С.Ф.ЛУКОМСКИЙ

ГАРМОНИЧЕСКИЙ И ВЕЙВЛЕТ АНАЛИЗ

НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

2013

УДК 517
ББК 22.19;
Л84 **Лукомский С.Ф.** Гармонический и вейвлет анализ на нульмерных группах. Саратов, 2013, 51с.

Излагаются основы гармонического и вейвлет анализа на нульмерных группах. Рассматриваются ряды по системам характеров и по системам Хаара. Изучается преобразование Фурье на локально компактной группе. Предназначено студентам, обучающимся в магистратуре и аспирантам.

Рецензент: профессор Терехин П.А.

Учебное издание
Лукомский Сергей Федорович
Гармонический и вейвлет анализ
на компактных нульмерных группах.

УДК 517

Введение

Настоящее издание представляет собой курс лекций по гармоническому и вейвлет анализу на компактных нульмерных группах группах. Последние 10-15 лет интенсивно развивается анализ как на полях p-адических чисел так и на группах Виленкина. Это связано с одной стороны с использованием псевдодифференциальных операторов в физике микромира, а с другой стороны с желанием использовать ступенчатые функции при обработке информации. На первый взгляд кажется неожиданным, но дискретное преобразование Фурье есть не что иное как дискретное p-ичное преобразование Хаара на группах Виленкина. Вместе с тем практически не изучены ряды по обобщениям системы Хаара на группы Виленкина или на группы целых p-адических чисел. Группы Виленкина и поля p-адических чисел являются нульмерными группами. Более того, произведение групп Виленкина и произведение полей p-адических чисел также являются нульмерными группами. Поэтому естественно изучать не отдельно анализ на группах Виленкина и на полях p-адических чисел и на их произведениях, а изучать как гармонический так и вейвлет анализ на произвольных нульмерных группах.

Настоящий курс является введением в эту теорию и посвящен анализу только на компактных группах. В первой главе рассматриваются компактные нульмерные группы и их структура. Вторая глава посвящена анализу на нульмерных группах. Определяются функции Радемахера, получено представление характеров через функции Радемахера, доказывается ортогональность системы характеров и ее замкнутость в пространствах Лебега. С помощью функций Радемахера определяются функции Хаара на произвольной нульмерной компактной группе. Доказывается их ортогональность и полнота в пространствах Лебега. Функци Хаара сейчас переживают второе рождение, что в значительной степени связано с наличием быстрого дискретного преобразования Фурье-Хаара и появлением вычислительной техники с параллельными процессорами.

Глава 1

Топологические группы

1 Группы, основные понятия

Определение 1.1 *Множество G, в котором определена бинарная операция "$\cdot$", называется группой, если выполнены следующие условия*
1) операция ассоциативна, т.е. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
2) существует элемент $e \in G$ такой, что $\forall\, x \in G \quad x \cdot e = e \cdot x = x$. Элемент e называют единичным или единицей.
3) $\forall\, x \in G,\ \exists\, y \in G,\ x \cdot y = y \cdot x = e$. Элемент y называют обратным к x и обозначают x^{-1}.

Замечание. Группу, в которой операция обозначается точкой, называют мультипликативной. Точку как знак умножения обычно опускают и вместо $a \cdot b$ пишут ab. В качестве символа групповой операции можно использовать знак "$+$". В этом случае группу называют аддитивной. Элемент e называют в этом случае нулевым, а противоположный к x элемент – обратным и обозначают $-x$. Вместо знака $+$ мы будем также использовать обозначения $\oplus$ и $\dot{+}$.

Определение 1.2 *Группа $(G, \cdot)$ называется коммутативной, если $\forall\, x, y \in G,\ x \cdot y = y \cdot x$.*

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только коммутативные группы.
Примеры. 1) Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычной операцией сложения $+$ есть коммутативная группа.
2) Множество $G = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ в котором операция $\oplus$ определена равенством $x \oplus y = (x + y) \bmod \mathrm{p}$ есть коммутативная группа.
3) Пусть $P = (p_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность простых чисел, G_P состоит из бесконечных последовательностей $t = (t_k)_{k=0}^{\infty}$, где $t_k = \overline{0, p_k - 1}$. Определя-

ем операцию $\oplus$ равенством

$$t \oplus \tau \stackrel{df}{=} (t_k \oplus \tau_k)_{k=0}^{\infty}, \quad t_k \oplus \tau_k = (t_k + \tau_k) \,\mathrm{mod}\, \mathrm{p_k}.$$

Тогда G_P – коммутативная группа. G_P называется группой Виленкина. Последовательность $P = (p_n)$ называют образующей. Если все $p_n = 2$, то группу Виленкина называют двоичной группой Кантора.
4) Группа целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p = \{(x_k)_{k=0}^{\infty} : \ x_k = \overline{0, p-1}\}$ состоит из бесконечных последовательностей $(x_k)_{k=0}^{\infty}$. Если $x = (x_k), y = (y_k)$, то сумма $x \dot{+} y \dot{=} z = (z_k)$ определяется алгоритмом

$$\begin{array}{l} \alpha_1 := 0; \\ \text{for k} := 0 \text{ to } \infty \text{ do} \\ \quad \text{if } \mathrm{x_k} + \mathrm{y_k} + \alpha_{\mathrm{k}-1} = \alpha_{\mathrm{k}}\mathrm{p} + \beta_{\mathrm{k}} \text{ then } \mathrm{z_k} := \beta_{\mathrm{k}}; \end{array}.$$

Т.о. операция $\dot{+}$ в $\mathbb{Z}_p$ определяется как покоординатное сложение с переносом 1 в следующий разряд. Роль нулевого элемента играет последовательность $0 = (0, 0, \ldots)$. Обратный элемент также находится с помощью рекуррентного алгоритма. Укажем алгоритм нахождения обратного элемента к $t = (t_k)_{k=0}^{\infty}$ в группе $\mathbb{Z}_2$. Обозначим обратный элемент к t через $\tau = (\tau_k)_{k=0}^{\infty}$. Так как τ – обратный к t, то $t \dot{+} \tau = 0 = (0, 0, \ldots)$. Поэтому алгоритм нахождения обратного элемента имеет вид

$$\begin{array}{l} \tau_0 := t_0. \\ \quad \text{for n} := 1 \text{ to } \infty \text{ do} \\ \qquad \text{if } \tau_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{t}_{\mathrm{n}-1} < 2 \text{ then } \tau_{\mathrm{n}} := \mathrm{t_n} \\ \qquad \text{else } \tau_{\mathrm{n}} := \mathrm{t_n} \oplus 1. \end{array}.$$

Знаком $+$ в этом алгоритме обозначена обычная операция сложения в $\mathbb{R}$, знаком $\oplus$ – операция сложения по модулю 2.
5) Множество $\mathbb{C}_n$ комплексных чисел z, для которых $z^n = 1$ с обычной операцией умножения, образует группу. Элементами этой группы являются числа $e^{\frac{2\pi i}{n}k}, k = \overline{0, n-1}$.

2 Подгруппы, смежные классы, фактор группы

Определение 2.1 *Пусть $(G, \cdot)$ – коммутативная группа. Множество $H \subset G$, которое является группой относительно той же операции $\cdot$, называется подгруппой.*

Примеры. 1) Множество $2\mathbb{Z}$ четных целых чисел является подгруппой группы $\mathbb{Z}$.

2) Если $G = \{t\}$ группа Кантора, то множества

$$G_n = \{t = (0, 0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1}, \ldots)\}$$

образуют подгруппы группы G.
3) Если G_P – группа Виленкина, то множества

$$G_{P,n} = \{t = (0, 0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1}, \ldots) : \ t_k = \overline{0, p_k - 1}\}$$

будут ее подгруппами.
4) Пусть $\mathbb{C}_n$ – группа корней из 1, $n = p \cdot q$ – составное число. Тогда группы $\mathbb{C}_p$ и $\mathbb{C}_q$ будут подгруппами. В самом деле, $\mathbb{C}_p$ состоит из чисел

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{p} k}\right)_{k=0}^{p-1},$$

которые можно записать в виде $e^{\frac{2\pi i}{n} qk}$. Ясно, что числа $e^{\frac{2\pi i}{n} qk} \in \mathbb{C}_n$.

Определение 2.2 *Пусть $(G, \cdot)$ коммутативная группа, H – ее подгруппа. Символом Ha (или $H \cdot a$) будем обозначать множество $\{y \in G : y = ax, \ x \in H\}$. Каждое множество Ha называют смежным классом группы G по подгруппе H.*

Теорема 2.1 *1) Если $a \in H$, то $Ha = H$,*
2) если $a \notin H$, то $Ha \bigcap H = \emptyset$,
3) два смежных класса aH и bH либо совпадают, либо не пересекаются.

Доказательство. 1) Очевидно, что $Ha \subset H$. Покажем обратное включение $H \subset Ha$. Пусть $x \in H$. Тогда существует единственный элемент $y \in H$ такой, что $x = ya \in Ha$.
2) Пусть $a \notin H$. Предположим, что $Ha \bigcap H \neq \emptyset$ т.е. $\exists y \in G$, такой, что $y \in H \bigcap Ha$. Это означает, что существует $x \in H$ так, что $y = xa, \ x \in H$. Но тогда $a \in H$, что невозможно.
3) Пусть Ha и Hb – смежные классы. Если $Ha \bigcap Hb = \emptyset$, то все доказано. Пусть $Ha \bigcap Hb \neq \emptyset$, т.е. $\exists y \in Ha$ и $y \in Hb$. Тогда $y = ay_1, \ y = by_2$, где $y_1 \in H, y_2 \in H$, т.е. $a = by_2 y_1^{-1}$, причем $y_2 \cdot y_1^{-1} \in H$. Отсюда находим $Ha = b \cdot (y_2 \cdot y_1^{-1}) \cdot H = Hb$. □

Очевидным следствием является

Теорема 2.2 *Если $(G, \cdot)$ группа, H – ее подгруппа, то группа G представима в виде дизъюнктного объединения смежных классов.*

Для подмножеств группы G можно ввести операцию умножения.

Определение 2.3 *Если $A, B \subset G$, то $AB \stackrel{df}{=} \{y = ab: \ a \in A \wedge b \in B\}$.*

Лемма 2.3 *Если $H \subset G$ – подгруппа, $a, b \in G$, то $(Ha)(Hb) = Hab$.*

Доказательство. По определению смежных классов

$$Ha = \{xa : x \in H\}, \ Hb = \{yb : y \in H\}.$$

Поэтому

$$HaHb = \{(xa)(yb) : x, y \in H\} = \{xyab : x, y \in H\}.$$

Так как $\{xy : x, y \in H\} = H$, то $\{xyab : x, y \in H\} = \{zab : z \in H\} = Hab$ и лемма доказана. □

Теорема 2.4 *Множество смежных классов Hx образует коммутативную группу.*

Доказательство. 1)По лемме произведение смежных классов есть смежный класс, т.е. множество смежных классов замкнуто относительно умножения классов.
2) Операция умножения классов Hx ассоциативна, в самом деле

$$(Hx)(HyHz) = Hxyz,$$

$$(HxHy)Hz = Hxyz.$$

3) Операция умножения классов Hx коммутативна.
4) Подгруппа H есть единичный элемент в множестве $\{Hx\}$ т.к.

$$(Hx)H = H \cdot Hx = Hx.$$

5) Для любого класса Hx класс Hx^{-1} является обратным, т.к. $(HxHx^{-1}) = Hxx^{-1} = H$. □

Определение 2.4 *Совокупность смежных классов называется факторгруппой и обозначается G/H.*

Примеры. 1) G – группа Кантора, $G_n = \{(0, 0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1}, \ldots)\}$ – подгруппа. Смежные классы по этой подгруппе: $G_n \oplus x$, где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots)$. Таких классов 2^n.
2) G_P – группа Виленкина с образующей последовательностью $P = (p_0, p_1, \ldots)$, $G_{P,n} = \{(0, 0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1}, \ldots) : \ t_k = \overline{0, p_k - 1}\}$ ее подгруппа. Смежные классы: $G_{P,n} \oplus x$, где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots)$. Всего таких классов будет $p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$.

3) $\mathbb{C}_n$ при $n = p \cdot q$ (p, q – простые), $\mathbb{C}_p$ – подгруппа. Смежные классы это множества

$$\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p \cdot e^{\frac{2\pi i}{pq}}, \mathbb{C}_p \cdot e^{\frac{2\pi i}{pq} \cdot 2}, \ldots, \mathbb{C}_p \cdot e^{\frac{2\pi i}{pq}(q-1)}.$$

4) $\mathbb{Z}_p$ – группа целых p-адических чисел, $H_n = \{(0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1} \ldots) : t_n = t_k = \overline{0, p-1}\}$ – подгруппа. Смежные классы те же: $H_n \dot{+} x$, где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots)$

3 Конечные группы

Определение 3.1 *Группа $(G, \cdot)$ называется конечной, если она содержит конечное число элементов. Число элементов называется порядком группы.*

Определение 3.2 *Группа $(G, \cdot)$ называется циклической, если $\exists\, a \in G$, что все элементы $x \in G$ есть степени $a, a^2, a^3, \ldots, a^{-1}, a^{-2}, \ldots$ одного и того же элемента.*

Предложение 3.1 *Всякая конечная группа содержит циклическую подгруппу.*

Доказательство. Пусть $a \in G$ – произвольный элемент.
1) Если $a = e$, то $\{e\}$ – подгруппа и при этом циклическая.
2) Пусть $a \neq e$. Рассмотрим элементы

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

Так как G – конечная группа, то $\exists\, n_1, n_2 :\ n_2 > n_1$ такие, что $a^{n_2} = a^{n_1}$. Пусть $n_2 = n_1 + p$, тогда

$$a^{n_1} a^p = a^{n_1} \Rightarrow a^p = e.$$

Следовательно, $(1, a, a^2, \ldots, a^{p-1})$ – циклическая группа лежащая внутри G. $\square$
Следствие. Любой элемент конечной коммутативной группы G порождает циклическую подгруппу.

Предложение 3.2 *Если группа G имеет простой порядок n, то она циклическая и любой ее элемент отличный от единичного – образующий.*

Доказательство. Пусть $a \neq e$. Тогда $a^p = e$ при некотором p. Так как $H = \{1, a, \ldots, a^{p-1}\}$ – группа, то смежные классы Ha дизъюнктны и $\bigsqcup Ha = G$. Пусть количество смежных классов равна q. Тогда $n = pq$ и т.к. n – простое, то $q = 1$, следовательно, $G = H$. $\square$

Предложение 3.3 *Если G – конечная группа порядка n, то для любого элемента $a \in G$*

$$a^n = e.$$

Доказательство. *1) если $a = e$, то это очевидно;*
2) если $a \neq e$, то $\exists\, p,\ a^p = e$ и $n = p \cdot q$, значит $a^n = a^{pq} = (a^p)^q = e^q = e.$ □

4 Топологические пространства

Определение 4.1 *Пусть $\Omega \neq \emptyset$ – основное множество. Совокупность $\mathcal{N}$ его подмножеств называется топологией, если*
1) $\emptyset \in \mathcal{N}, \Omega \in \mathcal{N}$,
2) если $A, B \in \mathcal{N}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{N}$,
3) если $A_\alpha \in \mathcal{N}$ то $\bigcup A_\alpha \in \mathcal{N}$.
Множества $U \in \mathcal{N}$ называются открытыми. Открытое множество U содержащее точку x называют окрестностью точки x и обозначают $U(x)$.

Определение 4.2 *Совокупность $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ называется базой топологии $\mathcal{N}$, если*

$$\forall U \in \mathcal{N}\ \ \forall x \in U\ \ \exists B \in \mathcal{B},\ \ x \in B \subset U.$$

.

Предложение 4.1 *Если $\mathcal{B}$ – база топологии, то любое открытое множество есть объединение множеств $B \in \mathcal{B}$.*

Предложение 4.2 *Совокупность $\mathcal{B}$ будет базисом некоторой топологии тогда и только тогда, когда*
1) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} = \Omega$.
2) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ \forall\ x \in B_1 \bigcap B_2\ \exists\, B \ni x,\ B \subset B_1 \bigcap B_2$.

Примеры. 1) G – группа Кантора с операцией $\oplus$. Базу топологии образуют множества $U_n(x) = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \ldots) :\ \ t_n = 0$ или $1\}$. Эти множества получаются из множеств $U_n(0) = \{(0, 0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1}, \ldots)\}$ сдвигом на элементы $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots)$.
2) G_P – группа Виленкина с образующей последовательностью $P = (p_k)_{k=0}^{\infty}$ и операцией $\oplus$. Множества $U_n = \{(0, 0, \ldots, 0, t_n, t_{n+1}, \ldots) :\ t_j = \overline{0, p_j - 1}\}$ образуют базу окрестности нуля, а множества $U_n(x) = U_n \oplus x$, образуют базу топологии. Для этого достаточно проверить, что множества $U_m \oplus y$

и $U_n \oplus x$ либо не пересекаются, либо одно включается в другое. Пусть $U_n \oplus x \bigcap U_m \oplus y \neq \emptyset$ и $m \geq n$. Тогда $x_0 = y_0, x_1 = y_1, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}$ и значит

$$U_n \oplus x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \ldots),$$
$$U_m \oplus y = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{m-1}, \tau_m, \ldots),$$

Это означает, что

$$U_n \oplus x \supset U_m \oplus y.$$

Поэтому

$$U_n \oplus x \bigcap U_m \oplus y = U_m \oplus y$$

и в пересечении содержится именно множество $U_m \oplus y$.
3) Группа $\mathbb{Z}_p$. Топология в $\mathbb{Z}_p$ задается как на G_p множествами

$$U_n(x) = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, t_n, t_{n-1}, \ldots)\} = U_n \oplus x.$$

5 Топологические группы

Определение 5.1 *Пусть* $(G, \dot{+})$ *– коммутативная группа и пусть* $\mathcal{N}$ *– топология в* G. *Группу* G *с топологией* $\mathcal{N}$ *называют топологической группой, если операция* $\dot{+}$ *непрерывна в топологии* $\mathcal{N}$, *т.е.*

$$\forall\, x, y \in G,\ \forall\, O(x \dot{+} y)\ \exists\, O(x)\ \exists\, O(y),\ O(x) \dot{+} O(y) \subset O(x \dot{+} y).$$

Примеры. 1) G_P – группа Виленкина с образующей последовательностью $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ и операцией $\oplus$ покоординатного сложения по $\mathrm{mod\,p_k}$. Проверим, что операция $\oplus$ непрерывна. Выбираем $x, y \in G_P$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots)$, $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n, \ldots)$. Тогда

$$x \oplus y = (x_0 \oplus y_0, x_1 \oplus y_1, \ldots, x_{n-1} \oplus y_{n-1}, \ldots).$$

Выберем произвольную окрестность $U_n(x \oplus y)$ из базы окрестностей. Она имеет вид

$$U_n(x \oplus y) = (x_0 \oplus y_0, x_1 \oplus y_1, \ldots, x_{n-1} \oplus y_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \ldots).$$

Выберем

$$U_n(x) = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)\},$$
$$U_n(y) = \{(y_0, \ldots, y_{n-1}, \eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)\}.$$

Тогда

$$U_n(x) \oplus U_n(y) = \{(x_0 \oplus y_0, \ldots, x_{n-1} \oplus y_{n-1}, \zeta_n, \zeta_{n+1} \ldots) :\ \zeta_j = \overline{0, p_n - 1}\}.$$

Отсюда $U_n(x) \oplus U_n(y) = U_n(x \oplus y)$, т.е. операция непрерывна.
2) Если все $p_k = 2$, то получается группа Кантора.
3) Группа $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел будет топологической группой с введенной ранее топологией. Непрерывность операции в этой топологии проверяется также как и в группе G_p.

6 Задание топологии цепочкой подгрупп

Определение 6.1 *Пусть $(G, \dot{+}, \mathcal{N})$ – компактная топологическая группа. Группа G называется нуль-мерной, если существует счетная последовательность вложенных подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \tag{6.1}$$

такая, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ и такая, что сдвиги $G_n \dot{+} g$ образуют базу топологии $\mathcal{N}$.

Замечание. Множества G_n образуют базу окрестностей нуля. При каждом n смежные классы $G_n \dot{+} x$ либо не пересекаются, либо совпадают. Более того, два смежных класса $G_n \dot{+} x$ и $G_m \dot{+} y$ либо не пересекаются, либо один включается в другой. В самом деле, пусть $m \geq n$ и $G_n \dot{+} x \bigcap G_m \dot{+} y \neq \emptyset$. Тогда $\exists\, z = g_n \dot{+} x$, $z = g_m \dot{+} y$, $g_n \in G_n, g_m \in G_m \subset G_n$. Выберем элемент $g \in G_m \dot{+} y$ и покажем, что $g \in G_m \dot{+} x$. Так как $g \in G_m \dot{+} y$, то $g = y_m \dot{+} y$, где $y_m \in G_m \subset G_n$. Но $g_m \dot{+} y = g_n \dot{+} x$, следовательно, $y = g_n \dot{-} g_m + x \dot{=} \zeta_n \dot{+} x$, где $\zeta_n = g_n \dot{-} g_m \in G_n$. Тогда $g = y_m \dot{+} y = y_m \dot{+} \zeta_n \dot{+} x \in G_n \dot{+} x$, т.е. $G_m \dot{+} y \subset G_n \dot{+} x$.

Это означает, что семейство сдвигов $\{G_n \dot{+} x\}_{n,x}$ образует базу некоторой топологии, и эта топология определена однозначно. Мы предполагаем, что эта топология совпадает с исходной топологией $\mathcal{N}$.

Предложение 6.1 *Если топология $\mathcal{N}$ задана цепочкой подгрупп (6.1), то операция $\dot{+}$ непрерывна в этой топологии.*

Доказательство. Надо доказать, что $\forall\, U_n(x \dot{+} y) = G_n \dot{+} (x \dot{+} y)$, $\exists\, U(x)$, $\exists\, U(y)$, что

$$U(x) \dot{+} U(y) \subset U_n(x \dot{+} y) = G_n \dot{+} (x \dot{+} y).$$

Выберем $U(x) = G_n \dot{+} x, U(y) = G_n \dot{+} y$. Тогда

$$U(x) \dot{+} U(x) = (G_n \dot{+} x) \dot{+} (G_n \dot{+} y) = G_n \dot{+} (x \dot{+} y),$$

и непрерывность доказана. $\square$

Предложение 6.2 *1) $G_n \dot{+} x$ – одновременно открытое и замкнутое множество.*
2) $G_n \dot{+} x$ – компактное множество.

Доказательство. 1) Множества $G_n \dot{+} x$ при фиксированном n образуют открытое покрытие множества G. Так как G компактно, то из него можно выбрать конечное подпокрытие, следовательно, различных множеств $G_n \dot{+} x$ покрывающих G конечное число. Пусть это множества $(G_n \dot{+} x_j)_{j=0}^{m_n-1}$. Тогда каждое из множеств $G_n \dot{+} x_j$ имеет вид $G_n \dot{+} x_j = G \setminus \bigsqcup_{k \neq j} (G_n \dot{+} x_k)$, значит, $G_n \dot{+} x_j$ – открыто и замкнуто.
2) Пусть $\bigcup_\alpha U_\alpha$ – покрытие множества $G_n \dot{+} x$ открытым множеством. Добавляя к нему множества $G_n \dot{+} x_j$ $(j = 0, \dots, n_m - 1,)$ не содержащие x, получим покрытие множества G. Из него выделяем конечное покрытие множества G. Удалим из него добавленные множества $G_n \dot{+} x_j$. Получим конечное покрытие множества $G_n \dot{+} x$ множествами U_α. □

Предложение 6.3 $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ *фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна.*

Доказательство. Смежные классы G_{n+1} по G_n имеют вид $G_{n+1} \dot{+} x$, где $x \in G_n \subset G$. Поэтому смежных классов по подгруппе G_{n+1} – конечное число. □

Определение 6.2 *Цепочка вложенных подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots,$$

для которых порядки p_n фактор-групп G_n/G_{n+1} есть простые числа, называют основной цепочкой.

Лемма 6.4 (Теорема Силова) *Пусть G – конечная группа, p – порядок группы. Если число q^α делит p (q – простое, $\alpha \in \mathbb{N}$), то в G существуют подгруппы порядка q^α.*

Теорема 6.5 *Пусть G – коммутативная, компактная топологическая группа, и топология задана цепочкой подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$$

Пусть p_n есть порядок фактор-группы G_n/G_{n+1}. Цепочку подгрупп можно дополнить так, что числа p_n будут простыми.

Доказательство. Пусть $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ и $p_n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}$ (q_j – простые). Пусть $G_{n+1} \dot{+} x_j$ ($j = 0, 1, \dots, p_n - 1$) смежные классы группы G_n по подгруппе G_{n+1}. Так как фактор-группа G_n/G_{n+1} имеет порядок p_n и q_1 делит p_n, то существует подгруппа $H \subset (G_n/G_{n+1})$ порядка q_1. Эта подгруппа состоит из q_1 смежных классов $G_{n+1} \dot{+} x_{n_j}$ ($j = 1, 2, \dots, q_1$). По подгруппе H построим группу $G_{n,1}$ такую, что

$$G_n \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}$$

и для которой $G_{n,1}/G_{n+1}$ совпадает с подгруппой H. Эта подгруппа $G_{n,1}$ состоит из тех элементов $x \in G_n$, для которых $x \dot{+} G_{n+1}$ есть смежные классы $G_{n+1} \dot{+} x_{n_j}$, образующие группу H. Но $(G_n/G_{n,1})^\sharp \cdot (G_{n,1}/G_{n+1})^\sharp = (G_n/G_{n+1})^\sharp$, тогда

$$(G_n/G_{n,1})^\sharp \cdot q_1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s} \Rightarrow (G_n/G_{n,1})^\sharp = q_1^{\alpha_1 - 1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}.$$

Применяя эти рассуждения к группе $G_n/G_{n,1}$ порядка $\frac{p_n}{q_1}$, находим подгруппу $G_{n,1}$

$$G_n \supset G_{n,2} \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}$$

такую, что $(G_n/G_{n,2})^\sharp = q_1^{\alpha_1 - 2} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}$. Применяя эти рассуждения α_1 раз, получим подгруппы

$$G_n \supset G_{n,\alpha_1} \supset G_{n,\alpha_1 - 1} \supset \dots \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}$$

такие, что $(G_n/G_{n,\alpha_1})^\sharp = q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}$ и порядки подгрупп

$$G_{n,\alpha_1}/G_{n,\alpha_1 - 1}, G_{n,\alpha_1 - 1}/G_{n,\alpha_1 - 2}, \dots, G_{n,1}/G_{n+1}$$

равны q_1. Повторяя эти рассуждения для множителей $q_2, \dots, q_{s_n}^{\alpha_s}$, получим последовательность вложенных подгрупп

$$G_n \supset G_{n,m} \supset G_{n,m-1} \supset \dots \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}$$

($m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$), для которых порядки фактор-групп

$$G_n/G_{n,m}, G_{n,m}/G_{n,m-1}, \dots, G_{n,1}/G_{n+1}$$

есть простые числа $q_1, q_2, \dots, q_{n_s}$.

Осталось применить этот процесс для любой пары подгрупп $G_m \supset G_{m+1}$, и теорема доказана. □

Замечание. Описанный процесс называют обычно уплотнением цепочки подгрупп.

Определение 6.3 *Цепочку подгрупп, для которой порядки*

$$p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$$

есть простые числа, называют основной цепочкой подгрупп.

Замечание. Топология, порожденная исходной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n=0}^\infty$ и основной цепочкой, которая получается после уплотнения, эквивалентна исходной топологии. Поэтому мы всегда будем задавать топологию основной цепочкой.

7 Представление элементов нуль-мерной группы сходящимся рядом

Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n=0}^\infty$.

Определение 7.1 *Последовательность* (x_n) *называется сходящейся к элементу* $x \in G$, *если*

$$\forall\, O(x) \;\; \exists\, n_0, \;\; \forall\, n \geq n_0 \;\; x_n \in O(x).$$

x *называют пределом последовательности* x_n *и пишут* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Замечание. Так как смежные классы $G_N \dot{+} h$ образуют образуют базу топологии в G, то в определении предела в качестве окрестности $O(x)$ точки x можно выбирать смежный класс $G_N \dot{+} x$

Теорема 7.1 *В группе* G $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \dot{+} y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \dot{+} \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *если* $\lim x_n$ *и* $\lim y_n$ *существуют.*

Доказательство. Обозначим $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Выберем $O(x \dot{+} y) = x \dot{+} y \dot{+} G_{n_0}$. Тогда $x \dot{+} y \dot{+} G_{n_0} = (x \dot{+} G_{n_0}) \dot{+} (y \dot{+} G_{n_0})$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, то для окрестностей $x \dot{+} G_{n_0}$ и $y \dot{+} G_{n_0}$ найдется номер n_1, что $\forall\, n \geq n_1$

$$x_n \in x \dot{+} G_{n_0}, \; y_n \in y \dot{+} G_{n_0} \Rightarrow x_n \dot{+} y_n \in x \dot{+} y \dot{+} G_{n_0},$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \dot{+} y_n = x \dot{+} y$.

Определение 7.2 *При каждом* $n \in \mathbb{N}_0$ *выберем элемент* $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ *и зафиксируем. Последовательность* $(g_n)_{n=0}^\infty$ *назовем базисной.*

Лемма 7.2 *Для любого целого неотрицательного n справедливо равенство*

$$G_n = \bigsqcup_{j=0}^{p_n-1} (G_{n+1} \dot{+} j g_n).$$

Доказательство. Так как p_n простое число, то фактор-группа G_n/G_{n+1} – циклическая и любой ее элемент, отличный от нулевого, является образующим и значит множества

$$G_{n+1}, G_{n+1}\dot{+}g_n, (G_{n+1}\dot{+}g_n) + (G_{n+1}\dot{+}g_0), \ldots, \underbrace{(G_{n+1}\dot{+}g_n) + \ldots + (G_{n+1}\dot{+}g_n)}_{p_n-1}$$

есть все смежные классы, образующие фактор-группу G_n/G_{n+1}.

Лемма 7.3 *Любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде суммы ряда*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n g_n, \tag{7.1}$$

где $g_n \in G_n \setminus G_{n+1},\ x_n = \overline{0, p_n - 1}$.

Доказательство. Выберем последовательность элементов $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и зафиксируем ее. Выберем $x \in G$. Пусть $x \in G_0 \setminus G_1$. Тогда x попадает в один из смежных классов $G_1\dot{+}x_j$ $(j = 0, 1, \ldots, p_0 - 1)$. Так как p_0 – простое число, то фактор-группа G_0/G_1 – циклическая, т.е. множества

$$G_1, G_1\dot{+}g_0, (G_1\dot{+}g_0) + (G_1\dot{+}g_0), \ldots, \underbrace{(G_1\dot{+}g_0) + \ldots + (G_1\dot{+}g_0)}_{p_0-1}$$

образуют группу G_0/G_1. Элементы этой группы можно записать в виде

$$G_1, G_1\dot{+}g_0, G_1\dot{+}2g_0, \ldots, G_1\dot{+}(p_0 - 1)g_0.$$

Таким образом, x можно записать в виде

$$x = x_0 \cdot g_0 \dot{+} y_1,$$

где $y_1 \in G_1$, а x_0 принимает значения $0, 1, \ldots, p_0 - 1$. Если $x \in G_1$, то равенство $x = x_0 g_0 \dot{+} y_1$ также выполняется, если положить $x_0 = 0$. Таким образом, всегда $x = x_0 g_0 \dot{+} y_1$, где $y_1 \in G_1$. Проводя эти рассуждения для элемента $y_1 \in G_1$ получаем, что

$$y_1 = x_1 g_1 \dot{+} y_2,$$

где $y_2 \in G_2$ и $x_1 = \overline{0, p_1 - 1}$. Поэтому $\forall\, n \in \mathbb{N}$ мы можем записать представление

$$x = x_0 g_0 \dot{+} x_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} x_{n-1} g_{n-1} \dot{+} y_n, \tag{7.2}$$

где $x_j = \overline{0, p_j - 1}$, $y_n \in G_n$. Так как $y_n \in G_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ (0 – нулевой элемент группы G). Переходя в равенстве (7.2) к пределу, получаем с учетом леммы 7.1

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k g_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k g_k.$$

Лемма 7.4 *Любой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k g_k \quad (x_k = \overline{0, p_k - 1}) \tag{7.3}$$

сходится к единственному элементу $x \in G$.

Доказательство. Так как G_1 содержит нулевой элемент, то $x_0 g_0 \in G_1 \dot{+} x_0 g_0 \subset G_0$. Аналогично

$$x_0 g_0 \dot{+} x_1 g_1 \in G_2 \dot{+} x_1 g_1 \dot{+} x_0 g_0 \subset G_1 \dot{+} x_0 g_0$$

Вообще

$$x_0 g_0 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n g_n \in G_{n+1} \dot{+} x_n g_n \dot{+} \ldots \dot{+} x_0 g_0 \subset G_n \dot{+} x_{n-1} g_{n-1} \dot{+} \ldots \dot{+} x_0 g_0.$$

Обозначим $x_{n-1} g_{n-1} \dot{+} \ldots \dot{+} x_0 g_0 = t_n$. Последовательность классов $G_n \dot{+} t_n$ есть убывающая последовательность замкнутых множеств. Покажем, что пересечение этих классов не пусто. Предположим, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (G_n \dot{+} t_n) \neq \emptyset$. Тогда последовательность дополнений $(G_n \dot{+} t_n)'$ образует открытое покрытие G, и т.к. G компактно, то из него можно выбрать конечное подпокрытие

$$\bigcup_{k=1}^{l} (G_{n_k} \dot{+} t_{n_k})' \supset G,$$

причем

$$(G_{n_1} \dot{+} t_{n_1})' \subset (G_{n_2} \dot{+} t_{n_2})' \subset \ldots \subset (G_{n_l} \dot{+} t_{n_l})'.$$

Но тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{l} (G_{n_k} \dot{+} t_{n_k})' = (G_{n_l} \dot{+} t_{n_l})' \neq G$. Получили противоречие. Нетрудно проверить, что элемент $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (G_n \dot{+} t_n)$ единственный, и ряд (7.3) сходится к x. Кроме того очевидно, что если последовательности (x'_k) и (x''_k) различны, то суммы рядов $\sum x'_k g_k$ и $\sum x''_k g_k$ тоже различны. □

8 Представление нуль-мерной компактной группы на модифицированном отрезке

Пусть $(G, \dot{+})$ – нуль-мерная компактная группа с основной цепочкой подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$, для которой $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$. Будем строить отображение группы G на отрезок $[0, 1]$ следующим образом.

Пусть $x \in G$ и $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ $(a_n = \overline{0, p_n - 1})$. Положим по определению

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_{n+1}}.$$

1) Покажем, что $\varphi(x) \in [0, 1]$. Очевидно, что $\varphi(x) \geq 0$. Покажем, что $\varphi(x) \leq 1$. В самом деле

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n - 1}{m_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{m_{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{m_0} = 1.$$

2) Покажем, что φ отображает G на $[0, 1]$. Выберем $\xi \in [0, 1)$. По аксиоме Архимеда для числа $m_1 = m_0 p_0$ найдется целое a_0 такое, что

$$\frac{a_0}{m_1} \leq \xi < \frac{a_0 + 1}{m_1}. \tag{8.1}$$

Так как $\xi \in [0, 1)$, то $a_0 + 1 \leq m_1 = p_0$, и значит, $0 \leq a_0 \leq p_0 - 1$. Поэтому из (8.1) имеем

$$0 \leq \xi - \frac{a_0}{m_1} < \frac{1}{m_1}. \tag{8.2}$$

Для числа $m_2 = m_1 p_1$ согласно аксиоме Архимеда найдется целое a_1 такое, что

$$\frac{a_1}{m_2} \leq \xi - \frac{a_0}{m_1} < \frac{a_1 + 1}{m_2}. \tag{8.3}$$

Так как $\frac{a_1+1}{m_2} < \frac{1}{m_1}$, то $a_1 + 1 < p_1$, и значит, $0 \leq a_1 \leq p_1 - 1$. Из (8.3) имеем

$$0 \leq \xi - \frac{a_0}{m_1} - \frac{a_1}{m_2} < \frac{1}{m_2}.$$

Продолжая эти рассуждения, получаем последовательность чисел $a_n \in [0, p_n - 1]$ таких, что

$$0 \leq \xi - \left(\frac{a_0}{m_1} + \frac{a_1}{m_2} + \ldots + \frac{a_n}{m_{n+1}}\right) < \frac{1}{m_{n+1}}.$$

Положим теперь $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_{n+1}} \in G$. Очевидно, что $\varphi(x) = \xi$.

Если $\xi = 1$, то положим $a_n = p_n - 1$, $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_{n+1}}$. Покажем, что $\varphi(x) = 1$. Имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n - 1}{m_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{m_{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_{n+1}} = 1.$$

Таким образом $\varphi :\ G \overset{\text{на}}{\to} [0,1]$.

3) Последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, в которой $a_n = \overline{0, p_n - 1}$ назовем стационарной, если начиная с некоторого номера n_0, $a_n = 0$ или $a_n = p_n - 1$. Покажем, что если (a_n) стационарная последовательность и $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$, то найдется элемент $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n g_n$, такой, что $y \neq x$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$. Пусть $x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k g_k$, т.е. $a_n = a_{n+1} = \ldots = 0$, $a_{n-1} \neq 0$. Положим

$$y = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k}{m_{k+1}} + \frac{a_{n-1} - 1}{m_n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_k - 1}{m_{k+1}}$$

и покажем, что $\varphi(x) = \varphi(y)$. В самом деле

$$\varphi(y) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k}{m_{k+1}} + \frac{a_{n-1}}{m_n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_k - 1}{m_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k}{m_{k+1}} + \frac{a_{n-1} - 1}{m_n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_k}{m_{k+1}} -$$

$$- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{m_{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{m_{k+1}} + \frac{a_{n-1} - 1}{m_n} + \frac{1}{m_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{m_{k+1}} = \varphi(x).$$

Аналогично, если

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} b_k g_k \dot{+} (p_n - 1) g_n \dot{+} \sum_{k=n+1}^{\infty} (p_k - 1) \cdot g_k \ \ (b_{n-1} \neq p_{n-1} - 1),$$

то положим

$$x = \sum_{k=0}^{n-2} b_k g_k \dot{+} (b_{n-1} + 1) g_{n-1} \dot{+} \sum_{k=n}^{\infty} 0 \cdot g_k.$$

Тогда $\varphi(y) = \varphi(x)$.

4) Покажем, что если $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ и (a_n) – не стационарная последовательность, то для любого $y \neq x$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Пусть $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n g_n$ и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n \neq b_n$. Тогда

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{a_k}{m_{k+1}} - \frac{b_k}{m_{k+1}} \right) = \frac{a_n - b_n}{m_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{m_{k+1}}.$$

Так как $a_n \neq b_n$, то $\left| \frac{a_n - b_n}{m_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{m_{n+1}}$.
С другой стороны

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k|}{m_{k+1}} \right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k - 1}{m_{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{m_{k+1}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_{k+1}} = \frac{1}{m_{n+1}},$$

откуда и следует неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| > 0$.

9 Мера на компактной нуль-мерной группе

Теорема 9.1 *Пусть $(G, \dot{+}, \mathcal{N})$ – компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$$

и $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ – простые числа. Тогда все смежные классы $(G_n \dot{+} h_n)_{n=0}^{\infty}$ вместе с пустым множеством образуют полукольцо, которое будем обозначать через $\mathcal{M}$.

Доказательство. 1) Пусть $G_{n_1} \dot{+} h_{n_1}$, $G_{n_2} \dot{+} h_{n_2}$ – два смежных класса и пусть $n_2 \geq n_1$. Тогда $G_{n_2} \dot{+} h_{n_2} \subset G_{n_1} \dot{+} h_{n_1}$. Следовательно, $G_{n_2} \dot{+} h_{n_2} \bigcap G_{n_1} \dot{+} h_{n_1} = G_{n_2} \dot{+} h_{n_2} \in \mathcal{M}$.
2) Так как $G_{n_1} \dot{+} h_{n_1} \supset G_{n_2} \dot{+} h_{n_2}$, то смежный класс $G_{n_1} \dot{+} h_{n_1}$ есть дизъюнктное объединение смежных классов $G_{n_2} \dot{+} \tilde{h}_j$. Тогда разность $G_{n_1} \dot{+} h_{n_1} \setminus G_{n_2} \dot{+} h_{n_2}$ есть дизъюнктное объединение смежных классов $G_{n_2} \dot{+} \tilde{h}_j$. $\Box$

Теорема 9.2 *Равенства $\mu(G_n \dot{+} h_n) = \mu G_n = \frac{1}{m_n}$, $\mu\emptyset = 0$, определяют меру на полукольце $\mathcal{M}$.*

Доказательство. 1) $\mu G_n \geq 0$ – очевидно.
2) Пусть $n_2 > n_1$, $G_{n_1} \dot{+} h_{n_1} = \bigsqcup\limits_j G_{n_2} \dot{+} \tilde{h}_j$. При этом количество смежных классов $G_{n_2} \dot{+} \tilde{h}_j$, соответствующих классу $G_{n_1} \dot{+} h_{n_1}$, равно $p_{n_1} \cdot p_{n_1+1} \cdot \ldots \cdot p_{n_2-1}$. Поэтому

$$\sum \mu(G_{n_2} \dot{+} \tilde{h}_j) = \frac{1}{m_{n_2}} \cdot p_{n_2-1} \cdot p_{n_2-2} \ldots p_{n_1} =$$

$$= \frac{1}{p_{n_2-1}\cdot p_{n_2-2}\cdot\ldots\cdot p_{n_1}m_{n_1}}\cdot p_{n_2-1}\ldots p_{n_1} = \frac{1}{m_{n_1}} = \mu(G_{n_1}\dot{+}h_{n_1}).$$

3) Проверим счетную аддитивность меры μ.

Пусть $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty}(G_{n_j}\dot{+}h_j)$ дизъюнктное объединение смежных классов. Так как все классы $G_{n_j}\dot{+}h_j$ – открытые множества и $G_n\dot{+}h$ – компактное множество, то $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N}(G_{n_j}\dot{+}h_j)$, что невозможно. Это означает, что смежный класс $G_n\dot{+}h$ нельзя представить в виде счетного объединения дизъюнктных смежных классов. Пусть $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N}(G_{n_j}\dot{+}h_j)$. Если все n_j равны, то в пункте 2) было доказано, что $\mu(G_n\dot{+}h) = \sum\limits_{j=1}^{N}\mu(G_{n_j}\dot{+}h_j)$. Если не все n_j равны между собой, то выберем среди них наибольшее, пусть для определенности это n_N. Тогда каждый из смежных классов $G_{n_j}\dot{+}h_j$ представляем в виде конечного дизъюнктного объединения $G_{n_j}\dot{+}h_j = \bigsqcup\limits_{l}(G_{n_N}\dot{+}\tilde{h}_{j,l})$ и, значит, $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N}\bigsqcup\limits_{l}(G_{n_N}\dot{+}\tilde{h}_{j,l})$. Снова по пункту 2)

$$\mu(G_n\dot{+}h) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l}\mu(G_{n_N}\dot{+}\tilde{h}_{j,l}) = \sum_{j=1}^{N}\mu(G_{n_j}\dot{+}h_j),$$

и счетная аддитивность доказана. □

Теорема 9.3 *Мера μ на $\mathcal{M}$ обладает свойством: если $E \in \mathcal{M}$, то $\mu(E\dot{+}g) = \mu E$.*

Доказательство.

$E \in \mathcal{M} \Rightarrow E = G_n\dot{+}h_n \Rightarrow E\dot{+}g = G_n\dot{+}h_n\dot{+}g \Rightarrow \mu E = \mu G_n, \mu(E\dot{+}g) = \mu G_n.$ □

Определение 9.1 *Равенство $\mu(E\dot{+}g) = \mu E$ называется свойством инвариантности меры относительно сдвига.*

Так как μ – мера на полукольце $\mathcal{M}$, то ее можно продолжить на σ-алгебру, по схеме Каратеодори. Напомним, что этот процесс основан на следующих утверждениях.

Теорема 9.4 *Пусть μ^* внешняя мера, построенная по мере μ на $\mathcal{M}$,т.е. $\mu^* = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu E_k : \bigcup E_k \supset E,\ E_k \in \mathcal{M}\right\}$. Тогда μ^* инвариантна относительно сдвига.*

Доказательство.

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{\bigsqcup\limits_k (G_{n_k} \dot{+} h_k) \supset E} \mu(G_{n_k} \dot{+} h_k) = \inf \sum_{\bigsqcup\limits_k (G_{n_k} \dot{+} h \dot{+} h_k) \supset E \dot{+} h} \mu(G_{n_k} \dot{+} h \dot{+} h_k) =$$

$$= \mu^*(E \dot{+} h). \ \square$$

Множество $E \subset G$ называется μ^* измеримым, если $\forall\, A \subset G$

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

Теорема 9.5 *Совокупность $\mathcal{A}$ μ^* измеримых множеств образует σ-алгебру и μ^* есть мера на $\mathcal{A}$.*

На полукольце $\mathcal{M}$ продолжение μ^* совпадает с μ. Поэтому μ^* обозначают через μ и называют продолжением исходной меры μ на σ-алгебру по схеме Каратеодори.

Следствие 1. *Если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (G_{n_k} \dot{+} h_k)$, то $\mu E = \sum \mu(G_{n_k} \dot{+} h_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu G_{n_k}$.*

$\square$

Следствие 1. *Множества, полученные из смежных классов $G_n \dot{+} g$ с помощью счетного числа операций $\cap, \cup, \setminus$, измеримы.*

10 Расстояние в нуль-мерной компактной группе

Определение 10.1 *Положим по определению*

$$\begin{aligned} &\rho(x,y) = 0, && \text{если } x = 0 \\ &\rho(x,y) = \tfrac{1}{m_n}, && \text{если } x, y \in G_n \dot{+} h_n, \text{ но } x, y \notin G_{n+1} \dot{+} h_{n+1} \end{aligned} \tag{10.1}$$

или иначе

$$\rho(x,y) = \inf \left\{ \frac{1}{m_n} : \ x, y \in G_n \dot{+} h_n \right\}. \tag{10.2}$$

Замечание. Условие $x, y \in G_n \dot{+} h_n$ можно записать в виде $x \dot{-} y \in G_n$. В самом деле,

$$x \in G_n \dot{+} h_n \Leftrightarrow x = t \dot{+} h_n, \ t \in G_n,$$

$$y \in G_n \dot{+} h_n \Leftrightarrow y = \tau \dot{+} h_n, \ \tau \in G_n.$$

Тогда $x \dot{-} y = t \dot{+} h_n \dot{-} \tau \dot{-} h_n = t \dot{-} \tau \in G_n$. Поэтому для $\rho(x,y)$ можно записать:

$$\rho(x,y) = \inf \left\{ \frac{1}{m_n} : \ x \dot{-} y \in G_n \right\}. \tag{10.3}$$

Теорема 10.1 *Равенства (10.3) определяют расстояние в G.*

Доказательство. 1) $\rho(x,y) \ge 0$ – очевидно.
2) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall n,\ x, y$ принадлежат одному смежному классу $G_n \dot{+} h_n$. Эти смежные классы образуют убывающую последовательность

$$G_0 = G_0 \dot{+} h_0 \supset G_1 \dot{+} h_1 \supset \ldots \supset G_n \dot{+} h_n \supset G_{n+1} \dot{+} h_{n+1} \supset \ldots \qquad (10.4)$$

В самом деле, смежные классы $G_n \dot{+} h_n$ и $G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$ или не пересекаются, или один включается в другой, а именно, $G_n \dot{+} h_n \supset G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$, элемент $x \in G_n \dot{+} h_n$ и $x \in G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$, т.е. смежные классы $G_n \dot{+} h_n$ и $G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$ пересекаются, значит, $G_n \dot{+} h_n \supset G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$. Но пересечение классов $G_n \dot{+} h_n$ содержит единственный элемент (т.к. $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$). Значит, $x = y$.
3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ по определению.
4) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$.
Если $\rho(x,z) = 0$, то это очевидно. Пусть $\rho(x,z) > 0 \Rightarrow \rho(x,z) = \frac{1}{m_n} \Rightarrow x, z \in G_n \dot{+} h_n$ и $z \in G_{n+1} \dot{+} z,\ x \in G_{n+1} \dot{+} x$, причем $G_{n+1} \dot{+} x \cap G_{n+1} \dot{+} z = \emptyset$.

Если $y \in G_{n+1} \dot{+} x$, то $y \notin G_{n+1} \dot{+} z$. Отсюда $\rho(y,z) \ge \frac{1}{m_n}$, следовательно, $\rho(x,z) = \frac{1}{m_n} \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Аналогично, если $y \in G_{n+1} \dot{+} z$, то $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Если же $y \notin G_n \dot{+} g_n$, то $\rho(x,y) \ge \frac{1}{m_n},\ \ \rho(y,z) > \frac{1}{m_n} \Rightarrow \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$. $\square$

Теорема 10.2 *Расстояние $\rho(x,y)$ определяет исходную топологию в G.*

Доказательство. Покажем, что

$$G_n \dot{+} x = \left\{ y \in G :\ \rho(x,y) \le \frac{1}{m_n} \right\},$$

т.е. $G_n \dot{+} x$ есть окрестность точки x радиуса $r = \frac{1}{m_n}$.
1) $y \in G_n \dot{+} x \Rightarrow x$ и y принадлежат одному смежному классу, следовательно, $\rho(x,y) \le \frac{1}{m_n}$.
2) Пусть $y \in G$ и $\rho(x,y) \le \frac{1}{m_n}$. Если $y = x$, то $y \in G_n \dot{+} x$. Пусть $y \ne x$. Тогда $\rho(x,y) = \frac{1}{m_k} \le \frac{1}{m_n}$. Отсюда $y \dot{-} x \in G_k \subset G_n$, т.е. $y \in G_n \dot{+} x$. $\square$

Глава 2

Функции на компактной нуль-мерной группе

1 Непрерывные функции на компактной нуль-мерной группе

Определение 1.1 *Пусть $(G, \dot{+}, \mathcal{N})$ компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$$

и $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ – простые. Функцию $f: G \to \mathbb{R}$ или $f: G \to \mathbb{C}$ называют непрерывной в точке $x_0 \in G$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, G_n, \forall\, x \dot{-} x_0 \in G_n,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

или иначе

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, G_n, \forall\, x \in G_n \dot{+} x_0,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.2}$$

Определение 1.2 *Функция $f: G \to \mathbb{C}$ называется равномерно непрерывной на G, если*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, G_n, \forall\, x, y \in G\ x \dot{-} y \in G_n,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

Замечание 1. Очевидно, что если f равномерно непрерывна на G, то она непрерывна в каждой точке.
Замечание 2. Так как группа G компактная, то согласно теореме Кантора всякая функция, непрерывная на G, будет равномерно непрерывной на G.

Теорема 1.1 *Любая ступенчатая функция h, определенная на G, непрерывна на G.*

Доказательство. Пусть $h(x) = h_j$ при $x \in G_n \dot{+} g_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m_n - 1)$ и все смежные классы $G_n \dot{+} g_j$ – дизъюнктны, т.е. $G_n \dot{+} g_j$ – это все смежные классы по подгруппе G_n. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $x, y \in G$ и такие, что $x \dot{-} y \le \frac{1}{m_n}$, то x и y принадлежат одному смежному классу $G_n \dot{+} g_j$, тогда $|h(x) - h(y)| = h_j - h_j = 0 < \varepsilon$. □

Определение 1.3 *Функция $h(x)$ называется ступенчатой на G, если G представлено в виде объединения конечного числа дизъюнктных смежных классов*

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{s} G_{n_k} \dot{+} g_k \tag{1.4}$$

и $h(x)$ постоянны на каждом смежном классе $G_{n_k} \dot{+} g_k$.

Замечание. Так как смежных классов в (1.4) конечное число, то существует $n = \max\limits_{k=\overline{1,s}} n_k$ и все классы $G_{n_k} \dot{+} g_k$ можно разбить на дизъюнктные смежные классы по подгруппе G_n. Поэтому ступенчатую функцию h можно считать постоянной на смежных классах по некоторой фиксированной группе G_n.

2 Модуль непрерывности

Определение 2.1 *Пусть $f: G \to \mathbb{C}$. Последовательность $\omega_n(f)$, определенная равенствами*

$$\omega_n(f) = \sup_{x, y, x \dot{-} y \in G_n} |f(x) - f(y)|,$$

называется модулем непрерывности.

Предложение 2.1 *$(\omega_n(f))_{n=0}^{\infty}$ есть убывающая последовательность.*

Доказательство. $\omega_{n+1}(f) \le \omega_n(f)$, т.к. в определении $\omega_n(f)$ sup берется по более широкому множеству. □

Предложение 2.2 *Функция $f: G \to \mathbb{C}$ непрерывна на G тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \omega_n(f) = 0$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть f – непрерывна. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists G_n, \, \forall x, y, \, x \dot{-} y \in G_n \, |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \Rightarrow \sup_{\substack{x, y \\ x \dot{-} y \in G_n}} |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \Rightarrow$$

$$\omega_n(f) \le \varepsilon \Rightarrow \forall p \ge n \; \omega_{n+p}(f) \le \varepsilon.$$

Так как последовательность $\omega_n(f)$ – убывающая, то $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(f)=0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(f)=0$. Тогда ввиду монотонности

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n,\ \omega_n(f)\le\varepsilon\Rightarrow\sup_{x\dot{-}y\in G_n}|f(x)-f(y)|\le\varepsilon\Rightarrow$$

$$\forall x,y,x\dot{-}y\in G_n,\ |f(x)-f(y)|\le\varepsilon,$$

т.е. f равномерно непрерывна. □

Предложение 2.3 *Для всех убывающих последовательностей $\omega_n\downarrow 0$ существует непрерывная функция f, для которой $\omega_n(f)=\omega_n$.*

Доказательство. При каждом $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\sqcup\{0\}$ положим

$$\begin{array}{l} f(x)=\omega_n,\ \ x\in G_n\setminus G_{n+1}\\ f(0)=0. \end{array}$$

Вычислим $\omega_n(f)$. Если $x\dot{-}y\in G_n$, то x и y принадлежат одному и тому же смежному классу $G_n\dot{+}g_n$. Если этот смежный класс отличен от G_n, то $f(x)-f(y)=0$. Если этот смежный класс равен G_n, то наибольшее значение f на G_n – это ω_n, наименьшее – это 0. Следовательно, $\sup\limits_{x\dot{-}y\in G_n}|f(x)-f(y)|=\omega_n$. Так как $\omega_n\to 0$, то f непрерывна. □

3 Интегрирование на компактных нуль-мерных группах

Пусть $(G,\dot{+},\mathcal{N})$ – компактная нуль-мерная группа с основным условием подгрупп

$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_n\supset\ldots,$$

$p_n=(G_n/G_{n+1})^\sharp$ – простые, и пусть μ – мера на G полученная стандартным продолжением меры $\mu(G_n\dot{+}x)=\frac{1}{m_n}$ с полукольца смежных классов по схеме Каратеодори. Так как мера $\mu G=1<\infty$, то можно на G определить интеграл, как интеграл Лебега по множеству конечной меры, по известной схеме. Вначале определяем интеграл от измеримой ограниченной функции. Для этого:
1) Разбиваем множество $E\subset G$ на конечное число измеримых дизъюнктных множеств $E=\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}E_k$.
2) Строим верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\overline{S}(f,(E_k))=\sum_{k=1}^{n}M_k\mu E_k,\ \underline{S}(f,(E_k))=\sum_{k=1}^{n}m_k\mu E_k,$$

где $M_k = \sup_{x\in E_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x\in E_k} f(x)$.

3) Определяем верхний интеграл

$$\overline{I}(f,E) = \inf_{(E_k)} \overline{S}(f,(E_k))$$

и нижний интеграл

$$\underline{I}(f,E) = \sup_{(E_k)} \underline{S}(f,(E_k)).$$

4) Всегда

$$\underline{I}(f,E) \le \overline{I}(f,E).$$

Если $\underline{I}(f,E) = \overline{I}(f,E)$, то f назовем интегрируемой на E. Общее значение верхнего и нижнего интегралов назовем интегралом от f и обозначим $\int\limits_E f d\,\mu$

5) Если f неограничена, то определяем интеграл для положительной функции $f(x) \ge 0$ как lim интегралов от срезок

$$f_{(N)}(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le N \\ N, & f(x) > N. \end{cases}$$

т.е.

$$\int\limits_E f d\,\mu = \lim_{N\to\infty} \int\limits_E f_{(N)} d\,\mu.$$

6) Если f неограничена и имеет произвольный знак, то положим

$$\int\limits_E f d\,\mu = \int\limits_E f^+ d\,\mu - \int\limits_E f^- d\,\mu.$$

Определенный таким образом интеграл есть интеграл Лебега на G. Он является абсолютно сходящимся в том смысле, что для измеримой функции f интеграл $\int_E f d\mu$ существует тогда и только тогда, когда существует $\int_E |f| d\mu$.
7)Если $f = \phi + i\psi$, то полагаем

$$\int\limits_E f d\,\mu = \int\limits_E \phi d\,\mu + i \int\limits_E \psi d\,\mu.$$

После этого стандартным способом определяются пространства $L_p(E)$.

Теорема 3.1 *Интеграл* $\int\limits_G f\,d\,\mu$ *инвариантен относительно сдвига, т.е.* $\forall\, h \in G$

$$\int\limits_G f(x\dot{+}h)d\,\mu(x) = \int\limits_G f(x)d\,\mu(x).$$

Доказательство. Если $G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ разбиение группы G на дизъюнктные множества, то

$$\bigsqcup_{k=1}^{n}(E_k\dot{+}h) = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k. \tag{3.1}$$

Проверим это.
1) Множества $E_k\dot{+}h$ и $E_l\dot{+}h$ дизъюнктны при $l \neq h$. В самом деле, пусть $E_k\dot{+}h \cap E_l\dot{+}h \neq \emptyset$, тогда $\exists\, x = x_k\dot{+}h = x_l\dot{+}h$, где $x_k \in E_k, x_l \in E_l$. Прибавляя к обеим частям этого равенства $\dot{-}h$, получаем $x_k = x_l$, что невозможно.
2) Пусть $x \in G$. Покажем, что существует k, что $x \in E_k\dot{+}h$. Рассматриваем элемент $x\dot{-}h \in G$. Тогда $x\dot{-}h \in E_k$ при некотором k, следовательно, $x \in E_k\dot{+}h$, значит, $x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(E_k\dot{+}h)$. Таким образом, равенство (4.1) верно. Так как $\mu E_k = \mu(E_k\dot{+}h)$, то отсюда следует, что множество верхних сумм для $f(x)$ и для $f(x\dot{+}h)$ совпадают, поэтому $\overline{I}(f(x), G) = \overline{I}(f(x\dot{+}h), G)$.

Аналогично, $\underline{I}(f(x), G) = \underline{I}(f(x\dot{+}h), G)$. Поэтому $f(x\dot{+}h) \in L(G)$ и $\int\limits_G f(x)d\,\mu(x) = \int\limits_G f(x\dot{+}h)d\,\mu(x)$ в случае, когда f ограничена и измерима на G. Но тогда это равенство справедливо и для любых функций $f \in L(G)$.
Замечание. Свойство инвариантности верно только в случае интегрирования по всей группе G. Для интеграла верны стандартные свойства:
1) f измерима на E. Тогда $\int\limits_E |f|$ существует тогда и только тогда, когда $\int\limits_E f$ существует. При этом $\left|\int\limits_E f\right| \leq \int\limits_E |f|$.
2) Если $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $f \in L(E)$, то $\int\limits_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f$.
3) Интеграл $\int\limits_E f$ есть абсолютно непрерывная функция множества.
4) Если f_n измеримы на E, $f_n(x) \to f(x)$ п.в. на E, $|f_n(x)| \leq \varphi(x) \in L(E)$, то $f \in L(E)$ и $\int\limits_E f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n$ (теорема Лебега о предельном переходе).
5)Если $f \in L(G)$ то $f(\dot{-}\cdot) \in L(G)$ и справедливо равенство $\int_G f(t)d\mu = \int_G f(\dot{-}t)d\mu$.

4 Прямое произведение компактных нуль-мерных групп

Определение 4.1 *Пусть $G^{(j)}$ $(j = \overline{1, d})$ – коммутативные группы. Обозначим через G декартово произведение групп $G^{(j)}$, т.е.*

$$G = G^{(1)} \times G^{(2)} \times \ldots \times G^{(d)} = \prod_{j=1}^{d} G^{(j)},$$

т.е. элементами G являются кортежи

$$\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}), \quad x^{(j)} \in G^{(j)}.$$

Определим в G операцию сложения $\dot{+}$ как покоординатное сложение в соответствующих группах, т.е.

$$\mathbf{x} \dot{+} \mathbf{y} \stackrel{df}{=} (x^{(1)} \dot{+} y^{(1)}, \ldots, x^{(d)} \dot{+} y^{(d)}).$$

Предложение 4.1 *Множество G с введенной операцией $\dot{+}$ является группой. Нулевым элементом группы G является кортеж $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, противоположным к $\mathbf{x}$ является элемент $\dot{-}\mathbf{x} = (\dot{-}x^{(j)})_{j=1}^{d}$.*

Определение 4.2 *Группу $(G, \dot{+})$ называют прямым произведением групп.*

Теорема 4.2 *Пусть $(G^{(j)}, \mathcal{N}^{(j)})_{j=1}^{d}$ – топологическая группа и пусть $\mathcal{B}^{(j)}$ $(j = \overline{1, d})$ есть база топологии $\mathcal{N}^{(j)}$ в группе $G^{(j)}$. Совокупность $\mathcal{B}$ множеств $B = B^{(1)} \times B^{(2)} \times \ldots \times B^{(d)}$, где $B^{(j)} \in \mathcal{B}^{(j)}$, есть база топологии.*

Доказательство. Воспользуемся критерием базы топологии. Пусть $A, B \in \mathcal{B}$ и $A \cap B \neq \emptyset$, $A = \prod\limits_{j=1}^{d} A^{(j)}$, $B = \prod\limits_{j=1}^{d} B^{(j)}$, $A^{(j)}, B^{(j)} \in \mathcal{B}^{(j)}$. Так как $A \cap B \neq \emptyset$, то $\forall\, j = \overline{1, d}$ $A^{(j)} \cap B^{(j)} \neq \emptyset$. Поэтому $\forall\, x^{(j)} \in A^{(j)} \cap B^{(j)}$ существуют множества $C^{(j)} \in \mathcal{B}^{(j)}$ такие, что $x^{(j)} \in C^{(j)} \subset A^{(j)} \cap B^{(j)}$. Тогда для элемента $\mathbf{x} = (x^{(j)})_{j=1}^{d} \subset \prod\limits_{j=1}^{d} C^{(j)}$ имеем

$$\mathcal{B} \ni \prod_{j=1}^{d} C^{(j)} \subset \prod_{j=1}^{d} A^{(j)} \cap B^{(j)} = \left(\prod_{j=1}^{d} A^{(j)} \right) \bigcap \left(\prod_{j=1}^{d} B^{(j)} \right). \ \square$$

Следствие. Совокупность множеств, которые получаются объединением множеств вида

$$A = \prod_{j=1}^{d} A^{(j)}$$

образуют топологию в группе $G = \prod\limits_{j=1}^{d} G^{(j)}$. Группа G с определенной таким образом топологией называется прямым произведением топологических групп.

Предложение 4.3 *Если $G = \prod\limits_{j=1}^{d} G^{(j)}$ – прямое произведение топологических групп, то операция сложения непрерывна в топологии группы G, т.е. G является топологической группой.*

Доказательство. Выберем элементы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ и пусть $U(\mathbf{x}\dot{+}\mathbf{y})$ – окрестность элемента $\mathbf{x}\dot{+}\mathbf{y}$. Тогда существует множество $B \in \mathcal{B}$, содержащее точку $\mathbf{x}\dot{+}\mathbf{y}$. По построению $B = B^{(1)}\times B^{(2)}\times\ldots\times B^{(d)}$, и значит, $B^{(j)} \ni x^{(j)}\dot{+}y^{(j)}$. Так как операция $\dot{+}$ непрерывна в $G^{(j)}$, то $\forall\, j = \overline{1,d}$ существуют открытые множества $U^{(j)}(x^{(j)})$ и $V^{(j)}(y^{(j)})$ такие, что $U^{(j)}\dot{+}V^{(j)} \subset B^{(j)}$. Но тогда $\prod\limits_{j=1}^{d}(U^{(j)}\dot{+}V^{(j)}) \subset \prod\limits_{j=1}^{d} B^{(j)}$. Так как $\prod\limits_{j=1}^{d}(U^{(j)}\dot{+}V^{(j)}) = \left(\prod\limits_{j=1}^{d} U^{(j)}\right)\dot{+}\left(\prod\limits_{j=1}^{d} V^{(j)}\right)$, и множества $\left(\prod\limits_{j=1}^{d} U^{(j)}\right)$ и $\left(\prod\limits_{j=1}^{d} V^{(j)}\right)$ открыты, то операция $\dot{+}$ непрерывна в топологии прямого произведения. $\square$

Теорема 4.4 (теорема Тихонова) *Если группы $G^{(j)}$ компактны, то их прямая сумма есть компактная топологическая группа.*

Теорема 4.5 *Пусть G компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \quad (p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp) \tag{4.1}$$

Тогда $G^d = \underbrace{G\times G\times\ldots\times G}_{d}$ компактная нуль-мерная группа с образующей цепочкой подгрупп

$$G^d = G_0^d \supset G_1^d \supset G_2^d \supset \ldots \supset G_n^d \supset \ldots \tag{4.2}$$

при этом $p_n^d = (G_n^d/G_{n+1}^d)^\sharp$.

Доказательство. Так как $(G_k)_{k=0}^{\infty}$ есть убывающая последовательность подгрупп, то $(G_k^d)_{k=0}^{\infty}$ тоже убывающая последовательность подгрупп. Поэтому
1) смежные классы $G_n^d\dot{+}\mathbf{x}$ и $G_m^d\dot{+}\mathbf{y}$ либо не пересекаются, либо один включается в другой.
2) Для смежных классов $G_n^d\dot{+}\mathbf{x}$ справедливо равенство

$$G_n^d\dot{+}\mathbf{x} = \prod_{j=1}^{d}(G_n^d\dot{+}\mathbf{x}^{(j)}). \tag{4.3}$$

В самом деле,

$$\mathbf{y} \in G_n^d\dot{+}\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{t}\dot{+}\mathbf{x} \,\wedge\, \mathbf{t} \in G_n^d \Leftrightarrow \forall\, j = \overline{1,d}\; y^{(j)} = t^{(j)}\dot{+}x^{(j)} \,\wedge\, t^{(j)} \in G_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, j = \overline{1,d}\; y^{(j)} \in G_n\dot{+}x^{(j)} \Leftrightarrow \mathbf{y} \in \prod_{j=1}^{d}(G_n\dot{+}x^{(j)}).$$

3) Из равенства (5.3) следует, что смежные классы $G_n^d\dot{+}\mathbf{x}$ задают базу топологии прямого произведения.
4) Если n фиксировано, то при каждом $j \in [1,d] \subset \mathbb{N}$ существует p_n различных смежных классов $G_{n+1}\dot{+}x^{(j)}$, когда $x^{(j)}$ пробегает подгруппу G_n. Поэтому число множеств вида $\prod\limits_{j=1}^{d} G_n\dot{+}x^{(j)}$ равно p_n^d. Отсюда, в частности, следует, что число смежных классов всей группы G^d по подгруппе G_n^d равно m_n^d. □

5 Мера на прямом произведении нуль-мерных групп

Лемма 5.1 *Совокупность смежных классов* $G_n^d\dot{+}\mathbf{g}$ $(n \in \mathbb{N}_0, \mathbf{g} \in G^d)$ *образуют кольцо.*

Доказательство. Пусть $G_{n+1}^d\dot{+}\mathbf{h} \subset G_n^d\dot{+}\mathbf{g}$. Тогда $G_n^d\dot{+}\mathbf{g}$ есть дизъюнктное объединение смежных классов $G_{n+1}^d\dot{+}\mathbf{h}_j$, где $\mathbf{h}_j \in G_n^d$ $(j = \overline{0, p^d - 1})$. Следовательно, разность $(G_n^d\dot{+}\mathbf{g}) \setminus (G_{n+1}^h\dot{+}\mathbf{h})$ есть объединение смежных классов вида $G_{n+1}^h\dot{+}\mathbf{h}_j$ в количестве $p^d - 1$. Отсюда по индукции получаем, что любая разность $(G_n^d\dot{+}\mathbf{g}) \setminus (G_{n+p}^d\dot{+}\mathbf{h})$ представима в виде дизъюнктного объединения смежных классов вида $G_{n+p}^d\dot{+}\mathbf{h}_j$. □

Лемма 5.2 *Равенство*

$$\mu_d(G_n^d\dot{+}\mathbf{g}) \overset{df}{=} \prod_{j=1}^{d}\mu(G_n\dot{+}g^{(j)})$$

определяет меру на кольце смежных классов $(G_n^d \dot{+} \mathbf{g})$.

Доказательство. 1) Пусть $G_n^d \dot{+} \mathbf{g} = \bigsqcup\limits_{j=1}^{p_n^d} (G_{n+1}^d \dot{+} \mathbf{g}_j)$. Тогда $\mu_d(G_n^d \dot{+} \mathbf{g}) = \left(\frac{1}{m_n}\right)^d$, $\mu_d(G_{n+1}^d \dot{+} \mathbf{g}_j) = \left(\frac{1}{m_{n+1}}\right)^d$. Но

$$\left(\frac{1}{m_{n+1}}\right)^d \cdot p_n^d = \left(\frac{1}{m_n}^{p}\right) = \mu_d(G_n^d \dot{+} \mathbf{g}).$$

Таким образом,

$$\mu_d(G_n^d \dot{+} \mathbf{g}) = \sum_{j=1}^{p_n^d} \mu_d(G_{n+1}^d \dot{+} \mathbf{g}_j).$$

Отсюда следует, что если $G_n^d \dot{+} \mathbf{g} = \bigsqcup\limits_j (G_{n+p}^d \dot{+} \mathbf{g}_j)$, то

$$\mu_d(G_n^d \dot{+} \mathbf{g}) = \sum_j \mu(G_{n+p}^d \dot{+} \mathbf{g}_j). \tag{5.1}$$

2) Из равенства (6.1) следует, что если $G_n^d \dot{+} \mathbf{g}$ представимо в виде конечного объединения дизъюнктных смежных классов, т.е.

$$(G_n^d \dot{+} \mathbf{g}) = \bigsqcup_j (G_{n+p_j}^d \dot{+} \mathbf{g}_j),$$

то $\mu_d(G_n^d \dot{+} \mathbf{g}) = \sum\limits_j \mu_d(G_{n+p_j}^d \dot{+} \mathbf{g}_j)$.

3) Так как смежный класс $G_n \dot{+} g^{(j)}$ нельзя представить в виде дизъюнктного объединения бесконечного числа смежных классов, то и $G_n^d \dot{+} \mathbf{g} = \prod\limits_{j=1}^{d} (G_n \dot{+} g^{(j)})$ тоже нельзя представить в виде дизъюнктного объединения смежных классов.

Таким образом, μ_d есть счетно-аддитивная функция множества на кольце смежных классов $G_n^d \dot{+} \mathbf{g}$, т.е. μ_d – мера. □

Обозначим через $\mathcal{K}_d$ кольцо смежных классов $(G_n^d \dot{+} \mathbf{g})$ $(\mathbf{g} = (g^{(1)}, \ldots, g^{(d)}))$. Так как μ_d – мера на кольце $\mathcal{K}_d$, то равенство

$$\mu_d^*(E) = \inf \sum_{\cup G_{n_\alpha} \dot{+} g_\alpha \supset E} \mu_d(G_? \dot{+} \mathbf{g}_\alpha)$$

определяет внешнюю меру на G^d. Теперь определяем *** множества на G условием

$$E \subset G^d \text{ измеримо} \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\, A \subset G,\ \mu_d^*(A) = \mu_d^*(A \cap E) + \mu_d^*(A \setminus E).$$

Измеримые множества образуют σ-алгебру (обозначим $\mathcal{A}^d$). Для любого $E \subset \mathcal{A}^d$ полагаем $\mu_d(E) = \mu_d^*(E)$. Поэтому $\forall\, E \in \mathcal{K}_d \;\; \mu_d(E)$ совпадает с исходной мерой на кольце $\mathcal{K}_d$. Построенная мера обладает всеми свойствами меры, и, кроме этого, она инвариантна относительно сдвига.

6 Интегрирование на прямом произведении компактных нуль-мерных групп

По мере μ_d, построенной на σ-алгебре $\mathcal{A}$, строим интеграл по схеме Лебега:
1) определяем интеграл от ограниченных измеримых функций;
2) определяем интеграл от неограниченных положительных функций как предел интегралов от срезок;
3) определяем интеграл от произвольной вещественной функции равенством

$$\int\limits_E f d\,\mu_d = \int\limits_E f^+ - \int\limits_E f^-;$$

4) определяем интеграл от комплексной функции равенством

$$\int\limits_E (f+ih) d\,\mu_d = \int\limits_E f d\,\mu_d + i \int\limits_E h d\,\mu_d.$$

Получаем интеграл Лебега на G^d, удовлетворяющий всем известным свойствам интеграла Лебега, в том числе:
1) $\int\limits_E f d\,\mu_d = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f d\,\mu_d$, если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ – (счетная аддитивность).
2) Если f измерима, то $\int\limits_E f d\,\mu_d$ существует тогда и только тогда, когда $\int\limits_E |f| d\,\mu_d$ существует и $\left|\int\limits_E f d\,\mu_d\right| \le \int\limits_E |f| d\,\mu_d$.
3) Теорема Лебега о предельном переходе, т.е. если $f_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ п.вс. на E, то $|f_n(\mathbf{x})| \le \varphi(\mathbf{x}) \in L(E)$, но $f \in L(E)$ и $\int\limits_E f = \lim \int\limits_E f_n$.
4) Теорема Фубини: если $f \in L(G^d)$ и $d = d_1 + d_2$, то

$$\int\limits_{G^d} f d\,\mu_d = \int\limits_{G^{d_1}} d\,\mu_{d_1} \int\limits_{G^{d_2}} f(\mathbf{x}^{(d_1)}, \mathbf{x}^{(d_2)}) d\,\mu_{d_2},$$

причем внутренний интеграл существует при почти всех $\mathbf{x}^{(d_1)} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d_1)})$.

5) Теорема Фубини-Тенелли: Если $f(\mathbf{x}) \geq 0$ на $G^d = G^{d_1+d_2}$ и существует повторный интеграл

$$\int\limits_{G^{d_1}} d\,\mu_{d_1} \int\limits_{G^{d_2}} f(\mathbf{x}) d\,\mu_{d_2},$$

то существует интеграл, и справедливо равенство

$$\int\limits_{G^d} d\,\mu_d = \int\limits_{G^{d_1}} d\,\mu_{d_1} \int\limits_{G^{d_2}} f(\mathbf{x}) d\,\mu_{d_2}.$$

7 Свертка функций

Определение 7.1 *Пусть $f, h:\ G \to \mathbb{C}$. Функцию*

$$(f * h)(x) \stackrel{df}{=} \int\limits_G f(x \dot{-} t) h(t) d\,\mu(t)$$

называют сверткой.

Теорема 7.1 *Если $h, f \in L(G)$, то*
1) $f * h \in L(G)$,
2) $||f * h||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||h||_1$.

Доказательство. Рассмотрим повторный интеграл

$$\int\limits_G d\,\mu(t)|h(t)| \int\limits_G |f(x \dot{-} t)| d\,\mu(x).$$

Так как подинтегральная функция ≥ 0, то по теореме Фубини–Тонелли существует двойной интеграл, и справедливо равенство

$$\iint\limits_{G^2} |f(x \dot{-} t) h(t)| d\,\mu(t) d\,\mu(x) = \int\limits_G d\,\mu(t)|h(t)| \int\limits_G |f(x \dot{-} t)| d\mu(x).$$

Но тогда $f(x \dot{-} t) h(t) \in L(G^2)$, по теореме Фубини интеграл

$$\int\limits_G f(x \dot{-} t) h(t) d\mu(t)$$

существует при почти всех x и

$$\left| \int\limits_G f d\,\mu(x) \int\limits_G f(x \dot{-} t) h(t) d\mu(t) \right| = \left| \iint\limits_{G^2} f(x \dot{-} t) h(t) d\,\mu(x) d\,\mu(t) \right| \leq$$

$$\le \iint\limits_{G^2} |f(x\dot{-}t)h(t)|d\,\mu_2(x,t) = \int\limits_G |h(t)|d\,\mu(t) \int\limits_G |f(x\dot{-}t)|d\,\mu(x) = ||h||_1 \cdot ||f||_1,$$

и теорема доказана. □

8 Характеры компактной топологической группы

Определение 8.1 *Пусть $(G, \dot{+})$ – компактная топологическая группа. Функция $\chi: G \to \mathbb{C}$ называется характером, если выполняются следующие условия*
1) $\forall\, x \in G,\ |\chi(x)| = 1.$
2) $\chi(x)$ *– непрерывная функция.*
3) $\chi(x\dot{+}y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$

Простейшие свойства:
1) $\chi(0) = 1$.
Доказательство. Положим в равенстве $\chi(x\dot{+}y) = \chi(x)\chi(y)$ $y = 0$. Тогда $\chi(x) = \chi(x) \cdot \chi(0)$. Следовательно, $\chi(0) = 1$.
2) $\chi(\dot{-}x) = \overline{\chi(x)}$.
Доказательство.
Положим $y = \dot{-}x$. Тогда $\chi(0) = \chi(x)\cdot\chi(\dot{-}x)$. Отсюда $\chi(\dot{-}x) = \frac{1}{\chi(x)} = \frac{\overline{\chi(x)}}{1} = \overline{\chi(x)}$. □

Мы будем рассматривать нуль-мерные компактные группы G и через $\mathcal{X}$ будем обозначать совокупность характеров группы G.

Теорема 8.1 *Пусть G – нуль-мерная компактная группа с основной цепочкой подгрупп*

$$G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$$

и пусть χ – характер группы G. Тогда сужение характера χ на подгруппу G_n есть характер подгруппы G_n.

Доказательство. Обозначим $\varphi_n(x)$ – сужение характера χ на G_n. Очевидно, что $\forall\, x, y \in G_n$, $|\varphi_n(x)| = 1$ и $\varphi_n(x\dot{+}y) = \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y)$. Поэтому достаточно доказать только непрерывность. Выбираем точку $x \in G_n$ и пусть $U_\delta(\varphi_n(x))$ – окрестность точки $\varphi_n(x)$. В точке $x \in G_n$, $\varphi_n(x) = \chi(x)$. Поэтому ввиду непрерывности $\chi(x)$ найденный смежный класс $G_m\dot{+}x$, содержащий точку x, такой, что

$$\chi(G_m\dot{+}x) \subset U_\delta(\varphi_n(x)).$$

Но тогда для любого смежного класса $G_{m_1}\dot{+}x$ с $m_1 \geq n$ также

$$\chi(G_{m_1}\dot{+}x) \subset U_\delta(\varphi_n(x)).$$

Следовательно, $\varphi_n(G_{m_1}\dot{+}x) \subset U_\delta(\varphi_n(x))$. $\square$

Теорема 8.2 *Если характер χ_{n+1} определен на группе G_{n+1}, то его можно продолжить до характера на всей группе G.*

Доказательство. Рассмотрим смежные классы $G_{n+1}\dot{+}x_j$, составляющие фактор-группу G_n/G_{n+1}. Так как порядок p_n этой фактор-группы – простое число, то эта группа – циклическая. Поэтому $\forall\, g \in G_n \backslash G_{n+1}$ $(G_{n+1}\dot{+}g)\cdot p_n = G_{n+1}$. Выберем такое g и зафиксируем. В этом случае $g\cdot p_n \in G_{n+1}$, тогда в точке gp_n определен характер χ_{n+1}. Обозначим $\chi_{n+1}(gp_n) = e^{i\alpha}$. Определим функцию χ_n на смежных классах $(G_{n+1}\dot{+}g\cdot j)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, p_n - 1)$ равенством $\chi_n(x\dot{+}g\cdot j) = \chi_{n+1}(x)\cdot e^{\frac{i\alpha}{p_n}j}$.

Очевидно, что $|\chi_n(x\dot{+}gj)| \equiv 1$. Проверим остальные свойства характеров. Пусть $x, y \in G_{n+1}$. Тогда $\chi_n(x\dot{+}y) = \chi_n(x)\cdot\chi_n(y)$ – это очевидно. Пусть x, y принадлежат смежным классам и пусть

$$x = x_{n+1}\dot{+}g\cdot j,$$

$$y = y_{n+1}\dot{+}g\cdot \nu.$$

Тогда $x\dot{+}y = x_{n+1}\dot{+}y_{n+1}\dot{+}g(\nu + j)$.

Если $\nu \neq j < p_n$, то $\chi_n(x\dot{+}y) = \chi_{n+1}(x_{n+1})\cdot\chi_{n+1}(y_{n+1})\cdot e^{i\alpha\frac{\nu+j}{p_n}} = \chi_{n+1}(x_{n+1})\cdot e^{\frac{i\alpha\nu}{p_n}}\cdot\chi_{n+1}(y_{n+1})\cdot e^{\frac{i\alpha j}{p_{n+1}}} = \chi_n(x)\cdot\chi_n(y)$.

Пусть $\nu + j \geq p_n$. Тогда $\nu + j + p_n + \beta$ $(\beta \geq 0)$. Отсюда $x\dot{+}y = x_{n+1}\dot{+}y_{n+1}\dot{+}g\cdot p_n + g\cdot\beta$. Следовательно,

$$\chi_n(x\dot{+}y) = \chi_{n+1}(x_{n+1}\dot{+}y_{n+1} + g\cdot p_n)\cdot e^{i\alpha\cdot\frac{\beta}{p_n}} =$$

$$= \chi_{n+1}(x_{n+1})\cdot\chi_{n+1}(y_{n+1})\cdot\chi_{n+1}(gp_n)\cdot e^{i\alpha\frac{1}{p_n}(1+j-p_n)} =$$

$$= \chi_{n+1}(x_{n+1})e^{i\alpha\frac{j}{p_n}}\chi_{n+1}(y_{n+1})e^{i\alpha\frac{\nu}{p_n}}\cdot e^{i\alpha}\cdot e^{-i\alpha} = \chi_n(x)\cdot\chi_n(y).$$

Непрерывность функции χ_n на группе G_n очевидна.

Таким образом, мы продолжим характер χ_{n+1} с подгруппы G_{n+1} на подгруппу G_n. Продолжая этот процесс, мы получим продолжение характера χ_{n+1} на всю группу G. $\square$

9 Аннуляторы в нуль-мерной компактной группе

Всюду в этом параграфе $(G, \dot{+})$ – произвольна нульмерная компактная группа с основной цепочкой подгрупп (G_n).

Определение 9.1 *Пусть H – подгруппа группы G. Совокупность всех характеров χ группы G таких, что $\chi(x) = 1$ на подгруппе H, называют аннулятором подгруппы H и обозначают $H^\perp$.*

Предложение 9.1 *Аннулятор $H^\perp$ есть группа относительно умножения.*

Доказательство.
1) Если $\chi_1, \chi_2 \in H^\perp$, то $\chi_1 \cdot \chi_2 \in H^\perp$.
2) $\chi(x) \equiv 1 \in H^\perp$ и является единицей группы $H^\perp$.
3) Если $\chi(x) \in H^\perp$, то $\frac{1}{\chi(x)} = 1$ на $H^\perp \Rightarrow \frac{1}{\chi(x)} \in H^\perp$ и $\chi \cdot 1/\chi \equiv 1$. □

Лемма 9.2 *Пусть $\chi(x)$ – характер группы G. Если $\forall\, x \in G \;\; |\chi(x) - 1| < 1$, то $\chi(x) \equiv 1$ на G.*

Доказательство. Предположим, что существует $x \in G$ для которого $\chi(x) \neq 1$ и $|\chi(x) - 1| < 1$. Пусть $\chi(x) = e^{i\alpha}$. Тогда $0 < |\alpha| < \pi/3$. Рассмотрим элемент $x \cdot p$ $(p \in \mathbb{N})$. Для него $\chi(x \cdot p) = (\chi(x))^p = e^{i\alpha p}$. Так как для любого $x \in G$ $|\chi(x) - 1| < 1$, то и $\left|e^{i\alpha p} - 1\right| < 1$, следовательно, $0 < |\alpha p| < \pi/3$. Но выбирая p достаточно большим, мы получим $|\alpha p| > \pi/3$. Полученное противоречие означает, что $\chi(x) = 1$. □

Теорема 9.3 *Любой характер коммутативной нуль-мерной компактной группы принадлежит некоторому аннулятору $G_n^\perp$.*

Доказательство. Пусть χ – характер группы G. Очевидно, что $\chi(0) = 1$. Так как χ непрерывна в нуле, то для $\varepsilon = 1 \;\exists\, G_n,\; \forall\, x \in G_n \;\; |\chi(x) - 1| < 1$. Но тогда по лемме 9.2 $\chi(x) \equiv 1$ на G_n. □

Следствие. $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n^\perp$.

Теорема 9.4 *Любой характер $\chi \in G_n^\perp$ есть функция, постоянная на смежных классах $G_n \dot{+} g \cdot j$ $(j = \overline{0, 1, \ldots, p_n - 1})$*

Доказательство. Пусть $x \in G_n \dot{+} g \cdot j$. Тогда $x = x_n \dot{+} g \cdot j$ $(x_n \in G_n)$. Следовательно, $\chi(x) = \chi(x_n) \cdot (\chi(y))^j = (\chi(g))^j$. □

Лемма 9.5 *$G_n^\perp$ есть группа характеров фактор группы G/G_n.*

Доказательство. Очевидно, что

$$G/G_n = \{G_n \dot{+} g_{n-1}a_{n-1} \dot{+} g_{n-2}a_{n-2} \dot{+} \ldots \dot{+} g_1a_1 \dot{+} g_0a_0 : \ a_j = \overline{0, p_j - 1}\} \quad (9.1)$$

и единицей фактор-группы G/G_n является подгруппа G_n. Поэтому для любого характера χ группы G/G_n имеем $\chi(G_n) = 1$. Это означает, что $\chi \in G_n^{\perp}$. Обратно, пусть $\chi \in G_n^{\perp}$, т.е. $\chi(G_n^{\perp}) = 1$. Из (9.1) следует, что χ есть характер группы G/G_n. $\square$

Лемма 9.6 *Фактор группа $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$ есть группа характеров для фактор группы G_n/G_{n+1}.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 9.5, полагая в ней $G = G_n$, $G_n = G_{n+1}$. Тогда согласно лемме 9.5 группа характеров фактор группы G_n/G_{n+1} совпадает с множеством характеров группы G_n, обращающихся в единицу на G_{n+1}, т.е. совпадает с $G_{n+1}^{\perp}$. Но единицей группы $G_{n+1}^{\perp}$ является $G_n^{\perp}$, и, значит, $G_{n+1}^{\perp} = G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$, т.е. $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$ есть группа характеров для G_n/G_{n+1}. $\square$

Лемма 9.7 *Группы характеров конечной циклической группы изоморфны самой группе.*

Доказательство. Пусть H – конечная циклическая группа порядка n. Ее можно отождествить с группой $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$, операция в которой есть сложение по mod n. Пусть χ – характер группы $\mathbb{Z}(n)$. Тогда $1 = \chi(0) = \chi(n) = \chi(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}) = n\chi(1)$, и, значит, $\chi(1) = e^{\frac{2\pi i}{n}j}$ при некотором j. Отсюда следует, что $\chi(k) = e^{\frac{2\pi i}{n}jk}$. Таким образом, каждый характер определяется значением на элементе 1. Поэтому все характеры χ_j определяются равенствами $\chi_j(k) = e^{\frac{2\pi i}{n}jk}$. $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Каждому характеру χ_j поставим в соответствие число $j \in \mathbb{Z}(n)$. Очевидно, что это взаимно-однозначное соответствие группы характеров (χ_j) на $\mathbb{Z}_p$. Так как $\chi_{j_1+j_2}(k) = \chi_{j_1}(k)\chi_{j_2}(k)$, то оно определяет операцию, т.е. является изоморфизмом. $\square$

Теорема 9.8 *При любом натуральном n $(G_n^{\perp}/G_{n-1}^{\perp})^{\sharp} = p_{n-1}$ и $(G_{n-1}^{\perp})^{\sharp} = m_{n-1}$.*

Доказательство. По лемме 9.6 фактор группа $G_n^{\perp}/G_{n-1}^{\perp}$ есть группа характеров группы G_{n-1}/G_n, и по лемме 9.7 она изоморфна группе G_{n-1}/G_n. Так как $(G_{n-1}/G_n)^{\sharp} = p_{n-1}$, то $(G_n^{\perp}/G_{n-1}^{\perp}) = p_{n-1}$. $\square$
Следствие. Группа характеров компактной нульмерной группы счетна.

10 Ортогональность системы характеров

Теорема 10.1 *Совокупность характеров есть ортонормированная система (ОНС).*

Доказательство. 1) Если $\chi(t)$ – характер группы G, то $\chi(t)\bar{\chi}(t) = 1$, следовательно,

$$\int\limits_G \chi(t)\bar{\chi}(t) = \int\limits_G 1 = \mu G = 1.$$

2) Пусть $\chi(t) \not\equiv 1$. Выберем число $h \in G$, так, чтобы $\chi(h) \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_G \chi(t) \cdot 1 d\,\mu = \int\limits_G \chi(t \dot{+} h) d\,\mu(t) = \int\limits_G \chi(t)\chi(h) d\,\mu(t) = \chi(h) \cdot \int\limits_G \chi(t) d\,\mu \Rightarrow$$

$$\int\limits_G \chi(t) d\,\mu = 1.$$

3) Пусть $\chi_n \neq \chi_m$ – два различных характера. Тогда существует $h \in G$, что $\chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) \neq 1$. В самом деле, если $\forall\, h \in G,\ \chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) = 1$, то $\chi_n(h) \cdot 1 = \chi_m(h)$, что невозможно. Для такого $h \in G$ имеем

$$\int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x) d\,\mu = \int\limits_G \chi_n(x \dot{+} h) \cdot \bar{\chi}_m(x \dot{+} h) d\,\mu(x) =$$

$$\int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x) \cdot \chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) d\,\mu(x) = \chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) \cdot \int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x) d\,\mu(x),$$

отсюда $\int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x) d\,\mu = 0.$ □

11 Функции Радемахера, нумерация Пэли системы характеров

Определение 11.1 *Пусть* $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots$ *основная цепочка подгрупп, и пусть*

$$G^{\perp} = G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \ldots \subset G_n^{\perp} \subset G_{n+1}^{\perp} \subset \ldots$$

возрастающая последовательность аннуляторов. При каждом натуральном n *выберем характер* $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \backslash G_n^{\perp}$ *и зафиксируем эту последовательность. Систему* $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ *будем называть системой Радемахера, а каждую функцию* $r_n(x)$ *– функцией Радемахера.*

Теорема 11.1 *Любой характер $\chi \in \mathcal{X}$ можно представить в виде*

$$\chi = (r_0(x))^{a_0}(r_1(x))^{a_1}\dots(r_n(x))^{a_n}(a_j = \overline{0, p_j - 1}). \qquad (11.1)$$

Доказательство. Если $\chi(x) \equiv 1$, то равенство (11.1) справедливо при $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Пусть $\chi(x) \not\equiv 1$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, что $\chi(x) \in G_{n+1}^{\perp} \backslash G_n^{\perp}$. Рассмотрим фактор-группу $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$. Она имеет простой порядок p_n и, значит, является циклической, и, значит, смежные классы имеют вид $G_n^{\perp} \cdot (r_n(x))^{a_n}$ $(a_n = 0, 1, \dots, p_n - 1)$, и т.к. $\chi(x) \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$, то $\chi(x) = \varphi_n(x) \cdot (r_n(x))^{a_n}$, где $\varphi_n \in G_n^{\perp}$. Если $\varphi_n \in G_{n-1}^{\perp}$, то переобозначаем $\varphi_{n-1} := \varphi_n$ и тогда $\chi(x) = \varphi_{n-1}(x) \cdot (r_{n-1}(x))^0 \cdot r_n(x)^{a_n}$.

Если $\varphi_n \in G_n^{\perp} \setminus G_{n-1}^{\perp}$, то, аналогично предыдущему,

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) \cdot (r_{n-1}(x))^{a_{n-1}} \;\; a_{n-1} = \overline{1, p_{n-1} - 1}.$$

Таким образом

$$\chi(x) = \varphi_{n-1}(x) \cdot r_{n-1}(x)^{a_{n-1}}(r_n(x))^{a_n}.$$

Продолжая этот процесс, получаем, что

$$\chi(x) = (r_0(x))^{a_0}(r_1(x))^{a_1}\dots(r_n(x))^{a_n} \;\; (a_j = \overline{0, p_j - 1}). \;\; \square$$

Определение 11.2 *Поставим в соответствие характеру $\chi(x)$, представленному в виде (11.1), число $m = a_0m_0 + a_1m_1 + \dots + a_nm_n$ $(a_j = \overline{0, p_j - 1})$. Получим занумерованную систему характеров $\chi_m(x)$. Систему характеров в такой нумерации будем называть системой в нумерации Пэли.*

12 Ряд Фурье по системе характеров, ядро Дирихле

Определение 12.1 *Пусть $f \in L(G)$. Последовательность $(\hat{f}_n)_{n=0}^{\infty}$, определенную равенствами $\hat{f}_n = \int\limits_G f(x)\bar{\chi}_n(x)d\,\mu(x)$, называют преобразованием Фурье функции f. Числа $\hat{f}_n$ называют коэффициентами Фурье. Ряд*

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n \chi_n(x)$$

называют рядом Фурье. Сумма $S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k \chi_k(x)$ называется частной суммой ряда Фурье.

Определение 12.2 *Положим по определению*

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$$

и назовем ядром Дирихле.

Теорема 12.1 *Если $f \in L(G)$, то справедливо равенство*

$$S_n(f,x) = \int\limits_G f(x\dot{-}t) D_n(t) d\,\mu(t) = \int\limits_G f(t) D_n(x\dot{-}t) d\,\mu(t).$$

Доказательство. Будем вычислять интеграл

$$\int\limits_G f(t) D_n(x\dot{-}t) d\,\mu(t) = \int\limits_G f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \chi(x\dot{-}t) d\,\mu(t).$$

Так как $\chi_k(x\dot{-}t) = \chi_k(x) \cdot \bar{\chi}_k(t)$, то

$$\int\limits_G f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k \chi_k(x\dot{-}t) d\,\mu(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) \cdot \int\limits_G f(t) \bar{\chi}_k(t) d\,\mu(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) \hat{f}_k = S_n(f,x). \ \square$$

Теорема 12.2 *Справедливо равенство*

$$D_{m_n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left((r_k(x))^0 + (r_k(x))^1 + (r_k(x))^2 + \ldots + (r_k(x))^{p_k - 1} \right). \quad (12.1)$$

Доказательство. По определению

$$D_{m_n}(x) = \sum_{k=0}^{m_n - 1} \chi_k(x). \quad (12.2)$$

Но $\chi_k(x) = (r_0(x))^{a_0} (r_1(x))^{a_1} \ldots + (r_{n-1}(x))^{a_n - 1}$, когда $k \in [0, m_n - 1]$. Поэтому в сумме (12.2) присутствуют всевозможные произведения

$$(r_0(x))^{a_0} (r_1(x))^{a_1} \ldots + (r_{n-1}(x))^{a_n - 1} \ \ (a_j = \overline{0, p_j - 1}) \quad (12.3)$$

Но в правой части (12.1) тоже присутствуют всевозможные произведения вида (12.3). Это означает, что равенство (12.1) справедливо. $\square$

Лемма 12.3 *Функции $r_k(x)$ на смежных классах $G_{k+1}\dot{+}g_j$ $(g_j \in G_k)$ принимают постоянные значения, которые есть различные корни из единицы степени p_k.*

Доказательство. Так как $r_k \in G_{k+1}^{\perp} \setminus G_k^{\perp}$, то r_k принимает постоянные значения на каждом смежном классе $G_{k+1}\dot{+}g_j$. Выберем один из смежных классов: $G_{k+1}\dot{+}g_j$. Так как порядок фактор-группы G_k/G_{k+1} равен p_k, то $(G_{k+1}\dot{+}g_j)\cdot p_k = G_{k+1}$ и, значит,

$$1 = r_k(t_{k+1}) = (r_k(G_{k+1}\dot{+}g_j))^{p_k},$$

т.е. $r_k(G_{k+1}\dot{+}g_j)$ есть корень из 1 порядка p_k. Так как p_k – простые, то группа G_k/G_{k+1} – циклическая, и, значит, при фиксированном $g_j \in G_k \setminus G_{k+1}$ множества $(G_{k+1}\dot{+}g_j)^a$ $(a = 1, 2, \ldots, p_k)$ есть все смежные классы, образующие фактор-группу G_k/G_{k+1} и, значит, числа $r_k(G_{k+1}\dot{+}g_j)^a$ $(a = 1, 2, \ldots, p_k)$ есть различные корни из 1 степени p_k. $\square$

Лемма 12.4 *Если $x \in G_k \setminus G_{k+1}$, то $r_k^0(x)+r_k^1(x)+r_k^2(x)+\ldots+r_k^{p_k-1}(x) = 0$.*

Доказательство. Так как x принадлежит одному из смежных классов $G_{k+1}\dot{+}g_j$, то по лемме 12.3 числа $r_k^0(x), r_k^1(x), r_k^2(x), \ldots, r_k^{p_k-1}(x)$ есть различные корни из 1. Тогда $\sum\limits_{j=0}^{p_k-1}(r_k(x))^j = 0$. $\square$

Лемма 12.5 *1)* $\int\limits_{G_k} r_k(x)d\,\mu(x) = 0.$

2) Для любого смежного класса $G_k\dot{+}g_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m_k)$

$$\int\limits_{G_k\dot{+}g_j} r_k(x)d\,\mu(x) = 0.$$

Доказательство. 1)

$$\int\limits_{G_k} r_k(x)d\,\mu(x) = \sum_{j=1}^{p_k}\int\limits_{G_k\dot{+}g_j} r_k(x)d\,\mu(x) = \sum_{j=1}^{p_k} r_k(G_k\dot{+}g_j)\cdot\mu G_k =$$

$$= \mu(G_k)\cdot\sum_{j=1}^{p_k} r_k(G_k\dot{+}g_j).$$

Но по лемме 12.3 числа $r_k(G_k\dot{+}g_j)$ образуют множество всех корней из 1 степени p_k, и т.к. p_k – простые, то $\sum\limits_{j=1}^{p_k} r_k(G_k\dot{+}g_j) = 0$.

2) $\int\limits_{G_k\dot{+}g_j} r_k(x)d\,\mu(x) = \int\limits_G r_k(x)\cdot \mathbf{1}_{G_k\dot{+}g_j}(x)d\,\mu(x)$, где $\mathbf{1}_{G_k\dot{+}g_j}(x)$ есть характеристическая функция множества $G_k\dot{+}g_j$. По свойству инвариантности интеграла

$$\int\limits_G r_k(x)\cdot \mathbf{1}_{G_k\dot{+}g_j}(x)d\,\mu(x) = \int\limits_G r_k(x\dot{+}g_j)\cdot \mathbf{1}_{G_k+g_j}(x\dot{+}g_j)d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G r_k(x\dot{+}g_j)\cdot \mathbf{1}_{G_k}(x)d\,\mu(x) = r_k(g_j)\int\limits_G r_k(x)\cdot \mathbf{1}_{G_k}(x)d\,\mu(x) =$$

$$= r_k(g_j)\int\limits_{G_k} r_k(x)d\,\mu(x) = 0$$

по первой части леммы. □

Теорема 12.6 (Лемма Пэли)

$$D_{m_n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(r_k(x)^0 + r_k(x)^1 + \ldots + r_k(x)^{p_k-1}).$$

Доказательство. По лемме 12.4

$$r_k(x)^0 + r_k(x)^1 + \ldots + r_k(x)^{p_k-1} = \begin{cases} p_k, & x\in G_1 \\ 0, & x\notin G_0\setminus G_1 \end{cases} = p_k\cdot \mathbf{1}_{G_1}(x).$$

Вообще при любом k

$$r_k(x)^0 + r_k(x)^1 + \ldots + r_k(x)^{p_k-1} = \begin{cases} p_k, & x\in G_{k+1} \\ 0, & x\notin G_k\setminus G_{k+1} \end{cases} = p_k\cdot \mathbf{1}_{G_{k+1}}(x).$$

Но тогда

$$\prod_{k=0}^{n-1}(r_k(x)^0 + r_k(x)^1 + \ldots + r_k(x)^{p_k-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} p_k\cdot \mathbf{1}_{G_{k+1}} = \begin{cases} p_0p_1\ldots p_{n-1} & x\in G_k \\ 0, & x\notin G_n. \end{cases}$$

□

13 Сходимость частичных сумм с номерами m_n

Теорема 13.1 *Если $f\in C_G$, то частичные суммы $S_{m_n}(f)$ сходятся равномерно к f.*

Доказательство. Частичные суммы $S_{m_n}(f)$ имеют вид

$$S_{m_n}(f) = \int\limits_G f(t) D_{m_n}(x \dot{-} t) d\,\mu(t) = m_n^{-1} \int\limits_G f(t) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} t) d\,\mu(t).$$

Но $x \dot{-} t \in G_n \dot{+} x \Leftrightarrow t \in G_m$. Тогда

$$\int\limits_G f(t) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} t) d\,\mu(t) = \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t) d\,\mu(t).$$

Таким образом, $S_{m_n}(f,x) = m_n^{-1} \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t) d\mu(t)$.

Но $f(x) = m_n^{-1} \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t) d\mu(t)$. Следовательно,

$$|S_{m_n}(f,x) - f(x)| = m_n^{-1} \left| \int\limits_{G_n \dot{+} x} (f(t) - f(x)) d\mu(t) \right| \le m_n^{-1} \int\limits_{G_n \dot{+} x} |f(t) - f(x)| d\mu(t).$$

Т.к. f непрерывна, то f равномерно непрерывна, значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, n_0,\ \forall\, n \ge n_0,\ \forall\, t, x \in G_n \dot{+} y \ \ |f(x) - f(t)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|S_{m_n}(f,x) - f(x)| \le \frac{1}{m_n} \cdot \varepsilon \cdot \int\limits_{G_n \dot{+} x} d\,\mu(t) = m_n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{m_n} = \varepsilon. \ \square$$

14 Замкнутость системы характеров в L_2

Теорема 14.1 *Система характеров (χ_n) замкнута в пространстве L_2.*

Доказательство. Достаточно доказать, что система (χ_n) полна относительно L_2. Пусть $f \in L_2$ такая, что $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$

$$\hat{f}_n = \int\limits_G f(x) \bar{\chi}_n(x) d\,\mu(x) = 0.$$

Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$

$$S_{m_n}(f,x) = \sum_{k=0}^{m_n - 1} \hat{f}_k \cdot \bar{\chi}_k(x) d\,\mu = 0.$$

Но $S_{m_n}(f,x)=\frac{1}{m_n}\int\limits_{G_n\dot{+}x} f(t)d\,\mu(t)$.

Рассмотрим f и χ_k не на G, а на $[0,1]$, при отображении $\varphi:\ G\overset{\text{на}}{\to}[0,1]$ сохраняется мера и каждый смежный класс $G_n\dot{+}x$ переходит в отрезок $\left[\frac{j}{m_n},\frac{j+1}{m_n}\right]$. Поэтому, если рассматривать $S_{m_n}(f,n)$ на отрезке $[0,1]$, то получаем, что

$$\pm\int\limits_0^{\frac{j}{m_n}} f d\,\mu=0.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^y f(x)d\,\mu(x)=0$ всех? p-ично рациональных точках. Но $\int\limits_0^y f(x)d\,\mu(x)$ есть непрерывная функция своего верхнего предела, тогда $\int\limits_0^y f(x)d\,\mu(x)\equiv 0$ на $[0,1]$, значит, п.вс. на $[0,1]$ $\frac{d}{dy}\int\limits_0^y f(x)d\,\mu(x)=0$, значит, п.вс. на $[0,1]$ $f(y)=0$. Отсюда п.вс. на G $f=0$.$\square$

15 Система Хаара на нуль-мерной компактной группе

Пусть $(G,\dot{+})$ компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп
$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_n\supset G_{n+1}\supset\ldots,$$
где $(G_n/G_{n+1})^\sharp=p_n$ – простые числа,
$$\{1\}=G^\perp\subset G_0^\perp\subset G_1^\perp\subset\ldots\subset G_n^\perp\subset G_{n+1}^\perp\subset\ldots$$
возрастающая последовательность аннуляторов. Мы знаем, что $(G_{n+1}^\perp/G_n^\perp)^\sharp=p_n$. Пусть далее $g_n\in G_n\setminus G_{n+1})$ – базисная система, $r_n\in G_{n+1}^\perp\setminus G_n^\perp$ – функции Радемахера.

Определим функции Хаара, нормированные в $C(G)$ следующим образом
$\chi_0(x)\equiv 1$.

$$\chi_{jm_n+k}(x)=r_n(x)^j(x\dot{-}q)\mathbf{1}_{G_n}(x\dot{-}q),\ j=\overline{1,p_n-1},k=\overline{0,m_n-1}$$
причем число k и элемент q связаны соотношениями
$$k=a_{n-1}m_{n-1}+a_{n-2}m_{n-2}+\ldots+a_0m_0;\ q=a_{n-1}g_{n-1}\dot{+}a_{n-2}g_{n-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_0g_0$$
т.е. если $x=y\dot{+}a_{n-1}g_{n-1}\dot{+}\ldots\dot{+}a_0g_0$, где $y\in G_n$, то $\chi_{jm_n+k}(x)=\chi_{jm_n}(y)$ и $\chi_{jm_n+k}=0$ в противном случае.

Теорема 15.1 *Система функций* $(1, H_{jm_n+k})$ *ортогональна на* G.

Доказательство. 1) Покажем, что

$$\int_G H_{jm_n+k}(x)\cdot 1d\,\mu(x)=0.$$

По определению

$$\int_G H_{jm_n+k}(x)d\,\mu(x)=\int_{G_n\dot{+}q} r_n^j(x\dot{-}q)d\mu(x)=\int_{G_n} r_n^j(x)d\mu(x)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\int_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_k} r_n^j(x)d\mu(x)=\sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n^j(G_{n+1}\dot{+}\nu g_n)\int_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\,\mu=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n^{j\nu}(g_n)\cdot\mu G_{n+1}=\frac{1}{m_{n+1}}\sum_{\nu=0}^{p_n-1}(r_n^j(g_n))^\nu=0.$$

2) Покажем, что

$$\int_G H_{j_1m_n+k}(x)\bar{H}_{j_2m_n+k}(x)d\,\mu(x)=0\ \text{ при }\ j_1\neq j_2.$$

Пусть для определенности $j_1>j_2$, т.е. $j_1=j_2+l,\ l\geq 1$.
Тогда

$$\int_G H_{j_1m_n+k}(x)\bar{H}_{j_2m_n+k}(x)d\,\mu(x)=\int_{G_n\dot{+}q} r_n^{j_1}(x\dot{-}q)\bar{r}_n^{j_2}(x\dot{-}q)d\mu(x)=$$

$$=\int_{G_n\dot{+}q} r_n^l(x\dot{-}q)r_n^{j_2}(x\dot{-}q)\bar{r}_n^{j_2}(x\dot{-}q)d\mu(x)=\int_{G_n\dot{+}q} r_n^l(x\dot{-}q)d\,\mu(x)=0.$$

3) Если $k_1\neq k_2$, то

$$\int_G H_{j_1m_n+k_1}(x)\bar{H}_{j_1m_n+k_2}(x)d\,\mu(x)=0,$$

т.к. носители функций $H_{j_1m_n+k_1}(x)$ и $H_{j_1m_n+k_2}(x)$ не пересекаются.
4) Покажем, что при $n\neq N$

$$\int_G H_{j_1m_n+k_1}(x)\bar{H}_{j_2m_N+k_2}(x)d\,\mu(x)=0 \tag{15.1}$$

Пусть для определенности $N > n$. Если носители функций $H_{j_1 m_n+k_1}(x)$ и $H_{j_1 m_N+k_2}(x)$ не пересекаются, то равенство (15.1) очевидно выполняется. В противном случае

$$\mathrm{supp} H_{j_2 m_N+k_2} \subset \mathrm{supp} H_{j_1 m_n+k_1}.$$

Но тогда

$$\int\limits_G H_{j_1 m_n+k_1}(x)\bar{H}_{j_2 m_N+k_2}(x)d\,\mu(x) = \int\limits_{G_n \dot{+} q_1} r_n^{j_1}(x\dot{-}q_1)\bar{H}_{j_2 m_N+k_2}(x)d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_N \dot{+} q_2} r_n^{j_1}(x\dot{-}q_1)\bar{r}_N^{j_2}(x\dot{-}q_2)d\,\mu(x) =$$

положим $x\dot{-}q_2 = z$

$$= r_n^{j_1}(G_N \dot{+} q_2 \dot{-} q_1)\int\limits_{G_N} \bar{r}_N^{j_2}(z)d\,\mu(z) = 0. \ \Box$$

Следствие. Система функций $(H_0, \sqrt{m_n}H_{jm_n+k})$ ортонормирована на G.

Теорема 15.2 *Любая функция, постоянная на смежных классах* $G_{N+1}\dot{+}g$, *есть линейная комбинация функций Хаара* H_0, H_{jm_n+k} $(0 \le n \le N;\ j = \overline{1, p_n - 1}; k = \overline{0, m_n - 1})$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}_{m_{N+1}}$ пространство функций, постоянных на смежных классах $G_{N+1} + g$. Функции $1_{G_{N+1}+g}(x)$ образуют ортонормированный базис этого пространства. Поэтому размерность пространства $\mathcal{L}_{m_{N+1}}$ равна m_{N+1}. Функции системы $(H_0, H_{jm_n+k})_{n=0}^{N}{}_{j=1}^{p_n-1}{}_{k=0}^{m_n-1}$ образуют ортогональную систему, принадлежащую $\mathcal{L}_{m_{N+1}}$, и количество функций в этой системе равно

$$1 + \sum_{n=0}^{N}(p_n - 1)m_n = m_{N+1},$$

т.е. системы $(1, H_{jm_n+k})_{n=0}^{N}$ есть базис пространства $\mathcal{L}_{m_{N+1}}$. $\Box$

Лемма 15.3 *Обозначим через* $\tilde{H}_{jm_n+k}$ *функции Наара, нормированные в* $L_2(G)$, *т.е.* $\tilde{H}_{jm_n+k} = \sqrt{m_n}H_{jm_n+k}$. *Пусть*

$$S_{m_{n+1}}(f, x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1}(f, \chi_k)\chi_k(x)$$

частичные суммы ряда Фурье по системе характеров $(\chi_k)_{k=0}^{\infty}$ *и*

$$\sigma_{m_{n+1}}(f,x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} (f,\tilde{H}_k)\tilde{H}_k(x)$$

частичные суммы ряда Фурье по системе Хаара. Тогда

$$S_{m_{n+1}}(f,x) = \sigma_{m_{n+1}}(f,x).$$

Доказательство. Так как функции Хаара $(H_k(x))_{k=0}^{m_{n+1}-1}$ образуют базис пространства $\mathcal{L}_{m_{n+1}}$, то любая функция $\chi_k(x)$ есть линейная комбинация

$$\chi_k(x) = \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j}\tilde{H}_j(x).$$

Матрица $(c_{k,j})_{k,j=0}^{m_{n+1}-1}$ в этом случае является ортогональной по строчкам и столбцам, т.е.

$$\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j}\bar{c}_{k,l} = \delta_{j,l}, \quad \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j}\bar{c}_{l,j} = \delta_{k,l}.$$

Поэтому

$$S_{m_{n+1}}(f,x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} (f,\chi_k)\chi_k = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \left(f, \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j}\tilde{H}_j(x)\right)\cdot \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,l}\tilde{H}_l(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1}\sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,l}\bar{c}_{k,j}(f,\tilde{H}_j)\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} (f,\tilde{H}_j) \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,l}\bar{c}_{k,j} = \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} (f,\tilde{H}_j)\cdot\delta_{l,j} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l\cdot(f,\tilde{H}_l). \ \Box$$

Теорема 15.4 *Пусть* G *– компактная нуль-мерная группа и пусть последовательность* (p_n) *ограничена. Тогда ряд Фурье–Хаара любой непрерывной на* G *функции* f *сходится равномерно.*

Доказательство. 1) Пусть $\sigma_n(f,x) = \sum\limits_{l=0}^{n-1}(f,\tilde{H}_l)\tilde{H}_l(x)$ частичные суммы по системе Хаара. По лемме 15.3 частичные суммы $\sigma_{m_n}(f,x)$ совпадают с частичными суммами $S_{m_n}(f,x)$ по системе характеров $(\chi_k)_{k=0}^{\infty}$ и по теореме 14.1 $S_{m_n}(f,x) \overset{\to}{\to} f(x)$ на G. Следовательно, $\sigma_{m_n}(f,x) \overset{\to}{\to} f(x)$ на G.
2) Покажем, что для коэффициентов Фурье–Хаара $(f,\tilde{H}_{jm_n+k})$ справедливо неравенство

$$|(f,\tilde{H}_{jm_n+k})| \le \sqrt{m_n}\omega_n(f).$$

В самом деле

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}|(f,\tilde{H}_{jm_n+k})| = |(f,H_{jm_n+k})| = \left|\int\limits_{G_n \dot{+} q} f(x)\bar{r}_n^j(x \dot{-} q)\,d\,\mu(x)\right| =$$

$$\left|\int\limits_{G_n} f(y \dot{+} q)\bar{r}_n^j(y)\,d\,\mu(y)\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y \dot{+} q)\bar{r}_n^j(y)\,d\,\mu(y)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n^{j\nu}(g_n)\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y \dot{+} q)\,d\,\mu(y)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n^{j\nu}(g_n)\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n}(f(y \dot{+} q) - f(g_n \dot{+} q))\,d\,\mu(y) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{p_n-1}\bar{r}_n^{j\nu}(g_n)f(g_n \dot{+} q)\cdot m_{n+1}\right| \le p_n \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \cdot \omega_n(f) = \frac{1}{m_n}\cdot\omega_n(f).$$

Напомним, что модуль непрерывности функции, определенной на компактной нуль-мерной группе G определяется равенством

$$\omega_n(f) = \sup_{x \dot{-} y \in G_n}|f(x) - f(y)|.$$

В терминах модуля непрерывности можно получить оценки коэффициентов Фурье–Хаара.

Теорема 15.5 *Пусть f ограничена на G. Тогда*

$$|(\tilde{H}_{jm_n+k}, f)| \le \omega_n(f)\frac{1}{\sqrt{m_n}}.$$

Доказательство. По определению функций Хаара

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(\tilde{H}_{jm_n+k}, f) = \int\limits_G f(x)\bar{H}_{jm_n+k}(x)d\,\mu(x) = \int\limits_{G_n\dot{+}q} f(x)r_n^j(x\dot{-}q)d\,\mu(x).$$

Выполняя замену переменных $x\dot{-}q = y$ и учитывая инвариантность интеграла, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f, \tilde{H}_{jm_n+k}) = \int\limits_{G_n} f(y\dot{+}q)r_n^j(y)d\,\mu(y) = \sum_{\nu=0}^{p_n-1} \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y\dot{+}q)r_n^j(y)d\,\mu(y).$$

Каждая функция Радемахера постоянна на смежных классах $G_{n+1}\dot{+}\nu g_n$, и эти значения равны

$$r_n(G_n\dot{+}\nu g_n) = r_n(g_n)^\nu.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f, \tilde{H}_{jm_n+k}) = \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{\nu_j} \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y\dot{+}q)d\,\mu(y) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{\nu_j} \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} (f(y\dot{+}q) - f(g_n))d\,\mu(y) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{\nu_j} f(g_n) \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\,\mu(y). \qquad (15.2)$$

Так как p_n простые и $\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\,\mu(y) = \mu G_{n+1} = \frac{1}{m_{n+1}}$, то

$$\sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{\nu_j} f(g_n) \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\,\mu(y) = \frac{f(g_n)}{m_{n+1}} \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{\nu_j} = 0.$$

Поэтому из (15.2) находим

$$\left|\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f, \tilde{H}_{jm_n+k})\right| \le \frac{\omega_n(f)}{m_{n+1}} \cdot p_n = \frac{\omega_n(f)}{m_n}. \ \square$$

Теорема 15.6 *Если f непрерывна на G и $\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{p_n}\right)$, то ряд Фурье–Хаара на G сходится равномерно.*

Доказательство. Запишем частичные суммы $\sigma_l(f,x)$ при $m_n \le l < m_{n+1}$ с учетом леммы 15.3? в виде

$$\sigma_l(f,x) = \sigma_{jm_n+k}(f,x) = \sum_{\nu=m_n}^{l} (f,\tilde{H}_\nu)\cdot\tilde{H}_\nu(x) + \sigma_{m_n}(f,x) =$$

$$= S_{m_n}(f,x) + \sum_{\nu=m_n}^{l} (f,\tilde{H}_\nu)\cdot\tilde{H}_\nu(x),$$

где $S_{m_n}(f,x)$ частичные суммы ряда Фурье по системе характеров. По теореме 7.3 $S_{m_n}(f,x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f(x)$ на G. Поэтому достаточно доказать, что

$$S_l - S_{m_n} = \sum_{\nu=m_n}^{l} (f,\tilde{H}_\nu)\cdot\tilde{H}_\nu(x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 0$$

на G. При каждом фиксированном x в сумме $S_l - S_{m_n}$ содержится не более $p_n - 1$ отличных от нуля слагаемых. Поэтому с учетом теоремы 15.4

$$|S_l - S_{m_n}| \le (p_n - 1)\frac{\omega_n(f)}{\sqrt{m_n}}\cdot\sqrt{m_n} \le p_n\omega_n(f) \to 0. \ \square$$

Глава 3

Задачи

Тема 1. Группы.

1) Доказать, что множество $\mathbb{C}_p$ корней из 1 степени p есть группа относительно умножения.

2) Доказать, что множество $Z_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ вычетов по модулю p есть группа относительно операции $m \oplus n = (m+n) \bmod p$.

3) Доказать, что группы $\mathbb{C}_p$ и Z_p изоморфны.

4) Пусть G – множество бесконечных последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_j = \overline{0, p-1}$ (p-простое), и операция сложения определена как покоординатное сложение по модулю p, т.е.

$$x \oplus y = (x_j \oplus y_j)_{j=0}^{\infty}, \;\; x_j \oplus y_j = (x_j + y_j) \bmod p.$$

Доказать, что G – группа.

5) Пусть $P = (p_j)_{j=0}^{\infty}$ – последовательность простых чисел. G – множество бесконечных последовательностей $x = (x_0, x_1 \ldots, x_n, \ldots)$ с операцией

$$x \oplus y = (x_j \oplus y_j)_{j=0}^{\infty}, \;\; x_j \oplus y_j = (x_j + y_j) \bmod p_j.$$

Доказать, что G – группа.

6) Пусть $\mathbb{Z}_p$ – совокупность бесконечных последовательностей $x = (x_j)_{j=0}^{\infty}$, $x_j = \overline{0, p-1}$, p – простое. Пусть операция $\dot{+}$ в $\mathbb{Z}_p$ есть операция покоординатного сложения по модулю p с переносом 1 в следующий разряд направо. Доказать, что $\mathbb{Z}_p$ – группа. $\mathbb{Z}_p$ называется кольцом целых p-адических чисел.

7) В группе $\mathbb{Z}_p$ написать алгоритм нахождения обратного элемента.

8) Доказать, что в группе единичный и обратный элементы – единственны.

9) Доказать, что сумма корней из 1 степени p равна нулю.

10) Доказать, что если p – простое, то группа $\mathbb{C}_p$ – циклическая.

11) Пусть $p = p_1 \cdot p_2$, где p_1 и p_2 – простые. Найти ее подгруппы.

12) Пусть $p = p_1 \cdot p_2$, где p_1 и p_2 – простые. Найти $\mathbb{C}_p / \mathbb{C}_{p_1}$ и $\mathbb{C}_p / \mathbb{C}_{p_2}$.

13) Пусть G – группа Виленкина с образующей последовательностью $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ и пусть $m_0 = 1$, $m_{n+1} = p_n \cdot m_n$. Определим отображение φ равенством: $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{m_{n+1}}$, если $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Доказать, что

а) $\varphi(x) \in [0,1]$.

б) $\varphi: \ G \overset{\text{на}}{\to} [0,1]$.

в) взаимная однозначность функции φ нарушается в p-ично-рациональных точках, т.е. если

$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, p_{n+1^{-1}}, p_{n+2^{-1}}, \ldots)$, $x_n \neq p_n - 1$

$y = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1, 0_{n+1}, 0_{n+2}, \ldots)$,

то $\varphi(x) = \varphi(y)$.

г) Если хотя бы одно из чисел $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ не является p-ично-рациональным и $x \neq y$, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Тема 2. Топологические группы.

1) Пусть G – группа Виленкина, порожденная последовательностью $P = (p_n)_{n=0}^{\infty}$ и пусть $G_n = \{x = (0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots) : \ x_j = \overline{0, p_j - 1}\}$

$G_{n,\mathbf{j}} = G_n \oplus (j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, 0_n, 0_{n+1}, \ldots)$, $\mathbf{j} = (j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, 0_n, 0_{n+1}, \ldots)$.

а) Доказать, что множества G_n образуют подгруппы и $G_{n+1} \subset G_n$.

б) Доказать, что множества $G_{n,\mathbf{j}}$ образуют базу топологии.

в) Доказать, что

$$G = \bigsqcup_{\mathbf{j}} G_{n,\mathbf{j}}.$$

г) Доказать в этой топологии, что множества G_n одновременно открыты и замкнуты.

д) Доказать, что множество G – компактно.

2) Пусть $\mathbb{Z}_p$ – группа целых p-адических чисел. Множества G_n и $G_{n,\mathbf{j}}$ – те же, что и в группе Виленкина. Доказать выполнение свойств а)–д) как и в группе Виленкина.

а) Доказать, что множества G_n образуют подгруппы и $G_{n+1} \subset G_n$.

б) Доказать, что множества $G_{n,\mathbf{j}}$ образуют базу топологии.

в) Доказать, что

$$G = \bigsqcup_{\mathbf{j}} G_{n,\mathbf{j}}.$$

г) Доказать в этой топологии, что множества G_n одновременно открыты и замкнуты.

д) Доказать, что множество G – компактно.

3) Доказать, что в группе Виленкина и в $\mathbb{Z}_p$ равенство

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{если } x, y \in G_{n,\mathbf{j}} \text{ и } x, y \notin \text{ одному классу } G_{n+1,\mathbf{j}} \\ 0, & x = y \end{cases}$$

определяет неархимедову норму.

Тема 3. Функции на нульмерных группах.

1) Пусть $A_{n\times n} = (a_{i,j})$ – квадратная матрица из комплексных чисел. Доказать, что если ее строки ортогональны и нормированы, то ее столбцы тоже ортогональны и нормированы. Такую матрицу называют унитарной.
2) Доказать, что если A – унитарная матрица, то обратная A^{-1} совпадает с транспонированно-сопряженной, т.е. $A^{-1} = (a_{i,j})^T$.
3) Пусть $(\varepsilon_j)_{j=0}^{p-1}$ – все корни из 1 степени p, p – простое. Доказать, что если $j \neq 0$, то $(\varepsilon_j^k)_{j=0}^{p-1}$ – тоже все корни из 1.
4) Рассмотрим матрицу

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_0^0 & \varepsilon_0^1 & \varepsilon_0^2 & \dots & \varepsilon_0^{p-1} \\ \varepsilon_1^0 & \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{p-1}^0 & \varepsilon_{p-1}^1 & \varepsilon_{p-1}^2 & \dots & \varepsilon_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix},$$

где ε_j – корни из 1 степени p. Доказать, что
а) строки матрицы E ортогональны,
б) найти обратную матрицу E^{-1}.
4) Рассмотрим функции
$\varphi_j(x)$ $(j = 0, 1, \dots, p-1)$, определенные на $[0,1]$ следующим образом: $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_j(x) = \varepsilon_j^\nu$ при $x \in \left[\frac{\nu-1}{p}, \frac{\nu}{p}\right) = \Delta_\nu^{(p)}$ $(\nu = 1, 2, \dots, p-1)$.
Доказать, что функции φ_j образуют базис в пространстве $\mathcal{D}_p([0,1])$, где $\mathcal{D}_p([0,1])$ – совокупность функций кусочно-постоянных на $\Delta_\nu^{(p)}$.
5) Найти сумму $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \varphi_j(x)$.
6) Доказать, что система $(\varphi_j)_{j=0}^{p-1}$ – ортонормированная система на $[0,1)$.
7) Найти коэффициенты Фурье функции $f \in \mathcal{D}_p([0,1])$ по системе $(\varphi_j)_{j=0}^{p-1}$.

Глава 4

Анализ на локально компактных нуль-мерных группах

1 Локально компактные нуль-мерные группы

Определение 1.1 *Топологическая группа называется локально компактной, если она имеет компактную окрестность нуля.*

Определение 1.2 *Локально компактная топологическая группа G называется нуль-мерной, если существует бесконечная в обе стороны последовательность вложенных подгрупп*

$$\ldots \supset G_{-n} \supset \ldots \supset G_{-2} \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots$$

которая порождает базу топологии в этой группе и такая, что $\cap G_n = \{0\}$, $\cup G_n = G$.

Так же как и в случае компактной группы можно с использованием теории Силова уплотнить эту цепочку подгрупп так, что порядки p_n $(n \in \mathbb{Z})$ фактор-групп G_n/G_{n+1} есть простые числа. Положим $m_0 = 1$ и определим числа $m_{n+1} = p_n m_n$. $(n \in \mathbb{Z})$. Т.е. $m_1 = m_0 p_0 = p_0,\ m_2 = m_1 p_1 = p_0 p_1, \ldots$, $m_{n+1} = p_0 p_1 \ldots p_n$ при натуральном n. С другой стороны, $m_0 = m_{-1+1} = p_{-1} m$. Тогда $m = \frac{1}{p_{-1}}$, $m_{-2+1} = m_{-1} = p_{-2} m_{-2}$, отсюда $m_{-2} = \frac{m_{-1}}{p_{-2}} = \frac{1}{p_{-1} p_{-2}}$ и так далее, $m_{-n} = \frac{1}{p_{-1} p_{-2} \ldots p_{-n}}$. Выберем при каждом $n \in \mathbb{Z}$ элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем.

Теорема 1.1 *Любой элемент $g \in G$ можно представить в виде*

$$g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{1.1}$$

причем в ряде (1.1) при $n < 0$ только конечное число слагаемых отлично от нуля, т.е.

$$g = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n.$$

Доказательство. Выберем $g \in G$ и пусть $N = \sup\{n : g \in G_n\}$, т.е. $g \in G_N$. Рассмотрим подгруппу G_N как компактную топологическую группу, с основной цепочкой подгрупп

$$G_N \supset G_{N-1} \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots$$

По теореме 7.2 главы 1 элемент g однозначно представим в виде

$$g = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n \ \ (a_n = \overline{0, p_n - 1}). \ \square$$

Теорема 1.2 *Локально компактная группа G изоморфна модифицированной полупрямой $[0, +\infty)^*$, где $[0, +\infty)^*$ есть множество $[0, +\infty)$, в котором каждая p-рациональная точка считается дважды: $x-0$ и $x+0$. При таком изоморфизме группа G_n переходит в модифицированный отрезок $\left[0, \frac{1}{m_n}\right]^*$. При $n \geq 0$ это отрезки $\left[0, \frac{1}{p_0 p_1 \ldots p_{n-1}}\right]^*$. При $n < 0$ это отрезки $[0, p_{-1}p_{-2}\ldots p_n]^*$.*

Доказательство. Выберем $g \in G$. Тогда по теореме 1.1

$$g = \sum_{n=N}^{\infty} a_n g_n = \sum_{n=N}^{-1} a_n g_n \dot{+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n.$$

Положим по определению

$$x = \varphi(g) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n m_{n+1} = \sum_{n=N}^{-1} a_n m_{n+1} \dot{+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n m_{n+1}.$$

По доказанному ранее φ отображает взаимно однозначно каждую группу G_N на множество $\left[0, \frac{1}{m_N}\right]^*$. При $N < 0$ это отрезок $[0, p_{-1}p_{-2}\ldots p_N]^*$. Поэтому φ отображает взаимно однозначно G на R_+^*. $\square$

Замечание. Если $g \in G_N$ и $N < 0$, то числа $\sum\limits_{n=N}^{-1} a_n m_{n+1}$ есть натуральные числа. Поэтому $\varphi(G_N)$ можно рассматривать как объединение сдвигов модифицированного отрезка $[0, 1]^*$ на всевозможные числа вида $\sum\limits_{n=N}^{-1} a_n m_{n+1}$, а это и есть отрезок $[0, p_{-1}p_{-2}\ldots p_N]^*$. $\square$

2 Интеграл Лебега на локально компактной нуль-мерной группе

В параграфе 3 главы 2 было дано определение интеграла Лебега на компактной нульмерной группе. Таким образом мы имеем интеграл на любом множестве $E \subset G_n$. Поэтому определение интеграла на произвольном множестве $E \subset G$ определяется стандартным способом.

1. Для неотрицательной функции f полагаем

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{E\cap G_{-n}} d\mu$$

2. Для действительнозначной функции полагаем

$$\int\limits_E f d\,\mu = \int\limits_E f^+ d\,\mu - \int\limits_E f^- d\,\mu.$$

3. Если $f = \phi + i\psi$, то полагаем

$$\int\limits_E f d\,\mu = \int\limits_E \phi d\,\mu + i \int\limits_E \psi d\,\mu.$$

Определенный таким образом интеграл есть интеграл Лебега на G. Он является абсолютно сходящимся в том смысле, что для измеримой функции f интеграл $\int_E f d\mu$ существует тогда и только тогда, когда существует $\int_E |f| d\mu$. Для такого интеграла справедливы все свойства интеграла Лебега, включая теоремы о предельном переходе.

3 Характеры локально компактной нуль-мерной группы

Определение 3.1 *Пусть*

$$\ldots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots$$

основная цепочка подгрупп, $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ – простые числа. Аналогично компактному случаю множество $G_n^\perp = \{\chi \in X : \ \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$ называют аннулятором подгруппы G_n.

Свойства аннуляторов

1) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $G_n^\perp$ есть группа относительно операции умножения – очевидно.

2) $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp$ – очевидно.
3)
$$\ldots \subset G_{-n}^\perp \subset \ldots \subset G_{-1}^\perp \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \ldots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \ldots$$
4) $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ (G_{n+1}^\perp / G_n^\perp)^\sharp = p_n$.
5) Смежные классы группы $G_{n+1}^\perp$ по подгруппе $G_n^\perp$ имеют вид
$$G_n^\perp \cdot \chi,$$
где χ – характер, $\chi \in G_{n+1}^\perp$.
6) Смежные классы группы $G_{n+q}^\perp$ по подгруппе $G_n^\perp$ имеют вид $G_n^\perp \cdot \chi,\ \chi \in G_{n+q}^\perp$.

7)Топология в группе характеров вводится аналогично компактному случаю.
Совокупность подгрупп $G_n^\perp$ удовлетворяет условиям: смежные классы $G_n^\perp \cdot \chi_1$ и $G_n^\perp \cdot \chi_2$ или совпадают, или не пересекаются. Смежные классы $G_n^\perp \cdot \chi_1$ и $G_m^\perp \cdot \chi_2$ или не пересекаются, или один лежит внутри другого, а именно, если $n \le m$, то $G_n^\perp \cdot \chi_1 \subset G_m^\perp \cdot \chi_2$. Поэтому смежные классы $G_n^\perp \cdot \chi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о базе топологии. Значит, в X можно ввести топологию как объединение смежных классов $G_n^\perp$ в конечном или счетном количестве.
8) Меры в группе характеров
Так как $G_{n+q}^\perp$ есть объединение смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi(x)$ $(\chi(x) \in G_{n+q}^\perp)$, то совокупность всех смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi(x)$ образует полукольцо. В этом полукольце можно ввести меру μ равенством
$$\mu(G_n^\perp \cdot \chi(x)) = \mu(G_n^\perp) = \frac{1}{m_n}.$$
После этого продолжаем меру по схеме Каратеодори на σ-алгебру.
9) Нумерация системы характеров

Лемма 3.1 *Каждый характер $\chi \in X$ принадлежит одному из аннуляторов.*

Доказательство аналогично случаю компактной группы и основывается на том, что характер непрерывен в нуле. $\square$

Следствие. $X = \bigcup\limits_{n \to -\infty}^{+\infty} G_n^\perp$.

Определим отображение $\chi \to \mathbb{R}^+$ следующим образом. $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ выберем характеры $r_n(x) \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ $(n \in \mathbb{Z})$. Пусть $\chi \in X \Rightarrow \chi(x) \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Тогда каждый смежный класс имеет вид $G_n^\perp \cdot r_n^{a_n}$ $(a_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$.

Поэтому $\chi(x) = \varphi_n(x) \cdot r_n^{a_n}(x)$ $(a_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$, $\varphi_n \in G_n^{\perp}$. Отсюда $\varphi_n = \varphi_{n-1} \cdot r_{n-1}^{a_{n-1}}(x)$ $(a_{n-1} = \overline{0, p_{n_1} - 1})$, $\varphi_{n-1} \in G_{n-1}^{\perp}$. Продолжая этот процесс, получаем

$$\chi(x) = \varphi_0(x) r_0^{a_0} \cdot r_1^{a_1} \ldots r_n^{a_n}(x), \quad \varphi_0 \in G_0^{\perp}.$$

Если группа G компактна, то на этом процесс заканчивается, т.к. $G_0^{\perp} = \{1\}$ и $\varphi_0(x) \equiv 1$. Если же группа G локально компактна, то

$$\varphi_0(x) = \varphi_{-1} \cdot r_{-1}^{a_{-1}}(x), \quad a_{-1} = \overline{(0, p_{n-1} - 1)},$$

$$\varphi_{-1}(x) = \varphi_{-2} \cdot r_{-2}^{a_{-2}}(x), \quad a_{-2} = \overline{(0, p_{n-2} - 1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и поэтому

$$\chi(x) = \prod_{k=-\infty}^{n} r_k(x)^{a_k} \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}).$$

По последовательности $(a_k)_{n=-\infty}^{+\infty}$ можно определить число

$$t = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k m_k = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k m_k}_{\in[0,1]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k m_k}_{\in\mathbb{N}},$$

и присвоим характеру $\chi(x)$ номер t. Таким образом,

$$\chi_t(x) = \prod_{k=-\infty}^{n} r_k(x)^{a_k} \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

$$t = \sum_{k=-\infty}^{n} a_k m_k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k m_k + \sum_{k=0}^{n} a_k m_k.$$

Это означает, что в отличие от компактной группы характеров не счетное множество, а континуальное, и функцию, определенную на локально компактной группе G нельзя представить в виде ряда по системе характеров.

4 Преобразование Фурье интегрируемых функций

Определение 4.1 *Если $f \in L(G)$, то существует интеграл*

$$\int_G f(x)\overline{(\chi, x)} d\,\mu(x),$$

который называется преобразованием Фурье функции f *и обозначается* $\hat{f}(\chi)$, *т.е.*

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x). \tag{4.1}$$

Свойства.
1) Преобразование Фурье есть линейный оператор, т.е.

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\hat{}(\chi) = \alpha_1 \hat{f}_1(\chi) + \alpha_2 \hat{f}_2(\chi).$$

Это равенство очевидно вытекает из (4.1).
2) Обозначим через $f_{\dot{+}h}(x)$ сдвиг функции f, т.е. $f_{\dot{+}h}(x) = f(x\dot{+}h)$. Тогда

$$\hat{f}_{\dot{+}h}(\chi) =$$

Доказательство. Используя инвариантность интеграла, имеем

$$\hat{f}_{\dot{+}h}(\chi) = \int\limits_G f(x\dot{+}h)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_G f(x\dot{+}h)\overline{(\chi, x\dot{+}h)(\chi, \dot{-}h)}d\,\mu(x) =$$

$$= (\chi, h)\int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = (\chi, h)\hat{f}(\chi). \ \square$$

3) Если $f \in L(G), \chi_1$ – характер, то

$$(\chi_1 f)\hat{}(\chi) = \hat{f}(\chi\chi_1^{-1}).$$

Доказательство. По определению (4.1)

$$\hat{f}(\chi\chi_1^{-1}) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi\chi_1^{-1}, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)}\overline{(\chi_1^{-1}, x)}d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G (\chi_1, x)f(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_G (\chi_1 f)(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = (\chi_1 f)\hat{}(\chi). \ \square$$

4) Если $f \in L(G)$, то $(\mathbf{f})\hat{} = (\hat{f})^*$ т.е. $(\mathbf{f})\hat{}(\chi) = \overline{\hat{f}(\chi^{-1})}$.
Доказательство.

$$(\mathbf{f})\hat{}(\chi) = \int\limits_G \mathbf{f}(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_G \mathbf{f}(x)(\chi^{-1}, x)d\,\mu(x) =$$

$$= \overline{\int\limits_G f(x)\overline{(\chi^{-1}, x)}d\,\mu(x)} = \overline{\hat{f}(\chi^{-1})}. \ \square$$

5) Если $f_1, f_2 \in L(G)$, то свертка $f_1 * f_2 \in L(G)$ и справедливо равенство

$$(f_1 * f_2)\hat{}(\chi) = \hat{f}_1(\chi)\hat{f}_2(\chi) \tag{4.2}$$

Доказательство. Интегрируемость свертки $f_1 * f_2$ доказывается так же, как и в случае компактной группы. Докажем равенство (4.2). Используя теорему Фубини и инвариантность интеграла, имеем

$$(f_1 * f_2)\hat{}(\chi) = \int\limits_G (f_1 * f_2)(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G f_1(x \dot{-} t) f_2(t) d\,\mu(t) \right) \overline{(\chi, x)} d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G f_2(t)\overline{(\chi, t)}d\,\mu(t) \cdot \int\limits_G f_1(x \dot{-} t)\overline{(\chi, x \dot{-} t)}d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G f_2(t)\overline{(\chi, t)}d\,\mu(t) \int\limits_G f_1(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \hat{f}_2(\chi)\hat{f}_1(\chi). \ \square$$

5 Преобразование Фурье гладких финитных функций

Напомним, что гладкой финитной функцией называется конечная линейная комбинация

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathbf{1}_{G_{n_k} \dot{+} h_k}(x). \tag{5.1}$$

Если обозначить $n = \max\limits_{k=\overline{1,N}} n_k$ и

$$\tilde{\lambda}_j = \sum_{k:\, G_{n_k} \dot{+} h_k \supset G_n \dot{+} \tilde{h}_j} \lambda_k,$$

то φ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{\lambda}_j \mathbf{1}_{G_n \dot{+} \tilde{h}_j}(x), \tag{5.2}$$

где в отличие от (5.1) смежные классы $G_n \dot{+} \tilde{h}_j$ в (5.2) дизъюнктны.

Теорема 5.1 *Пусть* $\varphi(x) = \mathbf{1}_{G_n}(x)$. *Тогда*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \mu(G_n)\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi).$$

Доказательство. По определению $\hat{\varphi}(\chi)$ и функции φ имеем

$$\hat{\varphi}(\chi) = \int\limits_G \varphi(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_{G_n} \overline{(\chi, x)}d\,\mu(x).$$

Если $\chi \in G_n^\perp$, то $(\chi, x) = 1$ при $x \in G_n$ и поэтому $\hat{\varphi}(\chi) = \mu G_n$. Если $\chi \notin G_n^\perp$, то сужение $\chi|_{G_n}$ характера χ на G_n есть характер компактной группы G_n, отличный от единичного, и поэтому ортогональный к нему. Значит, $\int\limits_{G_n} \overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = 0$. $\square$

Теорема 5.2 *Если* φ *гладкая финитная функция, заданная равенством*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_j}(x), \tag{5.3}$$

то

$$\hat{\varphi}(\chi) = \mu G_n \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{(\chi, h_j)}\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi), \tag{5.4}$$

Доказательство. Вначале найдем преобразование Фурье функции $\mathbf{1}_{G_n \dot{+} h}$. Используя свойство инвариантности интеграла, имеем с учетом теоремы 5.1

$$\left(\mathbf{1}_{G_n \dot{+} h}\right)^\wedge(\chi) = \int\limits_G \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h}(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_G \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h}(x \dot{+} h)\overline{(\chi, x \dot{+} h)}d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_n} \overline{(\chi, x)(\chi, h)}d\,\mu(x) = \overline{(\chi, h)}\int\limits_{G_n} \overline{(\chi, x)}d\,\mu(x) = \overline{(\chi, h)}\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)\mu(G_n).$$

Отсюда сразу находим

$$\hat{\varphi}(\chi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{1}^\perp_{G_n \dot{+} h_j}(\chi) = \mu G_n \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{(\chi, h_j)}\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi). \ \square$$

Следствие. *В условиях теоремы 5.2* $\hat{\varphi}(\chi)$ *гладкая финитная функция на* X.

Доказательство. Пусть φ определена равенством (5.3). Очевидно, что

$\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset \mathrm{G}_{\mathrm{n}}^{\perp}$. Обозначим через G_M наименьшую подгруппу в G, содержащую объединение $\bigsqcup\limits_{j=1}^{N}(G_n\dot{+}h_j)$, и покажем, что $\hat{\varphi}$ постоянна на смежных классах $G_M^{\perp}\zeta$. В самом деле, пусть $\chi \in G_M^{\perp}$. Тогда

$$\hat{\varphi}(\chi\cdot\zeta) = \int\limits_{G}\varphi(x)\overline{(\chi\zeta, x)}d\,\mu(x) = \int\limits_{G_M}\varphi(x)\overline{(\chi, x)(\zeta, x)}d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_M}\varphi(x)\overline{(\zeta, x)}d\,\mu(x)$$

не зависит от $\chi \in G_M^{\perp}$, т.е. $\hat{\varphi}$ постоянна на смежных классах $G_M^{\perp}\zeta$. $\square$

Теорема 5.3 *Гладкая финитная функция φ восстанавливается по своему преобразованию Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ равенством*

$$\varphi(x) = \int\limits_{X}\hat{\varphi}(\chi)(\chi, x)d\,\nu(\chi).$$

Доказательство. Используя представление $\hat{\varphi}(\chi)$ в виде (5.4), находим

$$\int\limits_{X}\hat{\varphi}(\chi)(\chi, x)d\,\nu(\chi) = \mu G_n\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\int\limits_{X}\mathbf{1}_{G_n^{\perp}}(\chi)(\chi, x\dot{-}h)d\,\nu(\chi) =$$

$$= \mu G_n\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\int\limits_{G_n^{\perp}}(\chi, x\dot{-}h_j)d\,\nu(\chi). \tag{5.5}$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.1, находим, что если $x \in G_n\dot{+}h_j$, то $\int\limits_{G_n^{\perp}}(\chi, x\dot{-}h_j)d\,\nu(\chi) = \mu G_n^{\perp}$. Если же $x \notin G_n\dot{+}h_j$, то $\int\limits_{G_n^{\perp}}(\chi, x\dot{-}h_j)d\,\nu(\chi) = 0$. Это означает, что $\int\limits_{G_n^{\perp}}(\chi, x\dot{-}h_j)d\,\nu(\chi) = \mu G_n^{\perp}\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h_j}(x)$. Подставляя это значение в (5.5), получаем утверждение теоремы. $\square$

Лемма 5.4 *Если φ – гладкая финитная функция, то*

$$\int\limits_{G}\varphi(x)d\,\mu(x) = \int\limits_{G}\varphi(\dot{-}x)d\,\mu(x). \tag{$*$}$$

Доказательство. Так как φ – гладкая финитная функция, то $\varphi(x)$ постоянна на смежных классах

$$G_n\dot{+}h_j = G_n\dot{+}\alpha_{n-1}g_{n-1}\dot{+}\alpha_{n-2}g_{n-2}\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_{n-\sigma}g_{n-\sigma}$$

и $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathrm{G_N} = \mathrm{G_{n-\sigma}}$. Отображение $x \mapsto \dot{-}x$ переводит элемент

$$x = x_n\dot{+}\alpha_{n-1}g_{n-1}\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_{n-\sigma}g_{n-\sigma} \quad (x_n \in G_n)$$

в элемент

$$\dot{-}x = \dot{-}x_n\dot{+}\alpha_{n-1}(p_{n-1}-1)g_{n-1}\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_{n-\sigma}(p_{n-\sigma}-1)g_{n-\sigma}.$$

Это означает, что отображение $x \mapsto \dot{-}x$ осуществляет перестановку смежных классов, на которых φ постоянны. Поэтому интегралы в (*) равны. □

Теорема 5.5 (Равенство Планшереля для гладких финитных функций) *Пусть φ, ψ – гладкие финитные функции. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_G \varphi(x)\overline{\psi(x)}d\,\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{\psi}(\chi)}d\,\nu(\chi).$$

Доказательство. Так как X – локально компактная нульмерная группа, то мы можем определить преобразование Фурье гладкой финитной функции $a(\chi)$ равенством

$$\breve{a}(x) = \int\limits_X a(\chi)\overline{(\chi, x)}d\,\nu(\chi),$$

и в этом случае $a(\chi)$ восстанавливается по функции $\breve{a}(x)$ равенством

$$a(\chi) = \int\limits_G \breve{a}(x)(\chi, x)d\,\mu(x). \tag{5.6}$$

Для свертки $(a * b)(\chi)$ справедливо равенство

$$(a * b)\breve{}\,(x) = \breve{a}(x)\breve{b}(x).$$

Из равенства (5.6) находим

$$(a * b)(\chi) = \int\limits_G \breve{a}(x)\breve{b}(x)(\chi, x)d\,\mu(x). \tag{5.7}$$

Положим теперь в равенстве (5.7) $a = \hat{\varphi}(\chi)$, $b = \hat{\psi}(\chi)$. Получим

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\chi) = \int\limits_G (\hat{\varphi})\check{}(x)(\hat{\psi})\check{}(x)(\chi, x)d\,\mu(x). \tag{5.8}$$

Найдем $(\hat{\varphi})\check{}$. По определению преобразования Фурье имеем

$$(\hat{\varphi})\check{}(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, x)}d\,\nu(\chi) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)(\chi, \dot{-}x)d\,\nu(\chi) = \varphi(\dot{-}x).$$

Поэтому (5.8) примет вид

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\chi) = \int\limits_G \varphi(\dot{-}x)\psi(\dot{-}x)(\chi, x)d\,\mu(x) = \int\limits_G \varphi(\dot{-}x)\psi(\dot{-}x)\overline{(\chi, \dot{-}x)}d\,\mu(x).$$

Полагая $\chi \equiv 1$, получаем с учетом леммы

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(1) = \int\limits_G \varphi(x)\psi(x)d\,\mu(x).$$

Заменяя ψ на $\bar{\psi}$, имеем равенство

$$(\hat{\varphi} * \bar{\psi}\hat{})(1) = \int\limits_G \varphi(x)\bar{\psi}(x)d\,\mu(x). \tag{5.9}$$

С другой стороны, для свертки $(\hat{\varphi} * \bar{\psi}\hat{})(\chi)$ имеем по определению

$$(\hat{\varphi} * \bar{\psi}\hat{})(\chi) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi t^{-1})(\bar{\psi})\hat{}(t)d\,\nu(t). \tag{5.10}$$

Используя определение $\bar{\psi}\hat{}$, находим

$$\bar{\psi}\hat{}(t) = \int\limits_G \bar{\psi}(x)\overline{(t, x)}d\,\mu(x) = \overline{\int\limits_G \psi(x)\overline{(t^{-1}, x)}d\,\mu(x)} = \overline{\hat{\psi}(t^{-1})}.$$

Соединяя это равенство и (5.10), имеем

$$(\hat{\varphi} * \bar{\psi}\hat{})(\chi) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi t^{-1})\overline{\hat{\psi}(t^{-1})}d\,\nu(t) \tag{5.11}$$

Полагая в (5.11) $\chi \equiv 1$ и приравнивая правые части в (5.11) и (5.9), имеем

$$\int\limits_X \hat{\varphi}(t^{-1})\overline{\hat{\psi}(t^{-1})}d\,\nu(t) = \int\limits_G \varphi(x)\bar{\psi}(x)d\,\mu(x),$$

откуда, с учетом леммы, получаем требуемое равенство. $\square$

Следствие. *Для гладкой финитной функции $\varphi(x)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_G |\varphi(x)|^2 d\,\mu(x) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2 d\,\nu(\chi).$$

Теорема 5.6 *Любая гладкая финитная функция на X есть преобразование Фурье некоторой гладкой финитной функции на G.*

Доказательство. Пусть $g(\chi)$ гладкая финитная функция, определенная на X, и пусть

$$g(\chi) = \sum_{j=1}^{P_M P_{M+1}\ldots P_{N-1}} \lambda_j \mathbf{1}_{G_M^{\perp}\cdot\chi_j}(\chi),$$

т.е. g постоянна на смежных классах по подгруппе $G_M^{\perp}$, лежащих в $G_N^{\perp}$ и $\mathrm{supp\,g} \subset \mathrm{G_N^{\perp}}$. Определим функцию $f(x)$ равенством

$$f(x) = \int\limits_X g(\chi)(\chi, x) d\nu(\chi).$$

Тогда f – гладкая финитная функция с $\mathrm{supp\,f} \subset \mathrm{G_M}$ и постоянная на смежных классах $G_N \dot{+} h_j \quad (h_j = a_{N-1}g_{N-1} \dot{+} a_{N-2}g_{N-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_M g_M)$. Покажем, что $\hat{f}(\chi) = g(\chi)$. В самом деле, выберем $\chi \in G_M^{\perp} \cdot \zeta_j$ и пусть $\chi = \chi_M \cdot \zeta_j$, где $\chi_M \in G_M^{\perp}$ и $\zeta_j = r_M^{\beta_M} r_{M+1}^{\beta_{M+1}} \cdot \ldots \cdot r_{N-1}^{\beta_{N-1}}$. Тогда

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)} d\,\mu(x) = \int\limits_{G_M} f(x)\overline{(\chi_M \zeta_j, x)} d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_M} f(x)\overline{(\chi_M, x)(\zeta_j, x)} d\,\mu(x) = \int\limits_{G_M} f(x)\overline{(\zeta_j, x)} d\,\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_M} \overline{(\zeta_j, x)} d\,\mu(x) \int\limits_X g(\tilde{\chi})(\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_{G_M} \overline{(\zeta_j, x)} d\,\mu(x) \int\limits_{G_N^{\perp}} g(\tilde{\chi})(\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) =$$

$$= \int\limits_{G_M} \overline{(\zeta_j, x)} d\,\mu(x) \sum_k \int\limits_{G_N^{\perp}\chi_k} \lambda_k (\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) \tag{5.12}$$

Используя свойство инвариантности интеграла, находим при $x \in G_M$

$$\int\limits_{G_M^{\perp}\chi_k} (\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_X (\tilde{\chi}, x) \mathbf{1}_{G_M^{\perp}\chi_k}(\tilde{\chi}) d\nu(\tilde{\chi}) =$$

$$= \int\limits_X (\tilde{\chi}, x)\mathbf{1}_{G_M^\perp}(\tilde{\chi}, \chi_k^{-1})d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_X (\tilde{\chi}\chi_k, x)\mathbf{1}_{G_M^\perp}(\tilde{\chi})d\nu(\tilde{\chi}) =$$

$$= \int\limits_{G_M^\perp} (\tilde{\chi}, x)(\chi_k, x)d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_{G_M^\perp} (\chi_k, x)d\nu(\tilde{\chi}) = (\chi_k, x)\nu(G_M^\perp).$$

Подставляя это выражение в (5.12), получаем окончательно

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_{G_m} \overline{(\zeta_j, x)}d\,\mu(x) \sum_k \lambda_k \nu(G_M^\perp)(\chi_k, x) =$$

$$\nu(G_M^\perp) \cdot \sum_k \lambda_k \int\limits_{G_m} \overline{(\zeta_j, x)}(\chi_k, x)d\,\mu(x) = \nu(G_M^\perp)\mu G_m \sum_k \lambda_k \delta_{k,j} = \lambda_j. \ \square$$

6 Преобразование Фурье для функций $f \in L_2(G)$

По следствию из теоремы 5.5 для гладкой финитной функции справедливо равенство

$$\int\limits_G |\varphi(x)|^2 d\,\mu(x) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2 d\,\nu. \tag{6.1}$$

Рассмотрим отображение $\mathcal{F}: \ \varphi \to \hat{\varphi}$, которое определено для гладких финитных функций. Равенство (6.1) означает, что $\mathcal{F}$ изометрично. Так как множество гладких финитных функций плотно в $L_2(G)$ и $L_2(X)$, то мы можем продолжить отображение $\mathcal{F}$ на все $L_2(G)$ так, что оно будет изометрично отображать $L_2(G)$ на $L_2(X)$. Образ $\mathcal{F}(\varphi)$ любой функции φ также будем называть преобразованием Фурье и обозначать $\hat{\varphi}(\chi)$.

Теорема 6.1 *Справедливо равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n(\chi), \tag{6.2}$$

где $\hat{\varphi}_n(\chi) = \int\limits_{G_n} \varphi(x)\overline{(\chi, x)}d\,\mu(x)$, *и предел в (6.2) понимается в смысле сходимости по норме* $L_2(X)$, *т.е.*

$$\lim_{n\to-\infty} ||\hat{\varphi}(\chi) - \hat{\varphi}_n(\chi)||_{L_2(X)}.$$

Доказательство. 1) Покажем, что последовательность $\hat{\varphi}_n(\chi)$ фундаментальна. Обозначим $\varphi_n(x) = \varphi(x)\mathbf{1}_{G_n}(x)$. Очевидно, что $\varphi_n \in L_1(G)$, т.е. преобразование Фурье $\hat{\varphi}_n$ определено. Кроме этого $||\varphi_n - \varphi||_{L_2(G)} \to 0$, и, значит, $||\varphi_n - \varphi_m||_{L_2(G)} \to 0$ при $m, n \to -\infty$. В силу изометричности $\mathcal{F}$ имеем

$$||\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m||_{L_2(X)} = ||\varphi_n - \varphi_m||_{L_2(G)} \to 0,$$

т.е. последовательность $(\hat{\varphi}_n)$ фундаментальна в $L_2(X)$, и, значит, существует функция $\psi(\chi) \in L_2(X)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} ||\psi(\chi) - \hat{\varphi}_n(\chi)||_{L_2(X)} = 0.$$

Из изометричности $\mathcal{F}$ следует, что $\psi = \mathcal{F}\varphi$. $\square$

Теорема 6.2 *Если $f_n \in L_2(G)$ и $f_n \to f$ по норме $L_2(G)$, то $\hat{f}_n \to \hat{f}$ по норме $L_2(X)$.*

Доказательство. Пусть φ_n – гладкие финитные функции, такие, что $||\varphi_n - f_n||_{L_2(G)} \le \frac{1}{2^n}$. Тогда $\varphi_n \to f$ по норме $L_2(G)$, и, значит, $\hat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n$ в $L_2(X)$. Так как $||\varphi_n - f_n||_{L_2(G)} = ||\hat{\varphi}_n - \hat{f}_n||_{L_2(X)} \le \frac{1}{2n}$, то $||\hat{f} - \hat{f}_n||_{L_2(X)} \le ||\hat{f} - \hat{\varphi}_n||_{L_2(X)} + ||\hat{\varphi}_n - \hat{f}_n||_{L_2(X)} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 6.3 *Если $f, g \in L_2(G)$, то*

$$\int\limits_G f(x)\overline{g(x)}d\,\mu(x) = \int\limits_X \hat{f}(\chi)\overline{\hat{g}(\chi)}d\,\nu(\chi).$$

Доказательство. Пусть φ_n и ψ_n – финитные гладкие функции, такие, что $||f - \varphi_n||_{L_2(G)} \to 0$ и $||g - \psi_n||_{L_2(G)} \to 0$. По равенству Планшереля

$$\int\limits_G \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}d\,\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}_n(\chi)\overline{\hat{\psi}_n(\chi)}d\,\nu(\chi).$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_G \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}d\,\mu(x) = \int\limits_G f\overline{g}d\,\mu.$$

В самом деле,

$$\left|\int\limits_G \varphi_n\overline{\psi_n}d\,\mu - \int\limits_G f\overline{g}d\,\mu\right| \le \int\limits_G |\varphi_n\overline{\psi_n} - f\overline{g}|d\,\mu \le \int\limits_G |\varphi_n\overline{\psi_n} - f\overline{\psi_n}d\,\mu +$$

$$+\int\limits_G |f\overline{\psi_n} - f\overline{g}|d\,\mu \le ||\overline{\psi_n}|| \cdot ||\varphi_n - f|| + ||f|| \cdot ||\overline{\psi_n} - \overline{g}|| \to 0 \;\; (n \to +\infty).$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X \hat{\varphi}_n(\chi)\overline{\hat{\psi}_n(\chi)}d\,\mu(\chi) = \int\limits_G \hat{f}\overline{\hat{g}}d\,\nu(\chi).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Литература

1) Л.С. Понтрягин Непрерывные группы. М., 1973 (3-е издание)

2) Г. Агаев, Н.Я Виленкин, А.И. Рубинштейн, Г.М. Джафари. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку, Элм, 1981.

3) Современный p-адический анализ и математическая физика: Теория и приложения. М., Физматлит. 2012

Оглавление