = [\mathbf{x}_0 - \Delta, \mathbf{x}_0 + \Delta] \times [y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$$

и выполнены условия

1) в прямоугольнике Π^{m+1} существуют все частные производные 1-го порядка, которые непрерывны;

2) $F(\mathbf{x}, y) = 0$;

3) частная производная $\frac{\partial F(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник

$$\tilde{\Pi}^{m+1} = [\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}] \times [y_0 - \tilde{\delta}^{(m+1)}, y_0 + \tilde{\delta}^{(m+1)}] \subset \Pi^{m+1}$$

такой, что

1) в прямоугольнике $\tilde{\Pi}^{m+1}$ равенство $F(\mathbf{x}, y) = 0$ определяет неявно функцию $y = y(\mathbf{x})$;

2) $y(\mathbf{x}_0) = y_0$;

3) функция $y(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные в $[\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}]$;

4) справедливо равенство

$$\frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)}} = - \frac{\frac{\partial F(\mathbf{x}, y)}{\partial x^{(1)}}}{\frac{\partial F(\mathbf{x}, y)}{\partial y}}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $\frac{\partial F(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y} > 0$. Тогда ввиду непрерывности этой производной $\exists O(\mathbf{x}_0, y_0)$, в которой $\frac{\partial F(\mathbf{x}, y)}{\partial y} > 0$. Тогда существует прямоугольник $[\mathbf{x}_0 - \tilde{\Delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\Delta}]$ такой, что $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \tilde{\Delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\Delta}]$ функция $F(\mathbf{x}, y)$ строго возрастает как функция переменной y . Значит, по первой теореме о неявных функциях $\exists \tilde{\Pi}^{m+1}$, в котором равенство $F(\mathbf{x}, y) = 0$ определяет неявно функцию $y = y(\mathbf{x})$, такую, что $y = y(\mathbf{x}_0) = y_0$. Покажем, что $y(\mathbf{x})$ имеет частные производные в прямоугольнике $[\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}]$. Рассмотрим разность

$$F(\mathbf{x} + \Delta x, y + \Delta y) - F(\mathbf{x}, y),$$

где $y + \Delta y = y(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$. Тогда $F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, y + \Delta y) = 0$, $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Следовательно, $y = y(x)$.

$$0 = F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, y + \Delta y) - F(\mathbf{x}, y) =$$

по лемме 4.1

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} \Delta x^{(j)} + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \sum_{j=1}^m \varphi_j(\mathbf{x}, y) \Delta x^{(j)} + \varphi_{m+1}(\mathbf{x}, y) \Delta y.$$

Положим в этом равенстве $\Delta x^{(1)} = \dots = \Delta x^{(j-1)} = \Delta x^{(j+1)} = \dots = \Delta x^{(m)} = 0$. Тогда

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} \Delta x^{(j)} + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \varphi_j \Delta x^{(j)} + \varphi_{m+1} \Delta y.$$

Отсюда

$$\Delta y \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_{m+1} \right) = -\Delta x^{(j)} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} + \varphi_j \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x^{(j)}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} + \varphi_j}{\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_{m+1}}$$

Перейдем к пределу при $\Delta x^{(j)} \rightarrow 0$, получим

$$\exists \frac{\partial y}{\partial x^{(j)}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (5.3)$$

Так как по условию частные производные в правой части (5.3) непрерывны, то $\frac{\partial y}{\partial x^{(j)}}$ непрерывны. \square

6. Матрицы Якоби. Якобиан

Определение 6.1. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор-функция, т.е. $\mathbf{F} = (F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(n)})$ и $F^{(j)}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – компоненты вектор-функции \mathbf{F} . Матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(m)}} \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(m)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(m)}} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби. Обозначение: $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ или $\frac{D(F^{(1)}, \dots, F^{(n)})}{D(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})}$. Таким образом, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ – это матрица размерности $n \times m$.

Если $n = m$, то матрица Якоби $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ – квадратная, ее определитель называется Якобианом вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, обозначается $\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}$. Таким образом,

$$\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

Теорема 6.1. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные в $\Pi^m = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}) : [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ вектор-функция от n переменных, т.е. $\mathbf{t} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для сложной функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ справедливо равенство

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \quad (6.1)$$

Отметим, что в (6.1) $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{t}}$ – матрица размерности $n \times n$, $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{x}}$ – размерности $n \times m$, $\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}$ – размерности $m \times n$.

Доказательство. 1) Элемент $a_{i,j}$ произведения матриц $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ и $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}}$ имеет вид

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial t^{(j)}} \quad (6.2)$$

2) По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial F^{(i)}}{\partial t^{(j)}} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial t^{(j)}} \quad (6.3)$$

Сравнивая (6.2) и (6.3), убеждаемся в справедливости равенства (6.1). \square

Следствие. Если $m = n$, то все матрицы в равенстве (6.1) – квадратные матрицы размерности $m \times m$. Поэтому при $m = n$

$$\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{D\mathbf{t}} = \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}} \cdot \frac{D\mathbf{x}}{D\mathbf{t}}$$

– очевидно. \square

7. Общая теорема о неявных функциях

Определение 7.1. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – вектор-функция, $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} : \Pi = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $\mathbf{F} = (F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(n)})$.

Преобразуем определитель $\frac{DF(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^{(n)})}{D(\mathbf{y}, y^{(n)})}$ следующим образом:

1) к 1-у столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}$

2) ко 2-у столбцу прибавим n -й столбец, умноженный на $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(2)}}$

.....
 $n-1$) к $n-1$ -у столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}$

Получим определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(1)}} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \cdots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}, & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(1)}} + \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \cdots & \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}, & \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} \\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(1)}} + \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \cdots & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}, & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \end{vmatrix}$$

Положим в этом определителе $y^{(n)} = y^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{y} = \mathbf{y}_0$. Так как $F^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \equiv 0$, то в последней строке все элементы, кроме последнего, равны нулю. Разложим этот определитель по элементам последней строки, получаем

$$0 \neq \frac{DF(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, y_0^{(n)})}{D(\mathbf{y}, y^{(n)})} = \frac{\partial F^{(n)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{D\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{D\mathbf{y}} \Rightarrow \frac{D\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{D\mathbf{y}} \neq 0$$

и в силу непрерывности этот определитель не равен нулю в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Таким образом, по предположению индукции существует прямоугольник $\Pi^{m+n-1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \subset [\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}_m, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}_m] \times [\mathbf{y}_0 - \tilde{\delta}_{n-1}, \mathbf{y}_0 + \tilde{\delta}_{n-1}]$ такой, что равенство $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ определяет неявно функцию $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, т.е. $\forall \mathbf{x} \in \Pi^m(\mathbf{x}_0) = [\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}_m, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}_m]$ $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$, функции $y^{(i)}(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, n-1$) имеют в $\Pi^m(\mathbf{x}_0)$ непрерывные частные производные по переменным $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$. Но из условия $\Phi^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$ следует $F^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), y^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))) = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$) и такое же равенство справедливо при $i = n$. Таким образом, вектор-функция $(\mathbf{y}(\mathbf{x}), y^{(n)}(\mathbf{x}))$ определяется неявно равенством $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, y^{(n)}) = 0$.

Очевидно также, что $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, y^{(n)}(\mathbf{x}_0) = y_0^{(n)}$.

Осталось проверить равенство для производных. Для этого продифференцируем тождества $F^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, n$) по переменным $x^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m$). По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(j)}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F^{(i)}}{\partial y^{(k)}} \cdot \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x^{(j)}} = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}).$$

В матричной форме эти равенства можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{n \times m} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_{n \times n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{n \times m} = 0 \quad (7.4)$$

Так как $\left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right| \neq 0$, то существует обратная матрица $\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1}$. Умножая на нее слева обе части равенства (7.4), получаем

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad \square$$

8. Условный экстремум, необходимое условие.

Стационарные точки. Критерий стационарной точки

Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)})$ определена в $O(\mathbf{x}_0)$. Для краткости обозначим: $\mathbf{x}^{(n)} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, $\mathbf{x}^{(m-n)} = (x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)})$. Тогда $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$.

Пусть кроме этого функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ ($j = \overline{1, n}$) определены тоже в $O(\mathbf{x}_0)$. Через $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$ обозначим вектор-функцию $(\varphi^{(j)}(\mathbf{x}))_{j=1}^n$. Пусть $E = \{\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0) : \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) = 0 \forall j = \overline{1, n}\}$.

Определение 8.1. Будем говорить, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_0 $\min(\max)$ при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ если $\exists O_\delta(\mathbf{x}_0)$ такая, что $\forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap E$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$). Точку \mathbf{x}_0 называют точкой условного экстремума, а задачу нахождения точки условного экстремума – задачей на условный экстремум. Коротко записывают:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min(\max) \\ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Пусть \mathbf{x}_0 – точка условного экстремума при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$. Будем предполагать, что $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные в $O(\mathbf{x}_0)$, $\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0) = 0$, и $\frac{D\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$. В этом случае по теореме о неявных функциях система уравнений $\bar{\varphi}(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)}) = 0$ определяет в некоторой $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ неявно вектор-функцию $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}) = \mathbf{x}^{(n)}(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, \dots, x^{(m)})$, т.е.

$\bar{\varphi}(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}) \equiv 0$ и $\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \mathbf{x}_0^{(n)}$. Подставляя $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)})$ в $f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$, получим функцию

$$\Phi(\mathbf{x}^{(m-n)}) = f(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}).$$

Из определения условного экстремума следует, что \mathbf{x}_0 является точкой условного экстремума $f(\mathbf{x})$ при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}_0^{(m-n)}$ является точкой абсолютного локального экстремума для функции $\Phi(\mathbf{x}^{(m-n)})$. По необходимому условию экстремума $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$, т.е.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(j)}} = 0 \quad \forall j = \overline{n+1, \dots, m}. \quad (8.1)$$

Условия (8.1) есть необходимые условия экстремума.

Определение 8.2. Точка $\mathbf{x}_0 \in E$, в которой $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$, называется стационарной точкой функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Замечание. Для нахождения точки $\mathbf{x}_0^{(m-n)}$, в которой $\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(j)}} = 0$, надо решать систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(n+1)}} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(m)}} = 0 \end{cases}$$

или иначе

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(n+1)}} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(n+1)}} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(m)}} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(m)}} = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

В этой системе $(m - n)$ уравнений и $(m - n)$ неизвестных $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$. Производные $\frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}}$ могут быть найдены по теореме о неявной функции из соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{(n)}}{\partial \mathbf{x}^{(m-n)}} = - \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^{(m-n)}} \right).$$

Подставляя эти значения частных производных $\frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}}$ в (8.2) и решая систему (8.2) относительно $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$, найдем стационарную точку \mathbf{x}_0 .

Однако, подобный метод нахождения стационарной точки далеко не всегда удобен, т.к. он требует явного знания функции $\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-1)})$. Поэтому нам нужен критерий стационарной точки.

Лемма 8.1. Пусть \mathbf{x}_0 такая точка, в которой $\frac{D\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$ и $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)})$ та функция, которая определена неявно равенством $\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$. Тогда $(\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0 \forall j = \overline{1, n}$ тогда и только тогда, когда для всех $j = \overline{1, n}$

$$dx^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)}.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\forall j = \overline{1, n} (\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$. Запишем это равенство в координатах:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot dx^{(k)} + \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot dx^{(k)} = 0. \quad (8.3)$$

Подставляя $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-m)})$ в функции $\varphi^{(j)}(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$, получаем равенство $\varphi^{(j)}(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}) \equiv 0$ из которого при каждом $j = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x^{(i)}} + \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} = 0.$$

Умножим эти равенства на $dx^{(i)}$ и сложим почленно

$$\sum_{i=n+1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} + \sum_{i=n+1}^m \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} = 0.$$

Изменим порядок суммирования

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \left(\sum_{i=n+1}^m \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} \right) + \sum_{i=n+1}^m \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} = 0 \quad (8.4)$$

Вычитая из (8.4) – (8.3), получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \left(dx^{(k)} - \sum_{i=n+1}^m \frac{\partial x^{(k)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} \right) = 0.$$

Это система относительно разностей $dx^{(k)} - \sum_{i=n+1}^m \frac{\partial x^{(k)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)}$. Определитель этой системы $\frac{D\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение, это решение нулевое, отсюда

$$dx^{(k)} = \sum_{i=n+1}^m \frac{\partial x^{(k)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)}. \quad (8.5)$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено равенство (8.5). Подставляя в (8.4), получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} + \sum_{i=n+1}^m \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)} = 0.$$

Откуда $d\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0) = (\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$. \square

Теорема 8.2. Точка $\mathbf{x}_0 \in E$ будет стационарной точкой функции $f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$ при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда из условий $(\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$ следует

$$df(\mathbf{x}_0) = (\text{grad } f(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mathbf{x}_0 \in E$ стационарная точка. Тогда $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$. Значит $\sum_{k=n+1}^m \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = 0$. Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}} \right) dx^{(k)} + \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = 0.$$

Меняем порядок суммирования

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \left(\sum_{k=n+1}^m \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} \right) + \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = 0 \quad (8.6)$$

Пусть $(\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$, тогда по лемме

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = dx^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}).$$

Подставляя в (8.6), получим

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} dx^{(j)} + \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = 0.$$

Отсюда $df(\mathbf{x}_0) = (\text{grad } f(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть из равенств $(\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$ следует $df(\mathbf{x}_0) = 0$. Надо доказать, что $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$. Имеем для $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})$:

$$\begin{aligned} d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) &= \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = \\ &= \sum_{k=n+1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \right) dx^{(k)}. \end{aligned}$$

Меняем порядок суммирования

$$d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} + \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)}. \quad (8.7)$$

На множестве E переменные $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ связаны соотношениями $x^{(j)} = x^{(j)}(x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)})$ $j = \overline{1, n}$. Поэтому, если $\mathbf{x}_0 \in E$, то

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = dx^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}). \quad (8.8)$$

Тогда по лемме 8.1 $(\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$. Подставляя (8.8) в (8.7), получаем

$$d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} dx^{(j)} + \sum_{k=n+1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} = (\text{grad } f(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}).$$

Но по условию из $(\text{grad } \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$ следует $(\text{grad } f(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$. Значит $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$. \square

9. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Необходимое условие

Снова рассматриваем задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)}) \rightarrow \min(\max) \\ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) = (\varphi^{(j)}(\mathbf{x}))_{j=1}^n = 0. \end{cases}$$

Предполагаем, что $\frac{D\bar{\varphi}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$ в некоторой $O(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 9.1. Функцию

$$F(\mathbf{x}, \bar{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$$

называют функцией Лагранжа, числа $\lambda^{(j)}$ – множителями Лагранжа.

Задача нахождения стационарных точек функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ сводится к нахождению стационарных точек функции Лагранжа.

Теорема 9.1. Точка \mathbf{x}_0 является стационарной точкой функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \bar{\lambda}_0 = (\lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(n)}), \text{ что } dF(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_0) = 0,$$

где $dF(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_0)$ вычисляется по переменным $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ при фиксированном $\bar{\lambda}_0$.

Для доказательства потребуется лемма.

Лемма 9.2. Пусть даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^m$). Вектор \mathbf{a} есть линейная комбинация векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ тогда и только тогда, когда из условия, что вектор \mathbf{c} ортогонален всем векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ следует, что вектор \mathbf{c} ортогонален \mathbf{a} .

Доказательство. Необходимость очевидна. В самом деле, пусть $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{b}_j$. Если \mathbf{c} ортогонален всем \mathbf{b}_j , то $(\mathbf{c}, \mathbf{b}_j) = 0 \forall j = 1, 2, \dots, n$, значит,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\mathbf{a}, \mathbf{b}_j) = \sum_{j=1}^n 0 = 0.$$

Достаточность. Можно считать, что векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ — линейно независимы. Тогда из курса линейной алгебры известно, что существуют векторы $\mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}, \dots, \mathbf{b}_m$, ортогональные между собой, и ортогональные векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$. Но тогда векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ — линейно независимы, следовательно, образуют базис в \mathbb{R}^m , значит,

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \text{ что } \mathbf{a} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{b}_j + \sum_{j=n+1}^m \lambda_j \mathbf{b}_j. \quad (9.1)$$

Покажем, что все λ_j при $j > n + 1$ равны нулю. По выбору $\mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}, \dots, \mathbf{b}_m$: $(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) = 0$ при $j \leq n, k > n$. Умножим обе части равенства (9.1) на \mathbf{b}_k ($k > n$). Получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) + \sum_{j=n+1}^m \lambda_j (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) = 0 + \lambda_k \|\mathbf{b}_k\|_2^2.$$

Но по предположению необходимости \mathbf{b}_k ортогональны вектору \mathbf{a} , следовательно, $\lambda_k = 0$ ($k > n$). Подставляя эти значения в (9.1), получим

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{b}_j. \quad \square$$

Доказательство теоремы 9.1. Точка \mathbf{x}_0 является стационарной точкой $f(\mathbf{x})$ при условии $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда из того, что $\forall j = 1, \dots, n$ $(\text{grad} \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow (\text{grad} f(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$. Рассмотрим векторы $\text{grad} f(\mathbf{x}_0), \text{grad} \varphi^{(1)}(\mathbf{x}_0), \dots, \text{grad} \varphi^{(n)}(\mathbf{x}_0)$. По лемме 9.2 из ортогональности вектора $d\mathbf{x}$ ко всем векторам $\text{grad} \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)$ следует ортогональность к вектору $\text{grad} f(\mathbf{x}_0)$ тогда и только тогда, когда вектор $\text{grad} f(\mathbf{x}_0)$ есть линейная комбинация векторов $(\text{grad} \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0))_{j=1}^n$, т.е.

$$\exists \lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \dots, \lambda_0^{(n)}, \text{ что } \text{grad} f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_0^{(j)} \text{grad} \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0). \quad (9.2)$$

Запишем (9.2) в координатной форме:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} = \sum_{j=1}^n \lambda_0^{(j)} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (9.3)$$

(9.3) равносильно системе

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \lambda_0^{(j)} \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) \right) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0,$$

т.е.

$$\forall i = \overline{1, m} \quad \left. \frac{\partial F(\mathbf{x}, \bar{\lambda}_0)}{\partial x^{(i)}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0 \Leftrightarrow dF(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_0) = 0. \quad \square$$

10. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Достаточное условие

Теорема 10.1. Пусть \mathbf{x}_0 является стационарной точкой функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ и пусть $\bar{\lambda}_0$ тот вектор, для которого $dF(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_0) = 0$. Тогда

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = d^2 F(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_0),$$

где $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ вычислен в предположении связей $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, $d^2 F(\mathbf{x}_0, \bar{\lambda}_0)$ вычислен формально по переменным $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ при фиксированном $\bar{\lambda}_0$.

Доказательство. Так как $\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$ в $O(\mathbf{x}_0)$, то $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)})$, т.е. переменные $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ есть функции переменных $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$. Но и переменные $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$ есть функции от $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$, следовательно, можно сразу считать, что все $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$ есть функции переменных $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$.

Так как $\mathbf{x}^{(n)}$ неявно задана равенствами, то $\varphi(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}) = 0$. Поэтому при $\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0)$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \lambda_0^{(j)} \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \lambda_0),$$

где \mathbf{x} удовлетворяет условиям связи $\varphi(\mathbf{x}) = 0$. Но тогда

$$d f(\mathbf{x}) = d F(\mathbf{x}, \lambda_0)$$

в предположении, что \mathbf{x} связаны соотношениями $\varphi(\mathbf{x}) = 0$. Но тогда и

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x}) &= d(d F(\mathbf{x}, \lambda_0)) = d \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot d x^{(j)} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m d \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot d x^{(j)} \right) = \sum_{j=1}^m d \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(j)}} \right) d x^{(j)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(j)}} d^2(x^{(j)}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} dx^{(i)} dx^{(j)} + \\
& \sum_{j=1}^m \frac{\partial F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(j)}} d^2(x^{(j)}).
\end{aligned}$$

Так как \mathbf{x}_0 – стационарная точка, то полагая $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, получаем $d^2 f(\mathbf{x}_0) = d^2 F(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$. \square

Замечание. Из доказанных теорем 9.1 и 10.1 вытекает следующий алгоритм решения задачи на условный экстремум.

1) Составляем функцию Лагранжа $F(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$.

2) Составляем систему $\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \lambda_0)}{\partial x^{(i)}} = 0 & (i = 1, \dots, m) \\ \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) = 0 & (j = 1, \dots, n). \end{cases}$ Это система относи-

тельно неизвестных $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}$, в которой $m + n$ уравнений и $m + n$ неизвестных.

3) Пусть $x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m)}, \lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(n)}$ – решение этой системы. По теореме 9.1 $x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m)}$ – стационарная точка функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\varphi(\mathbf{x})$.

4) При найденном $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(n)})$ записываем в точке \mathbf{x}_0 $d^2 F(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$.

Если $d^2 F(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ есть положительно определенная квадратичная форма, то в точке \mathbf{x}_0 – min.

Если $d^2 F(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ есть отрицательно определенная квадратичная форма, то в точке \mathbf{x}_0 – max.

Если $d^2 F(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ неопределена, то экстремума нет.

Оглавление

1	Функции многих переменных. Предел и непрерывность	3
1	Метрические пространства. Множества в метрических пространствах	3
2	Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров	6
3	Линейное нормированное пространство. Связь нормы с расстоянием	7
4	Линейное пространство со скалярным произведением. Неравенство Коши–Буняковского	8
5	Пространство \mathbb{R}^m как линейное нормированное пространство. Эквивалентные нормы в \mathbb{R}^m	9
6	Другие нормы в \mathbb{R}^m	10
7	Предел последовательности точек в \mathbb{R}^m	12
8	Полнота пространства \mathbb{R}^m	13
9	Компактные множества в \mathbb{R}^m . Замкнутый куб – компактное множество	14
10	Структура компактного множества в \mathbb{R}^m	15
11	Структура открытого множества в \mathbb{R}^m	16
12	Функции m переменных. Различные определения предела в точке	17
13	Свойства предела функции в точке	19
14	Предел по направлению	20
15	Повторные пределы	20
16	Непрерывность функции в точке	21
17	Свойства непрерывных функций	22
18	Свойства функций непрерывных на компактных множествах	22
19	Отображение из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n , непрерывные отображения	24

2	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	26
1	Частные производные. Дифференцируемость функции в точке	26
2	Дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные	27
3	Производная сложной функции	29
4	Производная по направлению. Вектор-градиент	30
5	Дифференциал функции. Касательная плоскости, уравнение касательной плоскости	32
6	Производные высших порядков. Независимость от порядка дифференцирования	34
7	Дифференциалы высших порядков	36
8	Формула Тейлора для функций m переменных	38
3	Приложения дифференциального исчисления	41
1	Экстремум функции в точке. Необходимое условие	41
2	Формула Тейлора с остатком в форме Пеано	42
3	Достаточные условия экстремума в точке	43
4	Неявные функции. 1-я теорема о неявных функциях	45
5	Неявные функции. 2-я теорема о неявных функциях	47
6	Матрицы Якоби. Якобиан	49
7	Общая теорема о неявных функциях	50
8	Условный экстремум, необходимое условие. Стационарные точки. Критерий стационарной точки	54
9	Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Необходимое условие	58
10	Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Достаточное условие	60