ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского"

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СВЯЗНОСТЕЙ

Учебное пособие

С.В. Галаев

Саратов
2014

Галаев С.В. Введение в теорию связностей. Учебное пособие. Саратов, 2014. 48 с.

В пособии приводится изложение основных понятий из теории линейных связностей. В качестве основы для построения теории выбран метод ковариантного дифференцирования по Кошулю. Пособие включает в себя содержание части учебного курса "Теория связностей"и ориентировано на студентов, специализирующихся по кафедре геометрии. Пособие может оказаться полезным и для другой категории читателей, желающих ознакомиться с кратким введением в теорию связностей. От читателя требуется знание основ теории дифференцируемых многообразий. Доказательство части утверждений, сформулированных в пособии, вынесено в упражнения и задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Линейная связность на дифференцируемом многообразии представляет собой дополнительную структуру, которую геометрически можно описать как параллельный перенос касательных векторов. Если в линейном пространстве имеется естественное понятие параллельности векторов, то для произвольного гладкого многообразия вопрос о том, параллельны ли векторы, касательные к многообразию, но имеющие разные начальные точки, не имеет смысла. В общем случае параллельный перенос зависит от пути, вдоль которого он осуществляется. Исследуя в начале двадцатого века движение точки по поверхности в отсутствии внешних сил, Леви-Чивита построил первый параллельный перенос касательного вектора.

Существуют разные подходы к определению линейной связности. Построение теории связностей в рамках главного расслоения основано на использовании аппарата групп Ли [1, 3]. Учитывая, что знакомство студентов с теорией линейных связностей может предшествовать учебному курсу по группам и алгебрам Ли, в настоящем пособии изложение теории основано на использовании определения связности по Кошулю. У такого подхода есть очевидные плюсы и минусы. К достоинствам определения связности по Кошулю следует отнести относительный минимум предполагаемых у потенциального читателя первоначальных сведений из геометрии гладких многообразий. С другой стороны, определение связности по Кошулю страдает известным формализмом и, с методической точки зрения, является менее привлекательным по сравнению с некоторыми другими определениями. Более подробное изложение связности по Кошулю можно найти в книге [6]. Ясное представление о параллельном переносе с геометрической точки зрения можно получить, прочитав книгу [2].

Наряду с введением в ковариантное дифференцирование по Кошулю пособие включает материал, иллюстрирующий применение линейных связностей в таких разделах дифференциальной геометрии, как риманова геометрия, геометрия симплектических многообразий и геометрия почти контактных метрических пространств. Первые пять разделов содержат стандартный для вузовского образования материал по дифференциальной геометрии, являясь элементарным введением в теорию связностей и риманову геометрию. В шестом разделе вводится понятие почти комплексной структуры, рассматриваемой совместно с совместимой с ней линейной связностью. В этом разделе определяются важнейшие для математики и ее приложений кэлеровы пространства - римановы многообразия со специальной почти комплексной структурой. Содержание шестого раздела, с одной стороны, представляет самостоятельный интерес, как введение в геометрию почти комплексных многообразий, с другой стороны, является хорошей иллюстрацией использования линейных связностей при изучении аффинорных структур. В седьмом разделе изучаются симплектические пространства - многообразия с симплектической структурой, на которых, как правило, дополнительно определяются линейные связности специального типа - симплектические связности. Симплектическая связность имеет тот же статус, что и связность Леви-Чивита в римановом многообразии: симплектическая связность не имеет кручения и совместима с симплектической структурой. Важным знаком принципиального отличия римановой геометрии от симплектической является то, что связность Леви-Чивита как метрическая связность с нулевым кручением уникальна, в то время как симплектических связностей бесконечно много.

Учебное пособие организовано так, что разделы 6 и 7 являются вводными для раздела 8, содержащего основные сведения о почти контактных метрических пространствах. Почти контактные метрические пространства представляют собой (псевдо) римановы многообразия, наделенные дополнительными геометрическими структурами, позволяющими находить много общего с эрмитовыми, кэлеровыми и другими, богатыми на геометрические свойства, пространствами. В то же время, геометрия почти контактных метрических пространств имеет свое содержание и свою логику развития. Раздел 8 ориентирован на продвинутых читателей, к которым, прежде всего, следует отнести магистрантов, специализирующихся по кафедре геометрии.

Для формирования банка задач автор пособия активно использовал книги [4, 5]. В то же время, помимо традиционных задач по теории связностей, пособие содержит впервые сформулированные задачи, а также задачи, основанные на результатах, полученных в самое последнее время в геометрии многообразий с почти контактными метрическими структурами. Как правило, такие задачи помещены вместе с подробными указаниями к их решению и ссылками на соответствующие источники.

1. Линейная связность

1. Пусть M - n-мерное многообразие класса C^∞. Обозначим $\Gamma(TM)$ - модуль векторных полей класса C^∞ на многообразии M над кольцом гладких функций.

2. Напомним важную для дальнейшего лемму Урысона. Пусть M - многообразие, U - открытое множество, содержащееся в M, и $V \subset U$ - компактное. Тогда существует функция $f \in C^\infty$ на M, равная единице на V и равная нулю вне V.

3. Линейной связностью на многообразии M является отображение ∇, сопоставляющая каждому векторному полю $\vec{X}$ некоторое линейное отображение $\nabla_{\vec{X}} : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, обладающее тем свойством, что для любых функций $f, g \in C^\infty$, и любых полей $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma(TM)$, имеют место соотношения:

$$1)\ \nabla_{f\vec{X}+g\vec{Y}} = f\nabla_{\vec{X}} + g\nabla_{\vec{Y}};$$
$$2)\ \nabla_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = (\vec{X}f)\vec{Y} + f\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y}).$$

4. **Замечание**. Линейную связность мы будем называть также аффинной связностью. Надо иметь ввиду, что иногда в научной литературе понятия аффинной и линейной связностей различают. Мы этого делать не будем. Линейная связность также называется ковариантным дифференцированием (ковариантной производной).

5. **Определение**. Многообразие M, на котором задана аффинная связность ∇, называется пространством аффинной связности, а отображение $\nabla_{\vec{X}}$ - ковариантным дифференцированием вдоль векторного поля $\vec{X}$ (относительно данной аффинной связности ∇).

6. Понятие аффинной связности имеет локальный характер, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Если хотя бы одно из векторных полей $\vec{X}$ или $\vec{Y}$ равно нулю на открытом подмногообразии W пространства аффинной связности M, то векторное поле $\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y})$ также равно нулю на W.

Доказательство теоремы полностью опирается на лемму Урысона.

Действительно, пусть f - гладкая на M функция, равная единице в некоторой точке p на W и нулю вне W. Тогда если $\vec{Y} = 0$ на W, то $f\vec{Y} = 0$ на M и потому $\nabla_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = 0$ на M. Но $\nabla_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = (\vec{X}f)\vec{Y} + f\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y})$, так что $f\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y}) = -\nabla_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = (\vec{X}f)\vec{Y}$ на M, и потому $(\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y}))_p = -(\vec{X}f)(p)(\vec{Y})_p = 0$, ибо $f(p) = 1$ и $\vec{Y}_p = 0$.

Аналогично, если $\vec{X} = 0$ на W, то $f\vec{X} = 0$ на M и потому $\nabla_{f\vec{X}}(\vec{Y}) = 0$ на M. Но $\nabla_{f\vec{X}}(\vec{Y}) = f\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y})$, так что $(\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y}))_p = 0$, ибо $f(p) = 1$. Поскольку p - произвольная точка W, этим доказано, что в обоих случаях $\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y}) = 0$ на W. Теорема доказана.

7. Пусть теперь $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ - произвольные векторные поля на открытом подмногообразии W пространства аффинной связности X. Для любой точки $p \in W$ существует такая её окрестность $V \subset W$ и такие векторные поля $\vec{X}'$ и $\vec{Y}'$ на M, что $\vec{X}' = \vec{X}$ и $\vec{Y}' = \vec{Y}$ на V. Докажем это с помощью леммы Урысона:

Пусть V такое, что замыкание $\bar{V}$ - компактно и $\bar{V} \subset W$. Возьмем функцию f, равную единице на $\bar{V}$ и равную нулю на W'. Тогда произведение $f\vec{X}$ можно продолжить нулем на все многообразие M. Таким образом, из векторных полей $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ на W мы можем построить векторные поля $\vec{X}'$ и $\vec{Y}'$ на X, совпадающие с $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ на V. Определим на W линейную связность $\nabla|_W$, полагая $((\nabla|_W)_{\vec{X}}\vec{Y})_p = (\nabla_{\vec{X}'}\vec{Y}')_p$.

Докажем, что значение ковариантной производной не зависит от выбора продолжений векторных полей $\vec{X}$ и $\vec{Y}$. Возьмем $\nabla_{\vec{X}|_W}(\vec{Y})(p) = (\nabla_{\vec{X}'}(\vec{Y}'))(p)$ и $\nabla_{\vec{X}|_W}(\vec{Y})(p) = (\nabla_{\vec{X}''}(\vec{Y}''))(p)$. Тогда $\nabla_{\vec{X}'}(\vec{Y}') - \nabla_{\vec{X}''}(\vec{Y}'') = 0$.

Итак, мы показали, что $\nabla_{\vec{X}'}(\vec{Y}' - \vec{Y}'') = 0$ в окрестности точки p. Значит, $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} = \nabla_{\vec{X}'}\vec{Y}'$ в окрестности точки p. Итак, мы определили ковариантную производную на W.

Функция $\nabla|_W$ является аффинной связностью. Это видно из свойств в определении 3.

8. **Определение**. Аффинную связность $\nabla|_W$ мы будем называть ограничением связности ∇ на W, а открытое подмногообразие W, снабженное этой связностью, открытым подпространством пространства M.

Аффинную связность $\nabla|_W$ на W мы будем обозначать тем же символом ∇, что и аффинную связность на всем пространстве M. В частности, на любой координатной окрестности U пространства M определена аффинная связность $\nabla|_U$. Пусть $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i, j, k = 1, ..., n)$ - базисные векторные поля на U. Тогда $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$, где Γ^k_{ij} - некоторые гладкие на U функции.

9. **Определение**. Коэффициенты Γ^k_{ij} называются *коэффициентами связ-*

ности. Для компонент $(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y})^i$ поля $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}$ мы получим следующее выражение:

$$(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y})^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} y^j\right) x^k. \tag{1}$$

Отсюда следует, что заданием коэффициентов связности аффинная связность однозначно определяется.

Итак, пусть $U \subset M$ - открытое множество. Из связности на M мы построили связность на U. Докажем теорему:

10. **Теорема**. *Если $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где U_α - открытые множества, которые являются координатными окрестностями, то ковариантная производная на M однозначно определяется своими ограничениями на все U_α.*

Доказательство. Пусть $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Из связности ∇ мы построили связность ∇_α. Каждое ∇_α определяется своими коэффициентами связности. Чтобы по ∇_α восстановить ∇, положим $(\nabla_{\vec{X}|_{U_\alpha}} \vec{Y}|_{U_\alpha})(p) = (\nabla_{\vec{X}}\vec{Y})(p)$.

Продолжим $\vec{X}|_{U_\alpha}$, $\vec{Y}|_{U_\alpha}$ до векторных полей на M. В качестве этого продолжения можно взять сами векторные поля $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, полагая $\vec{X} = \vec{X}'$, $\vec{Y} = \vec{Y}'$. Для каждого U мы можем задать связность с помощью коэффициентов связности. Таким образом, связность на всем многообразии получается заданием в каждом U_α своих коэффициентов связности.

11. Упражнение. Показать, что при преобразовании координат $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ коэффициенты связности преобразуются следующим образом:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^{i'}_{j'k'}.$$

Указание. С одной стороны $\nabla_i \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$. С другой стороны, полагая $A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, получаем: $\nabla_i \partial_j = \nabla_{A^{i'}_i \partial_{i'}} A^{j'}_j \partial_{j'}$. Воспользовавшись далее свойствами ковариантной производной, получаем нужное равенство.

12. Упражнение. Превратим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в пространство аффинной связности, полагая, что в естественной декартовой системе координат (x^1, x^2) все коэффициенты связности равны нулю. Найти коэффициенты связности в полярной системе координат: $\rho = x^{1'}$, $\varphi = x^{2'}$.

Указание. Так как $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то проводя необходимые вычисления, получаем:

$$\Gamma^{1'}_{1'1'} = \Gamma^{1'}_{1'2'} = \Gamma^{1'}_{2'2'} = \Gamma^{1'}_{2'1'} = 0,$$

$$\Gamma^{2'}_{1'2'} = \Gamma^{2'}_{2'1'} = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma^{1'}_{2'2'} = -\rho.$$

2. Ковариантное дифференцирование тензорных полей

1. Рассмотрим тензорное расслоение $T^p_q(M) = \cup_{x \in X} T^p_q(T_x)$, где $T^p_q(x) = \underbrace{T_x \otimes ... \otimes T_x}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{T^*_x \otimes ... \otimes T^*_x}_{q \text{ раз}}$. Имеется естественная проекция $p : T^p_q(M) \to M$, такая что $p(T^p_q(x)) = x$, $x \in X$. Известно, что $T^p_q(M)$ есть дифференцируемое многообразие класса C^∞ и проекция $p : T^p_q(M) \to M$ есть дифференцируемое отображение. Дадим следующее определение.

2. **Определение**. Тензорным полем типа (p, q) класса C^∞ на многообразии X называется сечение класса C^∞ расслоения $p : T^p_q(M) \to M$, то есть отображение $Q : M \to T^p_q(M)$ класса C^∞, которое обладает свойством $p \circ Q = id_M$. Запишем выражение тензорного поля в координатах:

$$Q = Q^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q},$$

где $Q^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ - гладкие функции класса C^∞, а $\partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q}$ - базис $T^p_q(M)$.

Дадим новое определение тензорного поля. Для этого рассмотрим тензорное поле типа $(0, 1)$, то есть линейную дифференциальную форму.

3. **Определение**. *Линейной дифференциальной формой* на многообразии M мы будем называть произвольное $C^\infty(M)$ - линейное отображение $C^\infty(M)$ - модуля $\Gamma(TM)$ в алгебру $C^\infty(M)$. Таким образом, каждая форма ω сопоставляет любому векторному полю $\vec{X} \in \Gamma(TM)$ некоторую гладкую на M функцию $\omega(\vec{X})$, причем для любой гладкой на M функции f и любых полей $\vec{X}, \vec{X}_1, \vec{X}_2 \in \Gamma(TM)$ имеют место равенства:

1) $\omega(f\vec{X}) = f\omega(\vec{X})$;

2) $\omega(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = \omega(\vec{X}_1) + \omega(\vec{X}_2)$.

Очевидно, что совокупность $\Omega^1(M)$ всех линейных дифференциальных форм на многообразии M представляет собой модуль относительно операций:

1) $(f\omega)\vec{X} = f\omega(\vec{X})$, $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega^1(X)$, $\vec{X} \in \Gamma(TM)$;

2) $(\omega_1+\omega_2)(\vec{X}) = \omega_1(\vec{X})+\omega_2(\vec{X})$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(X)$, $\vec{X} \in \Gamma(TM)$.

4. Пусть W - произвольное открытое подмногообразие многообразия M и пусть ω - произвольная линейная дифференциальная форма на M. Пусть, далее, $\vec{Y}$ - произвольное векторное поле на подмногообразии W. Для любой точки $p \in W$ рассмотрим ее окрестность V, замыкание $\bar{V}$ которой компактно и содержится в W. На многообразии M существуют такие векторные поля $\vec{X}$, что $\vec{X}|_V = \vec{Y}|_V$. Пусть $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ — два поля на M, обладающих этим свойством, и пусть h - гладкая на M функция, равная единице в точке p и нулю вне окрестности W. Тогда $h(\vec{X}_1+\vec{X}_2)=0$ на X и потому $h(\omega(\vec{X}_1) - \omega(\vec{X}_2)) = 0$.

Отсюда следует, что в точке p функции $\omega(\vec{X}_1)$ и $\omega(\vec{X}_2)$ совпадают. Поскольку точка p была произвольной точкой многообразия M, то тем самым доказано, что формула $\omega|_W(\vec{Y})(p) = \omega(\vec{X})(p)$, где $\vec{X}$ - произвольное векторное поле на M, совпадающее на V с полем $\vec{Y}$, однозначно определяет на W некоторую гладкую функцию $\omega|_W(\vec{Y})$. Таким образом, мы получаем некоторое $C^\infty(M)$ - линейное отображение $\omega|_W : \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$, то есть линейную дифференциальную форму на W.

15. **Определение**. Форму $\omega|_W$ мы будем называть ограничением формы ω на открытом подмногообразии W и будем обозначать ее прежним символом ω.

Замечание. Так же, как и для векторных полей, отображение ограничения $\omega \to \omega|_W$, вообще говоря, не эпиморфно, а лишь локально эпиморфно в том смысле, что каково бы ни было открытое множество $V \subset W$, замыкание $\bar{V}$ которого компактно и содержится в W, для любой линейной дифференциальной формы $\Theta \in \Omega^1(M)$ существует такая линейная дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(M)$, что $\omega|_V = \Theta|_V$. Эта форма ω определяется формулой:

$$\omega(\vec{X}) = \begin{cases} g\Theta(\vec{X}|_V) & \text{на W}, \\ 0 & \text{вне W}. \end{cases}$$

где g - гладкая на X функция, равная единице на $\bar{V}$ и нулю вне некоторого открытого множества, замыкание которого содержится в W.

Теорема. *Определение 2 и определение 3 эквивалентны.*

Доказательство.

1) Запишем выражение линейной дифференциальной формы на коорди-

натной окрестности W в координатах:

$$\omega = \omega(\partial_i)dx^i, \quad i = 1, ..., n$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ образуют базис модуля векторных полей на W, а dx^i — сопряженный базис и $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$. Таким образом, получаем $\omega = \omega(\partial_i)dx^i = \omega_i dx^i$, $\omega_i \in C^\infty(W)$, а это есть стандартное определение тензорного поля типа (0,1).

2) Докажем что тензорное поле ω типа (0,1) определяет линейную дифференциальную форму. Пусть $\vec{X}$ - векторное поле. Тогда $\omega(\vec{X})(x) = \omega(x)(\vec{X}(x))$, где $\omega(x) \in T^*_x$.

Запишем в координатах:

$$\omega(\vec{X}) = (\omega_i dx^i)(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \omega_i X^j dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i X^j \delta^i_j = \omega_i X^i \in C^\infty,$$

так как $\omega_i \in C^\infty$ и $X_i \in C^\infty$.

Проверим свойства из определения 3:

1) $\omega(f\vec{X})(x) = \omega(x)(f(x)\vec{X}(x)) = f(x)\omega(x)(\vec{X}(x)) = (f\omega)(\vec{X})(x)$;

2) $\omega(\vec{X}_1 + \vec{X}_2)(x) = \omega(x)(\vec{X}_1(x) + \vec{X}_2(x)) = \omega(x)\vec{X}_1(x) + \omega(x)\vec{X}_2(x) = \omega(\vec{X}_1)(x) + \omega(\vec{X}_2)(x)$.

Теорема доказана.

6. Дадим новое определение тензорного поля.

Определение. Тензорным полем типа (p, q) на многообразии M мы будем называть произвольную $C^\infty(M)$ - линейную по каждому аргументу функцию $T(\omega_1, .., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)$ от $p + q$ аргументов, первые p из которых представляют собой линейные дифференциальные формы $\omega_1, .., \omega_p \in \Omega^1(M)$, а последние q - векторные поля $\vec{X}_1, ..., \vec{X}_q \in \Gamma(TM)$.

Множество всех тензорных полей типа (p, q) на многообразии X мы будем обозначать символом T^p_q. Ясно, что это множество является $C^\infty(M)$ - модулем.

Теорема. *Определение 2 и определение 6 эквивалентны.*

Доказательство.

1) Пусть дано определение 2. Заменим тензорное поле T в координатах

$$T = T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_q}.$$

Тогда если имеется набор форм и векторов $\omega_1, .., \omega_p, \vec{V}_1, ..., \vec{V}_q$; то мы можем записать

$$T(\omega_1, .., \omega_p, \vec{V}_1, ..., \vec{V}_q) = T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} \omega_{1,i_1} ... \omega_{p,i_p} v^{j_1}_1 ... v^{j_q}_q \in C^\infty,$$

так как $\omega_{1,i_1},..,\omega_{p,i_p}\in C^\infty$, $v_1^{j_1}...v_q^{j_q}\in C^\infty$. А это есть запись в координатах свертки: $T\otimes\omega_1\otimes..\otimes\omega_p\otimes\vec{V}_1\otimes...\otimes\vec{V}_q$.

Надо проверить, что это полилинейное отображение модулей:

1) $T(\omega_1+\omega_2,..,\omega_p,\vec{V}_1,...,\vec{V}_q) = T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}(\omega_{1,i_1}+\omega_{2,i_2})...\omega_{p,i_p}v_1^{j_1}...v_q^{j_q} = T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\omega_{1,i_1}...\omega_{p,i_p}v_1^{j_1}...v_q^{j_q} + T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\omega_{2,i_2}...\omega_{p,i_p}v_1^{j_1}...v_q^{j_q} = T(\omega_1,..,\omega_p,\vec{V}_1,...,\vec{V}_q) + T(\omega_2,..,\omega_p,\vec{V}_1,...,\vec{V}_q)$.

Для векторов аналогично.

2) $T(\omega_1,...f\omega_s,..,\omega_p,\vec{V}_1,...,\vec{V}_q) = T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\omega_{1,i_1}...f\omega_{s,i_s}...\omega_{p,i_p}v_1^{j_1}...v_q^{j_q} = fT^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\omega_{1,i_1}...\omega_{s,i_s}...\omega_{p,i_p}v_1^{j_1}...v_q^{j_q} = fT(\omega_1,..,\omega_p,\vec{V}_1,...,\vec{V}_q)$.

Таким образом получили, что тензор в старом смысле дает тензор в новом смысле.

2) Пусть дано определение 6. Каждой точке многообразия ставится в соответствие элемент из тензорного произведения $T^p_q(x) = \underbrace{T_x\otimes...\otimes T_x}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{T^*_x\otimes...\otimes T^*_x}_{q\text{ раз}}$. Это означает, что мы имеем сечение этого тензорного расслоения, т.к. $T^p_q(M)=\cup_{x\in M}T(x)$. Надо показать, что оно принадлежит классу $C^\infty(M)$. Для этого запишем тензорное поле в координатах:

$$Q = Q^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}\partial_{i_1}\otimes...\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\otimes...\otimes dx^{j_q} =$$

$$= Q(\partial_{i_1},...,\partial_{i_p},dx^{j_1},...,dx^{j_q})\partial_{i_1}\otimes...\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\otimes...\otimes dx^{j_q}\in C^\infty,$$

так как $Q(\partial_{i_1},...,\partial_{i_p},dx^{j_1},...,dx^{j_q})\in C^\infty$ и $\partial_{i_1}\otimes...\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\otimes...\otimes dx^{j_q}\in C^\infty$. Теорема доказана.

7. Определение связности дает ковариантную производную векторного поля. Теперь распространим эту ковариантную производную на любые тензорные поля. Во-первых, распространим ее на формы:

$$(\nabla_{\vec{X}}\omega)(\vec{Y}) = \vec{X}\omega(\vec{Y}) - \omega(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y})$$

где $\omega(\vec{Y})$ - функция. Покажем, что это есть линейное отображение модулей:

$$(\nabla_{\vec{X}}\omega)(\vec{Y}_1+\vec{Y}_2) = \vec{X}\omega(\vec{Y}_1+\vec{Y}_2) - \omega(\nabla_{\vec{X}}(\vec{Y}_1+\vec{Y}_2)) =$$

$$= \vec{X}(\omega(\vec{Y}_1)+\omega(\vec{Y}_2)) - \omega(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}_1+\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}_2)) =$$

$$= \vec{X}\omega(\vec{Y}_1)+\vec{X}\omega(\vec{Y}_2)-\omega(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}_1)-\omega(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}_2) = (\nabla_{\vec{X}}\omega)(\vec{Y}_1)+(\nabla_{\vec{X}}\omega)(\vec{Y}_2)(\nabla_{\vec{X}}\omega)(f\vec{Y}) =$$

$$= \vec{X}\omega(f(\vec{Y}) - \omega(\nabla_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = \vec{X}(f\omega(\vec{Y}) - \omega((\vec{X}f)\vec{Y} + f\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}) =$$

$$= (\vec{X}f)\omega(\vec{Y}) + f(\vec{X}\omega(\vec{Y})) - (\vec{X}f)\omega(\vec{Y}) - f\omega(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}) =$$
$$= f(\vec{X}\omega(\vec{Y}) - \omega(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y})) = f\nabla_{\vec{X}}\omega(\vec{Y}).$$

Покажем, что полученное отображение линейно относительно $\vec{X}$.

$$(\nabla_{f_1\vec{X}_1+f_2\vec{X}_2}\omega)(\vec{Y}) = (f_1\vec{X}_1 + f_2\vec{X}_2)\omega(\vec{Y}) - \omega(\nabla_{f_1\vec{X}_1+f_2\vec{X}_2}\vec{Y}) =$$
$$= f_1(\vec{X}_1\omega)\vec{Y})) + f_2(\vec{X}_2\omega)\vec{Y})) - f_1\omega(\nabla_{\vec{X}_1}\vec{Y}) - f_2\omega(\nabla_{\vec{X}_2}\vec{Y}) =$$
$$= f_1((\nabla_{\vec{X}_1}\omega)(\vec{Y})) + f_2((\nabla_{\vec{X}_2}\omega)(\vec{Y}))$$

Получаем, что $(\nabla_{\vec{X}}\omega)(\vec{Y})$ - тензорное поле типа (0,2). После того как мы ввели ковариантную производную для функций, для векторных полей и для форм, естественно ввести ее для произвольных тензорных полей. Положим:

$$(\nabla_{\vec{X}}T)(\omega_1, .., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) = \vec{X}T(\omega_1, .., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) - \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j, ..., \vec{X}_q).$$

Покажем, что это есть отображение модулей:

$$1) \quad (\nabla_{\vec{X}}T)(\omega_1, ..., \omega_i^1 + \omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) =$$
$$= \vec{X}T(\omega_1, ..., \omega_i^1 + \omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}}(\omega_i^1 + \omega_i^2), ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_i^1 + \omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j, ..., \vec{X}_q) =$$
$$= \vec{X}T(\omega_1, ..., \omega_i^1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) + \vec{X}T(\omega_1, ..., \omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\omega_i^1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) - \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_i^1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j, ..., \vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j, ..., \vec{X}_q) =$$

$$= (\nabla_{\vec{X}} T)(\omega_1, ..., \omega_i^1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) + (\nabla_{\vec{X}} T)(\omega_1, ..., \omega_i^2, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q).$$

$$(\nabla_{\vec{X}} T)(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^1 + \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q) =$$
$$= \vec{X} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^1 + \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}} \omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^1 + \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}} (\vec{X}_j^1 + \vec{X}_j^2), ..., \vec{X}_q) =$$
$$= \vec{X} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^1, ..., \vec{X}_q) + \vec{X} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}} \omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^1, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}} \omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}} \vec{X}_j^1, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}} \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q) =$$
$$= (\nabla_{\vec{X}} T)(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^1, ..., \vec{X}_q) + (\nabla_{\vec{X}} T)(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_j^2, ..., \vec{X}_q).$$

2) $$(\nabla_{\vec{X}} T)(\omega_1, ..., f\omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) =$$

$$= \vec{X} T(\omega_1, ..., f\omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}} f\omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) -$$
$$- \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., f\omega_i, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}} \vec{X}_j, ..., \vec{X}_q) =$$
$$= f \vec{X} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q) -$$

$$-f\sum_{i=1}^{p}T(\omega_1,...,\nabla_{\vec{X}}\omega_i,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)-$$
$$-f\sum_{j=1}^{q}T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j,...,\vec{X}_q)=$$
$$=f(\nabla_{\vec{X}}T)(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q).$$

$$(\nabla_{\vec{X}}T)(\omega_1,...,\omega_p,f\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)=\vec{X}T(\omega_1,...,\omega_p,f\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{i=1}^{p}T(\omega_1,...,\nabla_{\vec{X}}\omega_i,...,\omega_p,f\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)-$$
$$-\sum_{j=2}^{q}T(\omega_1,...,\omega_p,f\vec{X}_1,...,\nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j,...,\vec{X}_q)-$$
$$-T(\omega_1,...,\omega_p,\nabla_{\vec{X}}(f\vec{X}_1),\vec{X}_2,...,\vec{X}_q)=$$
$$=(\vec{X}f)T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)+f\vec{X}T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)-$$
$$-f\sum_{i=1}^{p}T(\omega_1,...,\nabla_{\vec{X}}\omega_i,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)-$$
$$-f\sum_{j=2}^{q}T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\nabla_{\vec{X}}\vec{X}_j,...,\vec{X}_q)-$$
$$-(\vec{X}f)T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q)-fT(\omega_1,...,\omega_p,\nabla_{\vec{X}}\vec{X}_1,\vec{X}_2,...,\vec{X}_q)=$$
$$=f(\nabla_{\vec{X}}T)(\omega_1,...,\omega_p,\vec{X}_1,...,\vec{X}_q).$$

Покажем, что полученное отображение линейно относительно $\vec{X}$.

$$(\nabla_{f_1\vec{X}_1+f_2\vec{X}_2}T)(\omega_1,...,\omega_p,\vec{Y}_1,...,\vec{Y}_q)=(f_1\vec{X}_1+f_2\vec{X}_2)T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{Y}_1,...,\vec{Y}_q)-$$
$$-\sum_{i=1}^{p}T(\omega_1,...,\nabla_{f_1\vec{X}_1+f_2\vec{X}_2}\omega_i,...,\omega_p,\vec{Y}_1,...,\vec{Y}_q)=$$
$$-\sum_{j=1}^{q}T(\omega_1,...,\omega_p,\vec{Y}_1,...,f_1\nabla_{\vec{X}_1}\vec{Y}_j+f_2\nabla_{\vec{X}_2}\vec{Y}_j,...,\vec{Y}_q)=$$

$$= f_1 \vec{X}_1 T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_q) + f_2 \vec{X}_2 T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_q) -$$

$$- f_1 \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}_1} \omega_i, ..., \omega_p, \vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_q) -$$

$$- f_2 \sum_{i=1}^{p} T(\omega_1, ..., \nabla_{\vec{X}_2} \omega_i, ..., \omega_p, \vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_q) =$$

$$- f_1 \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}_1} \vec{Y}_j, ..., \vec{Y}_q) -$$

$$- f_2 \sum_{j=1}^{q} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \nabla_{\vec{X}_2} \vec{Y}_j, ..., \vec{Y}_q) =$$

$$= f_1 \left((\nabla_{\vec{X}_1} T)(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_q) \right) + f_2 \left((\nabla_{\vec{X}_2} T)(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_q) \right)$$

Получаем, что $\nabla_{\vec{X}} T(\omega_1, ..., \omega_p, \vec{X}_1, ..., \vec{X}_q)$- тензорное поле типа $(p,\ q+1)$.

8. Упражнение. Записать, как выглядят формулы для координат ковариантной производной тензорных полей валентностей:

1) (0, 0); 2) (0, 1); 3) (1, 0); 4) (1, 1); 5) (2, 0); 6) (0, 2).

Ответ.

1) $f \in T_0^0(M)$, $\nabla_k f = \partial_k f$;
2) $f \in T_1^0(M)$, $\nabla_k f^i = \partial_k f^i + \Gamma_{km}^i f^m$;
3) $f \in T_0^1(M)$, $\nabla_k f_j = \partial_k f_j - \Gamma_{kj}^m f_m$;
4) $f \in T_1^1(M)$, $\nabla_k f_j^i = \partial_k f_j^i + \Gamma_{km}^i f_j^m - \Gamma_{kj}^m f_m^i$;
5) $f \in T_0^2(M)$, $\nabla_k f_{ij} = \partial_k f_j - \Gamma_{ki}^m f_{mj} - \Gamma_{kj}^m f_{im}$;
6) $f \in T_2^0(M)$, $\nabla_k f^{ij} = \partial_k f^{ij} + \Gamma_{km}^i f^{mj} + \Gamma_{km}^j f^{im}$.

9. Упражнение. Пусть тензорное поле $t \in T_0^2(M)$ относительно некоторой карты на многообразии M имеет координаты

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 \\ 2x^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты ковариантной производной этого тензора относительно линейной связности без кручения с коэффициентами:

$\Gamma_{11}^1 = (x^1)^2, \quad \Gamma_{12}^1 = x^1 x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = (x^2)^2, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x^1}{x^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$

Ответ. $\nabla_1 t_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - (x^1 + x^2)((x^1)^2 - \frac{x^1}{x^2}) \\ -2x^1(1 + x^1 x^2) & -2\frac{x^1}{x^2} - (x^1 + 3x^2) x^1 x^2 \end{pmatrix}$,

$$\nabla_2 t_{ij} = \begin{pmatrix} -(x^1+3x^2)\frac{x^1}{x^2} & 1-(x^1+x^2)x^1x^2-\frac{x^1}{x^2} \\ 2(1-x^1x^2)^2-\frac{x^1}{x^2} & -(x^1+3x^2)(x^2)^2 \end{pmatrix}.$$

10. Упражнение. На двумерном многообразии в локальных координатах (x,y) заданы коэффициенты линейной связности без кручения: $\Gamma^1_{11}=x^2$, $\Gamma^1_{12}=xy$, $\Gamma^1_{22}=y^2$, $\Gamma^2_{11}=0$, $\Gamma^2_{12}=\frac{x}{y}$, $\Gamma^2_{22}=0$.

Найти координтату $\nabla_1 t^2_{21}$ ковариантной производной тензора t с координатами $t^1_{11}=0$, $t^1_{12}=x+y$, $t^1_{21}=2y$, $t^1_{22}=1$, $t^2_{11}=2x$, $t^2_{12}=x-y$, $t^2_{21}=xy$, $t^2_{22}=0$.

Ответ. $y(1-2x^2-x^3)$.

3. Параллельный перенос вектора вдоль кривой

1. Пусть (M,∇) - гладкое многообразие с линейной связностью, I - конечный или бесконечный промежуток на $\mathbb{R}$, $\gamma : t\in I\to\gamma(t)\in M$ гладкая кривая. Отображение $\vec{X} : t\in I\to\vec{X}(t)\in T_{\gamma(t)}M$ называется *векторным полем вдоль кривой* γ. X *гладко*, если для любого $t_0\in I$ существует карта $c=(U,\varphi)$ на M в точке $\gamma(t_0)$ такая, что координаты $X^i=X^i(t)$, $t\in\gamma^{-1}(U)$, векторного поля $\vec{X}$ являются гладкими функциями. Пусть Ξ - множество всех гладких векторных полей вдоль гладкой кривой γ. Можно определить отображение

$$\frac{\nabla}{dt} : \vec{X}\in\Xi\to\frac{\nabla}{dt}\vec{X}\in\Xi,$$

называемое *ковариантным дифференцированием вдоль кривой* γ. Координаты векторного поля $\frac{\nabla}{dt}\vec{X}$, называемого *ковариантной производной векторного поля* $\vec{X}$ *вдоль кривой* γ, определяются так:

$$\frac{\nabla}{dt}X^k(t)=\frac{d}{dt}X^k(t)+\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}(t)X^j(t).$$

Это определение не зависит от выбора карт в точках кривой.

2. Говорят, что векторное поле $\vec{X}\in\Xi$ *параллельно вдоль* γ, если $\frac{\nabla}{dt}\vec{X}$. В локальных координатах это условие записывается в виде

$$\frac{d}{dt}X^k(t)+\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}(t)X^j(t)=0.$$

Пусть числа a, b принадлежат области определения кривой γ промежутку I, а $p=\gamma(a)$, $q=\gamma(b)$ то есть кривая γ *соединяет точки* p, q. Говорят, что *вектор* $\vec{Z} \in T_qM$ *получен параллельным переносом вектора* $\vec{Y} \in T_pM$ *вдоль кривой* γ, если существует векторное поле $\vec{X} \in \Xi$, параллельное вдоль γ и такое, что $\vec{X}(a) = \vec{Y}$, $\vec{X}(b) = \vec{Z}$. Для двух точек $p, q \in M$ зафиксируем кривую γ, соединяющую эти точки. Тогда определено отображение $P_\gamma : T_pM \to T_qM$, которое каждому вектору $\vec{Y} \in T_pM$ ставит в соответствие вектор $\vec{Z} \in T_qM$ в точке q, полученный из параллельным переносом вдоль γ. *Параллельный перенос* P_γ *есть изоморфизм векторных пространств.*

3. Пусть (M, ∇) - многообразие с линейной связностью. Обозначим через C_p множество всех кусочно-гладких петель в точке $p \in M$, то есть множетсво кусочно-гладких отображений $\gamma : [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Определено умножение петель $\gamma, \tau \in C_p$

$$(\gamma\tau)(t) = \begin{cases} \tau(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \gamma(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Пусть H_p - множество параллельных переносов вдоль петель в p. Тогда $P_{\gamma\tau} = P_\gamma \circ P_\tau$, таким образом, на множестве H_p определена операция умножения. Множество параллельных переносов H_p есть подруппа в группе невырожденных линейных операторов $GL(T_pM)$. H_p называется *группой голономии* связности ∇ в точке p.

4. *Геодезической линией линейной связности* ∇ на многообразии M называется кривая $\gamma : (a, b) \to M$, касательный вектор $\dot{\gamma}$ которой переносится вдоль этой кривой параллельно, то есть

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0.$$

Кривая γ, заданная в локальных координатах u^i параметрическими уравнениями $u^i = u^i(t)$, является геодезической тогда и только тогда, когда функции $u^i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(u^m(t))\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0. \tag{3.1}$$

Если M - двумерное многообразие, систему уравнений (3.1), исключив параметр t, можно свести к одному уравнению (в котором $u = u^1$, $v = u^2$):

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + \left(\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{22}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{21}\right)\frac{dv}{du} - \Gamma^2_{11},$$

при этом случай $\frac{du}{dt} = 0$ надо рассмотреть отдельно. Аналогично, систему уравнений (3.1) можно свести к уравнению

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{dv}\right)^3 + \left(\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21}\right)\frac{du}{dv} - \Gamma^1_{22},$$

при этом случай $\frac{dv}{dt} = 0$ надо также рассмотреть отдельно.

5. Упражнение. На многообразии M со связностью из задачи 2 даны кривая γ с уравнениями $x^1(t) = 0$, $x^2(t) = t$, $t \in (0, 3)$, и две точки $A_0(t_0 = 1)$, $A_1(t_1 = 2)$ на этой кривой. Перенести параллельно вдоль γ из точки A_0 в точку A_1:

a) вектор $\vec{v}_0 = (v^1_0, v^2_0) \in T_{A_0}M$,

b) ковектор $\alpha_0 = (\alpha^0_1, \alpha^0_2) \in (T_{A_0}M)^*$.

Ответ. a) $\left(-\frac{7}{3}v^2_0 + v^1_0,\ v^2_0\right)$. b) $(\alpha^0_1,\ \frac{7}{3}\alpha^0_1 + \alpha^0_2)$.

6. Упражнение. На задана $\mathbb{R}^2$ связность ∇, все коэффициенты которой в стандартной системе координат (x^1, x^2) тождественно равны нулю, кроме коэффициента $\Gamma^2_{22} \equiv -1$. Найти результат параллельного переноса вектора $\vec{W} = (1, 0)$ вдоль кривой $x^1(t) = 2t + 1$, $x^2(t) = -t$, $t \in [0, 1]$, из точки $A_0(t_0 = 0)$ в точку $A_1(t_1 = 1)$.

Ответ. $(1, 0)$.

7. Упражнение. На задана $\mathbb{R}^2$ связность ∇, все коэффициенты которой в стандартной системе координат (x^1, x^2) тождественно равны нулю, кроме коэффициента $\Gamma^1_{12} \equiv 1$.

a) Найти коэффициент связности Γ^1_{11} (u^1, u^2) в системе координат $u^1 = x^1 + x^2$, если $u^2 = x^1 - x^2$;

b) Найти векторное поле $\vec{V}$, переносящееся параллельно вдоль кривой $x^1(t) = t$, $x^2(t) = -t$, $t \in [0, 1]$, если $\vec{V}(0) = (1, 1)$.

Ответ. a) $\frac{1}{4}$, b) $(1 - t,\ 1)$.

4. Тензоры кручения и кривизны

1. *Тензор кручения линейной связности* ∇ на многообразии M есть тензорное поле типа (2, 1), задаваемое в координатах соотношением

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}.$$

Тензор кручения в точке p равен нулю тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки существует система координат, в которой коэффициенты связности в точке p обращаются в нуль. Если тензор кручения связности ∇ тождественно равен нулю, то говорят, что ∇ есть связность *без кручения* или *симметричная связность.*

2. Упражнение. Доказать, что если Γ^k_{ij} - коэффициенты некоторой линейной связности, то $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ суть координаты тензора.

3. Упражнение. Доказать, что если $\vec{X}$, $\vec{Y}$ - векторные поля, а T - тензор кручения линейной связности ∇, то

$$T(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - [\vec{X}, \vec{Y}].$$

4. *Тензор кривизны линейной связности* ∇ на многообразии M есть тензорное поле типа (3, 1), задаваемое в координатах соотношением

$$R^m_{ijk} = \partial_i\Gamma^m_{jk} - \partial_j\Gamma^m_{ik} + \Gamma^m_{is}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^m_{js}\Gamma^s_{ik}.$$

5. Упражнение. Доказать, что при замене координат $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$

$$R^m_{ijk} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}R^{m'}_{i'j'k'}.$$

6. Упражнение. Доказать, что для векторных полей $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ на M выполняется равенство

$$R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = \nabla_{\vec{X}}\nabla_{\vec{Y}}\vec{Z} - \nabla_{\vec{Y}}\nabla_{\vec{X}}\vec{Z} - \nabla_{[\vec{X},\vec{Y}]}\vec{Z}.$$

7. Тензор $R_{ij} = R^s_{sij}$ называется *тензором Риччи* связности ∇.

8. Пусть ∇ есть связность без кручения на многообразии M. Тогда ее тензор кривизны удовлетворяет следующим тождествам:

$$R^m_{ijk} + R^m_{kij} + R^m_{jki} = 0,$$

$$\nabla_i R^q_{jkp} + \nabla_k R^q_{ijp} + \nabla_j R^q_{kip} = 0.$$

Первое тождество называется *тождеством Бианки*, а второе - *дифференициальным тождеством Бианки-Падова.*

5. Риманова связность

1. Пусть на многообразии M задано тензорное поле g типа $(2, 0)$ такое, что в каждой точке $p \in M$ тензор g_p задает евклидово скалярное произведение, то есть выполняются условия:

1) *симметричность*: $g_p(\vec{X}, \vec{Y}) = g_p(\vec{Y}, \vec{X})$ для любых $\vec{X}, \vec{Y} \in T_pM$;

2) *положительная определенность*: $g_p(\vec{X}, \vec{X}) \geq 0$ для любого $\vec{X} \in T_pM$ и $g_p(\vec{X}, \vec{X}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{X} = 0$.

Тензорное поле g называется *римановой метрикой* или *римановым метрическим тензором* на многообразии M. Пара (M, g), где M - гладкое многообразие, g - гладкая риманова метрика на M, называется *римановым многообразием.*

2. Если (M, g) - риманово многообразие, то на M определен тензор типа (0, 2) с координатами g^{ij}, однозначно определяемыми соотношениями $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Тензор с координатами g^{ij} называется *взаимным к метрическому.*

3. Упражнение. Пусть g_{ij} - координаты метрического тензора, g^{ij} - компоненты матрицы, обратной к матрице $||g_{ij}||$. Доказать, что g^{ij} - координаты тензора.

4. Связность ∇ на римановом многообразии (M, g) называется *римановой связностью*, если 1) ∇ не имеет кручения; 2) $\nabla_{\vec{X}} g = 0$ для любых $p \in M$ и $\vec{X} \in T_pM$. *На римановом многообразии существует единственная риманова связность* ∇. Коэффициенты римановой связности находятся по формуле:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}).$$

5. Параллельный перенос в римановой связности есть изоморфизм евклидовых векторных пространств, то есть для любой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ параллельный перенос $P_\gamma : (T_{\gamma(a)}M, g_{\gamma(a)}) \to (T_{\gamma(b)}M, g_{\gamma(b)})$ обладает следующим свойством $g_{\gamma(b)}(P_\gamma v, P_\gamma w)$, для любых $v, w \in T_{\gamma(a)}M$.

6. На римановом многообразии определен *риманов тензор кривизны* с координатами $R_{ijkl} = g_{ls}R^s_{ijk}$, удовлетворяющий следующим тождествам:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl},$$
$$R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0,$$
$$R_{ijkl} = -R_{ijlk},$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

7. С помощью риманова тензора кривизны можно строить различные инварианты римановой связности, а значит и римановой метрики. Отметим, что *тензор Риччи римановой связности симметричен*: $R_{ij} = R_{ji}$.

8. Упражнение. Найти тензор Риччи двумерного риманова многообразия с метрикой $g(x) = e^{f(x)}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2)$, где f есть некоторая гладкая функция.

Ответы. $R_{11} = R_{22} = -\frac{1}{2}(\partial_{11}f + \partial_{22}f)$, $R_{12} = R_{21} = 0$.

9. Функция $R = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}g^{km}R_{kijm}$ называется *скалярной кривизной риманова многообразия*.

10. Пусть (M, g) - риманово многообразие, $p \in M$, L - двумерное подпространство в T_pM и $\vec{V}, \vec{W} \in T_pM$ - ортореп ер в L. Число

$$K(L) = R_{ijkm}V^iW^jW^kV^m$$

называется *секционной кривизной риманова многообразия в точке p в двумерном направлении L*. Это определение не зависит от выбора ортореп ера в L.

11. Риманово многообразие (M, g), у которого секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от двумерного направления, называется *пространством постоянной кривизны*. Тензор кривизны пространства постоянной кривизны K имеет вид

$$R^m_{ijk} = K(g_{ik}\delta^m_j - g_{jk}\delta^m_i).$$

6. Почти комплексная связность

1. Пусть M - комплексное многообразие [12]. Касательное пространство в каждой точке комплексного многообразия является линейным пространством над полем комплексных чисел. Это линейное пространство можно рассматривать как действительное линейное пространство с аффинором J, полагая, что $J\vec{X} = i\vec{X}$. Учитывая это обстоятельство, естественно, обобщая понятие комплексного многообразия, дать следующее определение. Почти комплексной структурой на действительном многообразии M называется тензорное поле J, которое в каждой точке $x \in M$ есть эндоморфизм касательного пространства T_xM такой, что $J^2 = -1$. Многообразие с фиксированной почти комплексной структурой называется почти комплексным многообразием.

2. Упражнение. Показать, что каждое почти комплексное многообразие имеет четную размерность и ориентируемо.

Указание.

1) Почти комплексная структура определяет в каждом касательном пространстве эндоморфизм J такой, что $J^2 = -E$. Заметьте, что $\det(-E) = 1$ только в случае четной размерности многообразия.

2) Зафиксировать в каждом T_xM базис $\vec{X}_1, ..., \vec{X}_n, J\vec{X}_1, ..., J\vec{X}_n$ и ограничиться картами, для которых соответствующий голономный базис связан с данным преобразованием с положительным определителем.

3. Тензорное поле $N(\vec{X},\vec{Y}) = 2([J\vec{X}, J\vec{Y}] - [\vec{X},\vec{Y}] - J[\vec{X}, J\vec{Y}] - J[J\vec{X},\vec{Y}])$ называется *кручением почти комплексной структуры.*

4. Упражнение. Показать, что объект из предыдущего пункта является тензорным полем типа (1,2)

5. Упражнение. Почти комплексная структура называется интегрируемой, если она совпадает с комплексной структурой. Показать, что интегрируемость почти комплексной структуры эквивалентна существованию такого атласа, в каждой карте которого компоненты тензора J принимают постоянные значения.

6. Теорема [13]. *Почти комплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда ее кручение равно нулю.*

7. Линейная связность ∇ называется почти комплексной связностью, если $\nabla J = 0$.

8. Упражнение. Показать, что каждое многообразие с разбиением единицы, допускает линейную связность такую, что ее кручение S задается формулой $N = 8S$.

Указание.

1) Показать, что всякое многообразие с разбиением единицы допускает линейную связность ∇.

2) Показать, что искомая связность $\tilde{\nabla}$ задается равенством

$$\tilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{Y} = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - Q(\vec{X},\vec{Y}),$$

где $Q(\vec{X},\vec{Y}) = (\nabla_{J\vec{Y}})\vec{X} + J\nabla_{\vec{Y}}\vec{X} + 2(\nabla_{\vec{X}}J)\vec{Y}$.

9. Эрмитовой метрикой на почти комплексном многообразии M называется риманова метрика g, инвариантная относительно почти комплексной структуры $J : g(J\vec{X}, J\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$. Эрмитова метрика на почти комплексном многообразии называется кэлеровой метрикой, если фундаментальная 2-форма $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, J\vec{Y})$ замкнута. Комплексное многообразие с кэлеровой метрикой называется кэлеровым многообразием.

7. Симплектические связности

1. Симплектическое многообразие есть пара (M, ω), где M - гладкое многообразие, ω - симплектическая форма, т. е. не вырожденная замкнутая внешняя 2-форма. Замкнутость формы означает обращение в нуль ее внешнего дифференциала.

2. Пусть ∇ - ковариантная производная на M. Говорят, что ∇ сохраняет ω, если $\nabla\omega = 0$ или $\vec{Z}(\omega(\vec{X}, \vec{Y})) = \omega(\nabla_{\vec{Z}}\vec{X}, \vec{Y})$ для любых векторных полей $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$. Если сохраняющая симплектическую форму связность имеет нулевое кручение, то ее называют симплектической связностью. Как мы видим, симплектическая связность обладает теми же свойствами, что и связность Леви-Чивита в римановом многообразии. Принципиальное отличие римановой геометрии от симплектической заключается в том, что связность Леви-Чивита как метрическая связность с нулевым кручением уникальна, в то время как симплектических связностей бесконечно много. В то же время, задавая на многообразии M дополнительные структуры и требуя от симплектической связности естественную совместимость с этими структурами, мы добиваемся ее единственности. В таких случаях тройку (M, ω, ∇) принято называть специальным симплектическим пространством. Соответствующие симплектические связности при этом называются специальными симплектическими связностями. Ниже будет приведен важнейший пример специального симплектического пространства - кэлерова пространства.

3. Упражнение. Показать, что функции $\Pi^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$ являются компонентами симметрической связности.

Указание. Воспользуйтесь формулой преобразования координат.

4. Упражнение. Показать, что существует биективное соответствие между всеми связностями, сохраняющими ω и множеством всех симметрических связностей.

Указание. В координатах Дарбу [15] компоненты симплектической формы ω_{ij} постоянны. В этом случае равенство $\nabla\omega = 0$ получает следующее координатное представление

$$\partial_k \omega_{ij} = \omega_{il}\Gamma^l_{kj} - \omega_{jl}\Gamma^l_{ki} = \Gamma_{ikj} - \Gamma_{jki}. \qquad (1)$$

Известно, что разность двух связностей есть тензор. Отсюда следует, что для любых двух симметрических связностей ∇, ∇', сохраняющих одну и ту же форму ω, разность $\Gamma_{ijk} - \Gamma'_{ijk}$ является 3-ковариантным тензором, который симметричен по всем индексам в координатах Дарбу, и, следовательно, в любых координатах. Воспользовавшись равенством

$$\partial_k \omega_{ij} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_i \omega_{jk} = 0,$$

вытекающим из замкнутости формы ω, получаем соотношение

$$\Gamma_{kji} = \frac{1}{2}(\partial_k \omega_{ij} - \partial_i \omega_{jk} - \partial_j \omega_{ki}) + (\Pi_{kij} + \Pi_{jik} - \Pi_{ijk}).$$

5. Упражнение. Показать, что симметрическая связность, сохраняющая невырожденную форму ω, существует тогда и только тогда когда ω замкнутая.

6. Упражнение. Полилинейную форму, определяемую равенством

$$R(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \vec{W}) = \omega(\vec{X}, R(\vec{Z}, \vec{W})\vec{Y})$$

принято называть тензором кривизны симплектического многообразия. Показать, что для тензора кривизны симплектического многообразия выполняется равенство

$$R_{(ijkl)} = R_{ijkl} + R_{lijk} + R_{klij} + R_{jkli} = 0.$$

7. Упражнение. Пусть $\sigma(\vec{X}, \vec{Y}) = \mathrm{tr}(\vec{V} \to R(\vec{V}, \vec{X})\vec{Y})$ - тензор Риччи симплектической связности. Показать, что в симплектическом случае тензор Риччи симметричен.

Указание. Воспользоваться предыдущим упражнением.

8. Основной пример симплектической связности - связность Леви-Чивита на кэлеровом многообразии M с метрикой g и комплексной структурой J.

Связь между структурными тензорами кэлерова пространства определяется равенством $\omega(\vec{X},\vec{Y}) = g(\vec{X}, J\vec{Y})$.

8. Ковариантное дифференцирование в почти контактных метрических пространствах

Пусть M - гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ - модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Иногда тензорное поле будем называть тензором.

1. Определение. *Почти контактной метрической структурой на* M называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на M, где φ - тензор типа (1, 1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g - (псевдо) риманова метрика. При этом

$$a)\ \varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \quad b)\ \eta(\vec{\xi}) = 1,$$

$$c)\ g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X},\vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \quad d)\ d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0 \tag{1}$$

$\vec{X},\vec{Y} \in \Gamma(TM)$. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{X},\vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ называется *фундаментальной формой структуры*.

Рассмотрим гладкое распределение D на многообразии M, определяемое равенством

$$D_x = \left\{ \vec{X}_x \in T_xM : \eta(\vec{X}_x) = 0 \right\}.$$

Будем в дальнейшем называть распределение D распределением почти контактной метрической структуры. Одномерное распределение $D^\perp = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ назовем оснащением распределения D.

2. Упражнение. Показать, что $TM = D \oplus D^\perp$.

3. Определение. Карту $K(x^i)$ $(i, j, k = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ на многообразии M будем называть адаптированной к распределению D, если $D^\perp = \mathrm{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$.

4. Упражнение. Показать, что закон преобразования для адаптированных карт $K(x^i)$ и $\tilde{K}(x^{\tilde{i}})$ имеет вид:

$$x^{\tilde{a}} = x^{\tilde{a}}(x^a),$$

$$x^{\tilde{n}} = x^{\tilde{n}}(x^a, x^n).$$

Указание. Воспользоваться формулой перехода от одного голономного базиса к другому и условием $D^\perp = \mathrm{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$.

5. Пусть $P : TM \to D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^i)$ - адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = \mathrm{Span}(\vec{e}_a)$.

6. Упражнение. Показать, что векторные поля $\vec{e}_a$ линейно независимы.

Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Потребуем от всех адаптированных карт дополнительно выполнения равенства $\vec{\xi} = \partial_n$.

7. Упражнение. Показать, что $\theta^n = \eta$.

Указание. Проверить справедливость равенств $\theta^n(\vec{e}_a) = \eta(\vec{e}_a)$.

8. Упражнение. Доказать, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$.

Решение. Воспользуемся равенством

$$d\eta(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2}(\vec{X}\eta(\vec{Y}) - \vec{Y}\eta(\vec{X}) - \eta([\vec{X}, \vec{Y}])). \qquad (2)$$

Полагая, что $\vec{X} = \vec{e}_a$, $\vec{Y} = \vec{e}_b$ получаем

$$d\eta(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \frac{1}{2}\eta([\vec{e}_a, \vec{e}_b]).$$

Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$. Из последних равенств следует справедливость доказываемого равенства.

9. Упражнение. Доказать, что $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Указание. Воспользоваться формулами (1d) и (2)

10. Упражнение. Доказать, что

$$a)\ \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad b)\ \eta \circ \varphi = 0, \quad c)\ \eta(\vec{X}) = g(\vec{X}, \vec{\xi}), \quad \forall \vec{X} \in \Gamma(TM)$$

11. Определение. Почти контактное метрическое пространство называется *контактным метрическим пространством*, если $\Omega = \omega$. Определим эндоморфизм ψ, полагая $g(\vec{X}, \psi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$. В случае контактного пространства, таким образом, получаем $\psi = \varphi$. Назовем эндоморфизм ψ вторым структурным эндоморфизмом.

Введем в рассмотрение тензорные поля h и C, определяемые соответственно равенствами:

$$a)\ h\vec{X} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)\vec{X}, \quad b)\ C(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{X}, \vec{Y}). \tag{3}$$

12. Определение. Многообразие X называется K-контактным, если оно контактно и $C = 0$.

13. Упражнение. Проверить, что в адаптированных координатах выполняются следующие равенства

$$a)\ h^a_b = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi^a_b}{\partial x^n}, \quad b)\ C^a_b = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^n}. \tag{4}$$

Заметим, что форма η, как правило, называется контактной лишь в случае, когда $\operatorname{rk}\omega = 2m$, т.е. лишь в том случае, когда ограничение формы ω на распределении D определяет невырожденную форму. Мы будем называть форму η контактной даже в тех случаях, когда для нас будет принципиальным выполнение условия $\operatorname{rk}\omega < 2m$.

14. Определение. Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению $D^{\perp}$, а ковекторный аргумент коллинеарен форме η.

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении $D^{\perp}$. Всякая тензорная структура, заданная на многообразии M, с помощью проектора $P : TM \to D$ определяет на M единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа (1, 1). Поле аффинора φ, учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма $\omega = d\eta$ также является допустимым тензорным полем.

15. Упражнение. Показать, что координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}. \tag{5}$$

16. Упражнение. Показать, что при преобразовании адаптированной системы координат компоненты допустимого тензорного поля преобразуются по следующему закону:

$$T^{a'}_{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{a}} \frac{\partial x^{b}}{\partial x^{b'}} T^{a}_{b}. \tag{6}$$

Для удобства формула приводится для тензора типа (1,1). Понятно, что ее можно продолжить для случая тензора произвольного типа. Равенства (5), (6) указывают на сходство (пока внешнее) адаптированных координат с голономными координатами.

17. Определение. Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если в окрестности каждой точки многообразия M найдется адаптированная карта, относительно которой компоненты поля постоянны. Форма $\omega = d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры.

18. Упражнение. Показать: Если распределение D интегрируемо, то всякая допустимая интегрируемая структура является интегрируемой структурой на многообразии M.

Пока определение интегрируемости допустимой тензорной структуры кажется калькой определения интегрируемости "обычной" тензорной структуры. Естественность понятия интегрируемой допустимой тензорной структуры косвенно подтверждается следующими обстоятельствами. Интегрируемое оснащение $D^{\perp}$ определяет, как известно, слоение с одномерными слоями. Если на этом слоении каким-нибудь разумным образом задать структуру гладкого многообразия, то всякая допустимая интегрируемая тензорная структура естественным образом определит на таком многообразии интегрируемую тензорную структуру уже в обычном смысле.

19. Упражнение. Показать, что если допустимая тензорная структура T с компонентами T^{a}_{b} интегрируема, то $\frac{\partial}{\partial x^{n}} T^{a}_{b} = 0$.

Указание. Воспользоваться упражнением 16.

Важнейшим результатом геометрии почти комплексных многообразий является утверждение о том, что интегрируемость почти комплексной структуры эквивалентна обращению в нуль тензора Нейенхейса. Мы сейчас сформулируем и докажем аналогичное утверждение для структуры φ.

20. Теорема. Допустимая почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $P(N_{\varphi}) = 0$.

Доказательство. Выражение для отличных от нуля компонент кручения Нейенхейса $N_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = [\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}] + \varphi^2[\vec{X}, \vec{Y}] - \varphi[\varphi\vec{X}, \vec{Y}] - \varphi[\vec{X}, \varphi\vec{Y}]$ тензора φ в адаптированных координатах имеет следующий вид:

$$N^e_{ab} = \varphi^c_a \vec{e}_c \varphi^e_b - \varphi^d_b \vec{e}_d \varphi^e_a + \varphi^e_c \vec{e}_b \varphi^c_a - \varphi^e_d \vec{e}_a \varphi^d_b, \tag{7}$$

$$N^n_{ab} = 2\varphi^c_a \varphi^d_b \omega_{dc}, \tag{8}$$

$$N^e_{na} = -\varphi^e_c \partial_n \varphi^c_a. \tag{9}$$

Таким образом, равенство $P(N_\varphi) = 0$ эквивалентно обращению в нуль (7) и (9). Тем самым, необходимость утверждения теоремы доказана. Пусть, теперь, имеет место $P(N_\varphi) = 0$. Рассмотрим достаточно малую окрестность U произвольной точки многообразия M. При этом полагаем, что $U = U_1 \times U_2$, $TU = \mathrm{Span}(\partial_a) \oplus \mathrm{Span}(\partial_n)$. Введем естественное обозначение: $T(U_1) = \mathrm{Span}(\partial_a)$. Определим над множеством U изоморфизм расслоений $\psi : D \to T(U_1)$ формулой $\psi(\vec{e}_a) = \partial_a$. Введенный изоморфизм индуцирует почти комплексную структуру на многообразии U_1, которая интегрируема в силу равенства $P(N_\varphi) = 0$. Выбирая подходящую систему координат на U_1, и, следовательно, - подходящую адаптированную систему координат на многообразии M, получаем карту, в которой компоненты аффинора φ постоянны. Теорема доказана.

21. Теорема. Пусть η - контактная форма $\mathrm{rk}\,\omega = 2m$. Тогда в окрестности каждой точки многообразия M найдется такая карта с координатами (x^i, y^i, z), что $\eta = dz - \sum_{i=1}^{2m} y^i dx^i$.

22. Упражнение. Показать, что условия $\vec{\xi} \in \ker d\eta$, $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\mathrm{rk}\,\omega = 2m$ определяют $\vec{\xi}$ однозначно.

Указание. Из максимальности ранга формы ω следует, что ее ядро одномерно. Остается воспользоваться условиями (1b), (d).

23. Упражнение. Показать, что всякая карта Дарбу является адаптированной.

Указание. Воспользоваться упражнением 22.

24. Упражнение. Доказать теорему:

Теорема. Производные $\partial_n t$ от компонент допустимого тензорного поля t в адаптированной системе координат являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа.

Указание. Воспользоваться тем, что компоненты допустимого тензорного поля при преобразовании адаптированных координат преобразуются по закону $t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q} = t^{\tilde{a}_1\ldots\tilde{a}_p}_{\tilde{b}_1\ldots\tilde{b}_q} A^{a_1}_{\tilde{a}_1} \ldots A^{\tilde{b}_q}_{b_q}$, где $A^{a_i}_{\tilde{a}_i} = \frac{\partial x^{a_i}}{\partial x^{\tilde{a}_i}}$.

25. Упражнение. Показать справедливость равенства $L_{\vec{\xi}} t^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q} = \partial_n t^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q}$, где $L_{\vec{\xi}}$ - оператор дифференцирования Ли вдоль поля $\vec{\xi}$.

26. Замечание. Равенство из упражнения 25 подчеркивает инвариантный характер утверждения теоремы 24.

27. Определение. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ - кручение Нейенхейса, образованное тензором φ.

28. Определение. Почти контактная метрическая структура является сасакиевой, если она нормальна и выполняется равенство $\Omega = d\eta$, где $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ - фундаментальная форма структуры.

29. Конструкция. Определим отображение $J : \Gamma T(M \times R) \to \Gamma T(M \times R)$, $J(\vec{X}, f\frac{d}{dt}) = (\varphi\vec{X} - f\vec{\xi}, \eta(\vec{X})\frac{d}{dt})$

30. Упражнение. Проверить, что J эндоморфизм такой, что $J^2 = -1$. Таким образом, эндоморфизм J определяет на многообразии $M \times R$ структуру почти комплексного многообразия.

Сасаки и Хатакеяма в [22] показали, что на многообразии $M \times R$ внутренним образом индуцируется почти комплексная структура J, а два года спустя Таширо в [23] заметил, что J вместе с метрикой прямого произведения задает почти эрмитову структуру на этом многообразии. Будем называть многообразие $M \times R$, снабженное этой структурой, *линейным расширением* исходного почти контактного метрического многообразия. С помощью конструкции линейного расширения неоднократно делались попытки классифицировать почти контактные метрические многообразия. Так, классическим результатом в этом направлении является известная теорема Накаямы, утверждающая, что почти контактное метрическое многообразие нормально тогда и только тогда, когда его линейное расширение является эрмитовым многообразием [19]. В 1985 г. Обинья [20] определил транссасакиевы и почти транссасакиевы многообразия как почти контактные метрические многообразия, линейное расширение которых принадлежит классу W_4 и $W_2 \otimes W_4$ соответственно в классификации Грея-Хервеллы [18].

31. Теорема. Почти контактная структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура J интегрируема.

Доказательство. Благодаря свойствам тензора Нейенхейса, ограничимся вычислением следующих его значений: $N_J((\vec{X},\vec{0}),(\vec{Y},\vec{0}))$, $N_J((\vec{X},\vec{0}),(\vec{0},\frac{d}{dt}))$ для всех $\vec{X},\vec{Y}\in\Gamma(TM)$. Проводя непосредственные вычисления, получаем:

$$N_J((\vec{X},\vec{0}),(\vec{Y},\vec{0}))=(N_\varphi(\vec{X},\vec{Y})+2d\eta(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi},\ (L_{\varphi\vec{X}}\eta)\vec{Y}-(L_{\varphi\vec{Y}}\eta)\vec{X}),$$

$$N_J\left(\left(\vec{X},\vec{0}\right),\left(\vec{0},\frac{d}{dt}\right)\right)=\left((L_{\vec{\xi}}\varphi)\vec{X},(L_{\vec{\xi}}\eta)\vec{X}\frac{d}{dt}\right).$$

Таким образом, если почти контактная метрическая структура нормальна то имеют место равенства:

$$\begin{aligned}N^{(2)}(\vec{X},\vec{Y})\equiv(L_{\varphi\vec{X}}\,\eta)\vec{Y}-(L_{\varphi\vec{Y}}\,\eta)\vec{X}=\vec{0},\\ N^{(3)}\vec{X}\equiv(L_{\vec{\xi}}\varphi)\vec{X}=\vec{0},\\ N^{(4)}\vec{X}\equiv(L_{\vec{\xi}}\eta)\vec{X}=\vec{0}.\end{aligned}\tag{10}$$

Проводя дальнейшие вычисления, получаем:

$$N^{(1)}(\vec{X},\vec{\xi})=[\vec{\xi},\vec{X}]+\varphi[\vec{\xi},\varphi\vec{X}]-\vec{\xi}\eta(\vec{X})\vec{\xi}=\vec{0}.\tag{11}$$

Применяя η к (11), получаем

$$\eta[\vec{\xi},\vec{X}]-\vec{\xi}\eta(\vec{X})=\vec{0}.\tag{12}$$

Откуда заключаем, что $N^{(4)}=\vec{0}$.

Заменяя в (12) $\vec{X}$ на $\varphi\vec{X}$, получаем $\eta[\vec{\xi},\varphi\vec{X}]=\vec{0}$, и, далее, $N^{(3)}=\vec{0}$. Окончательно, применяя η к равенству $N^{(1)}(\varphi\vec{X},\vec{Y})=\vec{0}$, убеждаемся в том, что $N^{(1)}=\vec{0}$.

Пусть ∇ - связность Леви-Чивита.

32. Упражнение. Доказать, что почти контактная метрическая структура нормальна тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\varphi(\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y}-(\nabla_{\varphi\vec{X}}\varphi)\vec{Y}-((\nabla_{\vec{X}}\eta)\vec{Y})\vec{\xi}=\vec{0}.\tag{13}$$

для всех $\vec{X},\vec{Y}\in\Gamma(TM)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что связность ∇ симметрична, т.е. выполняется равенство $[\vec{X},\vec{Y}]=\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}-\nabla_{\vec{Y}}\vec{X}$.

33. Упражнение. Проверьте справедливость равенства

$$2g((\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y},\vec{Z}) = 3[d\Omega(\vec{X},\varphi\vec{Y},\varphi\vec{Z}) - d\Omega(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})] + g(N^{(1)}(\vec{Y},\vec{Z}),\varphi\vec{X}) +$$

$$+N^{(2)}(\vec{Y},\vec{Z})\eta(\vec{X}) + 2[d\eta(\varphi\vec{Y},\vec{X})\eta(\vec{Z}) - d\eta(\varphi\vec{Z},\vec{X})\eta(\vec{Y})]. \quad (14)$$

34. Определение. Почти контактная метрическая структура является сасакиевой, если выполняются равенства $N_\varphi + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$, $\Omega = d\eta$.

35. Почти контактное метрическое пространство со структурой Сасаки называется многообразием Сасаки.

36. Теорема. Почти контактное метрическое пространство является многообразием Сасаки тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y} = g(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi} - \eta(\vec{Y})\vec{X}. \quad (15)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть почти контактная структура $\varphi,\vec{\xi},\eta,g$ является структурой Сасаки. Из равенства (1.5) с учетом $\Omega = d\eta$ $N^{(1)} = 0$, $N^{(2)} = 0$ получаем:

$$2g((\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y},\vec{Z}) = \Omega(\varphi\vec{Y},\vec{X})\eta(\vec{Z}) - \Omega(\varphi\vec{Z},\vec{X})\eta(\vec{Y}) =$$

$$= g(\vec{X},\vec{Y})\eta(\vec{Z}) - g(\vec{X},\vec{Z})\eta(\vec{Y}) = g(g(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi} - \eta(\vec{Y})\vec{X},\vec{Z}).$$

Достаточность. Подставляя в (14) $\vec{Y} = \vec{\xi}$, получаем $(\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{\xi} = g(\vec{X},\vec{\xi}) - \eta(\vec{\xi})\vec{X}$ или $-\varphi\nabla_{\vec{X}}\vec{\xi} = \eta(\vec{X})\vec{\xi} - \vec{X}$. Применяя к полученному равенству φ, получаем

$$\nabla_{\vec{X}}\vec{\xi} = -\varphi\vec{X}.$$

Откуда следует $N_\varphi + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$.

37. Пусть $(\varphi,\vec{\xi},\eta,g)$ - почти параконтактная метрическая структура, заданная на многообразии M [24], где структурные объекты удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\varphi(\vec{\xi}) = 0, \eta\circ\varphi = 0, \eta(\vec{\xi}) = 1, \varphi = id - \eta\otimes\vec{\xi},$$

$$g(\varphi\vec{X},\varphi\vec{Y}) = g(\vec{X},\vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}).$$

Почти параконтактное метрическое многообразие называется почти параконтактным пространством Коши-Римана, если выполняется следующие условия:

$$[\varphi\vec{X},\vec{Y}] + [\vec{X},\varphi\vec{Y}] \in D,$$

$$S(\vec{X},\vec{Y}) = [\vec{X},\vec{Y}] + [\varphi\vec{X},\varphi\vec{Y}] - \varphi([\vec{X},\varphi\vec{Y}] + [\varphi\vec{X},\vec{Y}]) = 0.$$

38. Упражнение. Докажите, что условию

$$[\varphi\vec{X},\vec{Y}] + [\vec{X},\varphi\vec{Y}] \in D \qquad (16)$$

эквивалентно любое из следующих условий:

$$1)\ d\eta(\vec{X},\varphi\vec{Y}) - d\eta(\vec{Y},\varphi\vec{X}) = 0;$$

$$2)\ (\nabla_{\vec{X}}\eta)(\varphi\vec{Y}) + (\nabla_{\varphi\vec{X}})(\vec{Y}) = (\nabla_{\vec{Y}}\eta)(\varphi\vec{X}) + (\nabla_{\varphi\vec{Y}}\eta)(\vec{X})$$

для любых $\vec{X},\vec{Y} \in D$.

Указания к решению.

1) Проверьте, что (16) выполняется тогда и только тогда, когда $\eta([\varphi\vec{X},\vec{Y}] + [\vec{X},\varphi\vec{Y}]) = 0$.

2) Используйте, что $d\eta(\vec{X},\vec{Y}) = -\frac{1}{2}\eta([\vec{X},\vec{Y}])$ для любых $\vec{X},\vec{Y} \in D$.

39. Упражнение. Докажите, что почти контактное метрическое многообразие M является пара-CR многообразием тогда и только тогда, когда условие

$$(\nabla_{\vec{X}}\varphi)(\vec{Y}) + (\nabla_{\varphi\vec{X}}\varphi)(\varphi\vec{Y}) = -((\nabla_{\vec{Y}}\eta)(\varphi\vec{X}) + (\nabla_{\varphi\vec{Y}}\eta)(\vec{X}))\vec{\xi}$$

выполняется для любых $\vec{X},\vec{Y} \in D$, где ∇ - связность Леви-Чевита.

Указания к решению.

Найдите выражение для $\varphi S(\vec{X},\vec{Y})$, где $S(\vec{X},\vec{Y}) = [\vec{X},\vec{Y}] + [\varphi\vec{X},\varphi\vec{Y}] - \varphi([\vec{X},\varphi\vec{Y}] + [\varphi\vec{X},\vec{Y}])$.

Определите вспомогательное тензорное поле A типа (0, 3) на D равенством $A(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) = g((\nabla_{\varphi\vec{X}}\varphi)(\varphi\vec{Y}) + (\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y},\vec{Z})$. Докажите, что $A(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) = 0$ для любых $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z} \in D$. Для этого проверьте, что $A(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) = A(\vec{Y},\vec{X},\vec{Z})$ и вычислите $A(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}) + A(\vec{X},\vec{Z},\vec{Y})$.

Используя представление тензорного поля A запишите представление $(\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y} + (\nabla_{\varphi\vec{X}}\varphi)\vec{Y} = \lambda(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi}$. Покажите, что $\lambda(\vec{X},\vec{Y}) = -(\nabla_{\vec{X}}\eta)\varphi\vec{Y} - (\nabla_{\varphi\vec{X}}\eta)\vec{Y}$. Используя второе условие из предыдущего упражнения, покажите, что $\lambda(\vec{X},\vec{Y}) = -(\nabla_{\vec{X}}\eta)\varphi\vec{Y} - (\nabla_{\varphi\vec{Y}}\eta)\vec{X}$. Для доказательства достаточности получите второе условие из предыдущего упражнения.

40. Будем говорить, что почти контактная метрическая структура почти нормальная, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0. \qquad (17)$$

Почти нормальные почти контактные метрические пространства в дальнейшем будем называть почти контактными эрмитовыми пространствами. Почти контактное эрмитово пространство назовем почти контактным кэлеровым пространством, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем почти K-контактным метрическим пространством, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$ и $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$. Различие в понятиях нормальной почти контактной метрической структуры и почти контактной эрмитовой структуры раскрывается следующей очевидной теоремой.

41. Теорема. Почти контактная эрмитова структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: $\omega(\varphi\vec{U}, \varphi\vec{V}) = \omega(\vec{U}, \vec{V})$, $\vec{U}, \vec{V} \in \Gamma D$.

42. Упражнение. Показать, что коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a, \quad \tilde{\Gamma}^n_{na} = 0, \quad \tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$

где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

В случае контактного метрического пространства выражение для коэффициентов связности Леви-Чивита приведены в [16].

43. Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [9] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$ удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{u_1}+f_2\vec{u_2}} = f_1\nabla_{\vec{u_1}} + f_2\nabla_{\vec{u_2}};$$

$$2)\nabla_{\vec{u}}f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v},$$

где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}]$.

44. Упражнение. Показать, что в адаптированных координатах мы имеем

$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}.$$

45. Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $g = 0$, $S = 0$. В адаптированных координатах мы имеем:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

46. Так же как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D.

Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ - естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ на многообразии D, где $x^{n+\alpha}$ - координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(X^a, X^{n+a}) =$, что $HD = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a)x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В работе [8] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии D, имеющее следующее координатное представление $\vec{u} = \partial_n + G^a_n\partial_{n+a}$. Компоненты объекта G^a_n преобразуются как компоненты вектора на базе. Полагая, что $G^a_n = 0$, получим продолженную связность, обозначаемую ∇^1. Тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{p[\vec{u},\vec{v}]}\vec{w} - p[q[\vec{u},\vec{v}],\vec{w}],$$

называется первым тензором кривизны Схоутена.

47. Упражнение. Показать, что координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$.

48. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны.

49. Показать, что частные производные $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Пусть $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ - почти контактная метрическая структура. Имеет место следующая теорема [1]:

50. Теорема [9]. Почти контактное метрическое многообразие допускает внутреннюю связность ∇ без кручения, такую, что $\nabla^1\varphi = 0$, тогда и только тогда, когда допустимая структура φ интегрируема.

51.Теорема [9]. Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда выполняются равенства $L_{\vec{\xi}}g = 0$, $\nabla^1\varphi = 0$, где ∇ - внутренняя метрическая связность без кручения.

52. Теорема. Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(\tilde{\nabla}\vec{X}\varphi) = d\eta(\varphi\vec{Y}, \vec{X})\vec{\xi} + \eta(\vec{Y})(\varphi\circ\psi)\vec{X} - \eta(\vec{X})(\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi)\vec{Y}.$$

53. Упражнение. Доказать теорему 52.

54. Пример. Рассмотрим арифметическое пространство R^5, $x^2x^4 \neq 0$ со структурой Сасаки, определяемой следующим образом: $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_5$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\eta = 2(dx^5 + x^2dx^1 + x^4dx^3)$, $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_4$. Очевидно, что $\omega(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$. Метрику определим с помощью равенства $g(\vec{x}, \vec{y}) = \omega(\varphi\vec{y}, \vec{x})$. Очевидно, что данное пространство является сасакиевым пространством с распределением нулевой кривизны.

55. Пример. Рассмотрим векторное расслоение (D, π, M), где D - распределение контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. На тотальном пространстве D рассматриваемого векторного расслоения определим почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta), D)$ полагая $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_n) = 0$, $J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a$, $J(\partial_n) = 0$, где $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, $\tilde{D} = HD \oplus VD$, VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D, а HD - горизонтальное распределение, определяемое внутренней линейной связностью. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D поле неголономных базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} \Gamma^a_{bc} x^{n+b} dx^c)$ - соответствующее поле кобазисов.

56. Упражнение. Проверить, что векторное поле ∂_n является полем Риба для почти контактной метрической структуры $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$.

57. Упражнение. Проверить справедливость следующей теоремы.

Теорема. Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ является почти контактной эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.

Указание. Воспользоваться равенствами

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc} x^{n+c} \partial_{n+e},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+c} P^b_{ac} \partial_{n+b},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}.$$

Предварительно проверив их справедливость.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что разности $\Gamma^k_{ij} - \tilde{\Gamma}^k_{ij}$ двух связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ образуют тензор типа (1, 2) и что любой тензор типа (1, 2) можно представить в таком виде. Доказать, что если к коэффициентам связности прибавить тензор типа (1,2), то получатся коэффициенты связности.

2. Вычислить символы Кристоффеля метрики $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$.

3. Вычислить явно символы Кристоффеля, если метрика задана в виде:

$$a)\, ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \quad b)\, ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+dx^2+dy^2)^2}, \quad c)\, ds^2 = \frac{4(dr^2+r^2d\varphi^2)}{(1+r^2)^2}.$$

4. Вычислить явно символы Кристоффеля в сферической системе координат в $\mathbb{R}^3$.

5. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$:

a) вдоль кривой $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$, т.е. вдоль параллели;

b) вдоль кривой $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, т.е. вдоль меридиана.

6. Найти ковариантные производные вдоль координатных линий и следующих векторных полей, заданных в полярных системах координат:

$$\vec{v}_1 = \left(\cos\varphi, -\frac{1}{r}\sin\varphi\right), \quad \vec{v}_2 = (0,\, 1), \quad \vec{v}_3 = (r,\, 1).$$

Все вычисления выполнить в полярной системе координат.

7. Пусть ∇ - риманова связность на евклидовой плоскости. В полярной системе координат (ρ, φ) заданы вектор $\vec{V}_0 = (V_0^1, V_0^2)$ и кривая $\rho = 2$. Перенести параллельно вектор $\vec{V}_0$ вдоль данной кривой из точки $(2, 0)$ в точку $(2, \pi/2)$.

8. На задана $\mathbb{R}^2$ связность ∇, все коэффициенты которой в стандартной системе координат (x^1, x^2) тождественно равны нулю, кроме коэффициента $\Gamma^1_{11} \equiv 1, \Gamma^2_{12} \equiv x^2$. Может ли связность ∇ быть римановой? Найти компоненту R^1_{121} тензора кривизны связности ∇.

9. На $\mathbb{R}^2$ задана метрика $g = dx^1 \otimes dx^1 + \cos(x^1)^2 dx^2 \otimes dx^2$. Найти коэффициент Γ^2_{11} римановой связности, соответствующей метрике g.

10. На многообразии M, $\dim M = n$ в локальных координатах $(u^1, ..., u^n)$ известны координаты метрического тензора $g_{ij} = e^\sigma \delta_{ij}$, где $\sigma = \sigma(u^1, ..., u^n)$. Найти коэффициенты римановой связности.

11. Пусть в некоторой системе коориднат на $\mathbb{R}^2$ единственный ненулевой коэффициент связности ∇ есть $\Gamma^1_{11} \equiv 1$. Верно ли, что тензор кривизны связности ∇ равен нулю?

12. На задана $\mathbb{R}^2$ связность ∇, все коэффициенты которой тождественно равны нулю, кроме коэффициента $\Gamma^2_{12} \equiv 1$. Найти $\nabla_i \omega_{jk}$, где $\omega = dx^1 \wedge dx^2$.

13. На $\mathbb{R}^2$ задана метрика $g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$.

a) Найти координату R^2_{121} тензор кривизны римановой связности метрики g.

b) На $\mathbb{R}^2$ задана связность ∇, все коэффициенты которой тождественный равны нулю, кроме $\Gamma^2_{12} \equiv 1$. Найти $\nabla_2 g_{12}$.

14. На двумерном многообразии в локальных координатах $u^1 = x$, $u^2 = y$ известны отличные от 0 коэффициенты линейной связности $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{2y}{1+y^2}$. Найти координаты тензоров кручения и кривизны.

15. Пусть R^l_{ijk} - координаты тензор кривизны римановой связности. Найти $g^{ij}R^l_{ijk}$.

16. Пусть в некоторой системе координат на $\mathbb{R}^2$ единственными ненулевыми коэффициентами связности ∇ являются $\Gamma^1_{11} \equiv \Gamma^1_{22} \equiv 1$. Найти тензор Риччи связности ∇.

17. Пусть R^l_{ijk} - тензор кривизны связности ∇ без кручения. Пусть $R^1_{121} = x^1$. Найти R^1_{112} и R^1_{211}.

18. На $\mathbb{R}^2$ задана риманова связность ∇, и известно, что $R_{1212} = x^2$. Найти R_{2121}.

19. Найти $\nabla_i \delta^k_j$, где ∇ - линейная связность.

20. Доказать, что на любом гладком многообразии, допускающем гладкое разбиение единицы, существует линейная связность.

21. Доказать, что множество параллельных переносов H_p вдоль петель в точке p многообразия M с линейной связностью есть подгруппа в группе невырожденных линейных операторов $GL(T_pM)$.

22. Доказать, что если многообразие M связно, то группы голономии во всех точках изоморфны между собой.

23. Пусть N - гладкое подмногообразие в M, γ - гладкая кривая на N, $\vec{\xi}$ - векторное поле вдоль кривой γ, касательное к N. Доказать формулу

$$\tilde{\nabla}_\gamma \vec{\xi} = \mathrm{pr}(\nabla_\gamma \vec{\xi}),$$

где ∇, $\tilde{\nabla}$ - симметрические римановы связности на многообразиях M и N соответственно (на N рассматривается индуцированная метрика), pr - ортогональная проекция на касательное пространство к N.

24. Вычислить символы Кристоффеля на поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$, заданной в виде $\vec{r}(u,v) = (f(u)\mathrm{cos}v,\ f(u)\mathrm{sin}v,\ g(u))$.

25. Доказать, что если Γ^k_{ij} - коэффициенты некоторой линейной связности, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}^2$ функции $\lambda\Gamma^k_{ij} + (1-\lambda)\Gamma^k_{ij}$ также являются коэффициентами некоторой линейной связности.

26. Привести пример многообразия с линейной связностью, тензор кривизны которой равен нулю, а группа голономии нетривиальна.

27. Пусть ∇ есть линейная связность на многообразии M. Доказать, что для любой точке $p \in M$ и любого вектора $\vec{V} \in T_pM$ существует единственная геодезическая линия γ связности ∇ со свойствами $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \vec{V}$.

28. На $\mathbb{R}^2$ задана линейная связность $\nabla : \nabla_{\partial_1}\partial_1 = \partial_1$, $\nabla_{\partial_2}\partial_1 = 0$, $\nabla_{\partial_1}\partial_2 = 0$, $\nabla_{\partial_2}\partial_2 = 0$. Найти геодезическую $\gamma(t)$ такую, что $\gamma(0) = (0, 0)$ и $\dot{\gamma}(0) = \partial_1$.

29. На $\mathbb{R}^2$ задана линейная связность ∇, у которой равны нулю все коэффициенты, кроме $\Gamma^1_{12} = -\sin(x^1 + (x^2)^3)$, $\Gamma^1_{21} = \sin(x^1 + (x^2)^3)$. Найти геодезическую $\gamma(t)$ такую, что $\gamma(0) = (1, 0)$ и $\dot{\gamma}(0) = \partial_1$.

30. Пусть $\mu(t) = (t, \cos t)$ - геодезическая некоторой линейной связности ∇ на $\mathbb{R}^2$. Найти геодезическую γ этой связности такую, что $\gamma(0) = (1, 0)$ и $\dot{\gamma}(0) = (2, 0)$.

31. Пусть $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$ - геодезическая некоторой линейной связности ∇ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти вектор, полученный в результате параллельного переноса вектора $\vec{V} = (1, 1) \in T_{\gamma(0)}\mathbb{R}^2$ вдоль γ.

32. Найти геодезические линии на двумерном многообразии с линейной связностью, которая относительно некоторых локальных координат (x, y) имеет ненулевые коэффициенты:

a) $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\frac{2x}{1+x^2}$;

b) $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{2x}{1-x^2}$.

33. Найти условия, при выполнении которых координатные линии $u^1 = \mathrm{const}$, $u^2 = \mathrm{const}$ будут геодезическими линиями на двумерном многообразии с линейной связностью.

34. Вычислить тензор кривизны на сфере S^2 в сферических координатах.

35. a) Доказать, что у двумерной поверхности тензор Риччи пропорционален метрическому. Найти коэффициент пропорциональности.

b) Доказать, что трехмерном многообразии спроведливо равенство

$$R_{lmnk} = g_{ln}R_{mk} - g_{lk}R_{mn} - g_{mn}R_{lk} + g_{mk}R_{ln} - \frac{1}{2}(g_{ln}g_{mk} - g_{lk}g_{mn})R.$$

Здесь R_{lm} -тензор Риччи, R - скалярная кривизна.

36. Найти количество существенных координат риманова тензора кривизны в размерностях 2, 3, 4.

37. Выразить $\nabla_i \nabla_j t^p_q - \nabla_j \nabla_i t^p_q$ через координаты тензора кручения, тензора кривизны и t^i_j.

38. Найти тензор кривизны римановой связности конуса, индуцированной стандартным вложением конуса в $\mathbb{R}^3$.

39. Пусть ω есть форма объема на многообразии M. Пусть связность ∇ на M обладает тем свойством, что $\nabla\omega = 0$. Доказать, что параллельный перенос вдоль петель в связности ∇ есть линейный оператор, определитель которого равен 1.

40. Пусть ∇ - каноническая связность в $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой метрикой. Рассмотрим новую операцию $\tilde{\nabla}_{\vec{v}}\vec{w} = \nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \frac{1}{2}[\vec{v}, \vec{w}]$. Доказать, что это связность. Найти ее тензоры кручения и кривизны.

41. Доказать, что если $\vec{V}$, $\vec{W}$ есть некоторый репер двумерного направления L, то секционная кривизна в направлении L вычисляется по следующей формуле

$$K(L) = \frac{R(\vec{V}, \vec{W}, \vec{W}, \vec{V})}{g(\vec{V}, \vec{V})g(\vec{W}, \vec{W}) - g(\vec{V}, \vec{W})^2}.$$

42. Риманово многообразие, в котором $R_{ij} = \lambda(x)g_{ij}$, называется пространством Эйнштейна. Доказать, что

a) для пространства Эйнштейна выполняется равенство $\lambda(x) = R(x)/n$, где R - скалярная кривизна, n - размерность пространства.

b) любое двумерное риманово многообразие является пространством Эйнштейна.

43. Пусть g - риманова метрика на двумерной сфере, индуцированная из E_3. Найти группу гологомии римановой связности, соответствующей метрике g.

44. Найти геодезические линии трехмерной сферы с метрикой, индуцированной из E_4.

45. Доказать, что если ∇ - риманова связность метрического тензора g_{ij}, то $\nabla g^{ij} = 0$, где g^{ij} - тензор, взаимный метрическому тензору ($g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$).

46. Пусть ∇ - риманова связность метрики g на многообразии M. Доказать, что тензор Риччи этой связности симметричен.

47. *Пространство Эйнштейна* есть риманово многообразие (M, g) со свойством $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, где λ - некоторая функция. Доказать, что скалярная кривизна n-мерного пространства Эйнштейна постоянна при $n > 2$.

48. Для любого $C \in \mathbb{R}^2$ привести пример риманова многообразия постоянной секционной кривизны C.

49. Пусть $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > 0$ - верхняя полуплоскость и $g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}$ - метрика на M ((M, g) - *модель Пуанкаре плоскости Лобачевского*). Найти тензор Риччи и скалярную кривизну риманова многообразия (M, g). Найти геодезические линии римановой связности метрики g.

50. Пусть g - риманова метрика на многообразии M. Пусть $\vec{V}$ - векторное поле на M такое, что $L_{\vec{v}} g = 0$. Доказать, что $g(\vec{W}, \nabla_{\vec{W}} \vec{V}) = 0$ для любого векторного поля $\vec{W}$, где ∇ - риманова связность метрики g.

51. Пусть g - риманова метрика на $\mathbb{R}P^2$ такая, что $\pi^* g$ есть стандартная метрика на $\mathbb{S}^2$, где $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ - каноническая проекция. Найти геодезические линии соответствующей римановой связности на $\mathbb{R}P^2$.

52. Найти тензор кривизны римановой связности

$$g(x) = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 (d\theta \otimes d\theta + d\phi \otimes d\phi).$$

53. Пусть ∇ - риманова связность на двумерном торе, соответствующая метрике, индуцированной стандартным вложением тора в трехмерное евклидово пространство. Найти параллельный перенос в связности ∇ при обходе вдоль: a) меридиана, b) параллели.

54. Пусть S^n - n-мерная сфера $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = r^2$ с индуцированной метрикой:

a) показать, что тензор кривизны сферы S^n вычисляется по формуле

$$R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = \frac{1}{r^2}((\vec{Y}, \vec{Y})\vec{X} - (\vec{X}, \vec{Z})\vec{Y}),$$

где $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ - векторы, касательные к сфере;

b) показать, что секционная кривизна сферы S^n постоянна: $\sigma(P) = \frac{1}{r^2}$ для всех точек x.

55. Доказать, что связность на n-мерном многообразии, допускающая n ковариантно постоянных линейно независимых в каждой точке векторных полей, имеет нулевой тензор кривизны.

56. Показать, что пространство постоянной кривизны является пространством Эйнштейна.

57. Показать, что на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^2$ комопненты тензора кривизны представляются в виде

$$R_{ijkl} = K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

где K - гауссова кривизна.

58. Доказать, что символы Кристоффеля в некоторой системе координат равны 0 тогда и только тогда, когда тензор кручения связности S^k_{ij} и тензор кривизны R^l_{ijk} тождественно равны нулю.

59. Пусть M - гладкое многообразие с линейной связностью Γ^i_{jk}, TM - касательное расслоение. Показать, что линейная оболочка векторных полей $\vec{e}_i = \partial_i - \Gamma^j_{ik}x^{n+k}\partial_{n+j}$, заданных на TM, определяет горизонтальное распределение HT, дополнительное к вертикальному распределению VT: $TTM = HT \oplus VT$.

Указание. Проверить, что при преобразовании системы координат на M, векторные поля $\vec{e}_i$ так же преобразуются, как векторные поля ∂_i на базе.

60. Определим на TM поле аффиноров J, полагая $J\vec{e}_i = \partial_{n+i}$, $J\partial_{n+i} = -\vec{e}_i$. Показать, что определяемое таким образом тензорное поле является почти комплексной структурой и выяснить, при каких условиях эта структура интегрируема.

Указание. Воспользоваться рассуждениями, проведенными в 8.57.

61. Показать, что всякая допустимая почти комплексная структура φ, заданная на почти контактном метрическом пространстве M размерности 3 интегрируема, если $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$.

Указание. Убедиться в том, что для любого векторного поля $\vec{X}$ на M выполняется равенство

$$PN(\vec{X}, J\vec{X}) = 0.$$

После чего воспользоваться тем, что в окрестности точки, где $\vec{X} \in \Gamma D$ не равен нулю, каждое допустимое векторное поле $\vec{Y}$ есть линейная комбинация $\vec{X}$ и $J\vec{X}$.

62. Показать, что каждое почти нормальное почти контактное метрическое пространство размерности 3 является нормальным.

Указание. Воспользоваться тем, что пространство билинейных кососимметрических форм, заданных на двумерном линейном пространстве, одномерно.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Гохман А.В. Введение в теорию аффинных связностей. Издательство СГУ, 1981. 63 с.

2. Либер А.Е. Тензорный анализ. Издательство СГУ, 1975. 145 с.

3. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М.,ИЛ, 1960. 128 с.

4. Малахальцев М.А., Фомин В.Е. Сборник задач по тензорному анализу: Методическое пособие. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008. 76 с.

5. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии для вузов. М.: Издательство физико-математической литературы, 2001. 352 с.

6. Постников М.М. Введение в теорию Морса. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука 1971. 568 с.

Дополнительная литература

7. Галаев С.В., Гохман А.В. Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях с почти контактной метрической структурой // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2012. Вып.14. С. 23–27.

8. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации. // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. №4. С. 10–18.

9. Галаев С.В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. 12 (1). С. 16–22.

10. Вершик А.М., Гершкович В.Я., Неголономные динамические системы и геометрия распределений. - Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы — 7, 8. М.:ВИНИТИ, 1986. С. 5-85.

11. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. МПГУ, Москва. 2003. 495 с.

12. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1,: Пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 344 с.

13. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2,: Пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 416 с.

14. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.

15. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.

16. Bejancu A. Kahler contact distributions. Journal of Geometry and Physics, 2010. V.60. P. 1958–1967.

17. Chern S.S. Pseudogroupes continues infinis // Colloques Internat. Centre Nat. Rech.Sci. 1953. V.52. P. 119–136.

18. Gray J.W. Some global properties of contact structures // Ann. Of Math., 1959. V.69.(2) №2. P. 421-450.

19. Nakayama S. On a classification of an almost contact metric structures // Tensor. 1968. V. 9, № 1. P. 1–7.

20. Oubina J. A. New classes of almost contact metric structures // Publ. Mat. 1985. V. 32, № 3-4. P. 187–193.

21. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures. I // Tohoku Math. J. 1960. V. 12(2), №3. P. 459–476.

22. Sasaki S., Hatakeyama Y. On differential manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J., 1961. V. 13, № 2. P. 281–294.

23. Tashiro Y. On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds // Tohoku Math. J., 1963. V. 192, №15. P. 62–78.

24. Zamkovoy S. Canonical connections on paracontact manifolds. Ann. Global Anal. Geom. 2009. V.36, №1. P. 37–60.

ОТВЕТЫ

7. $V^1(\frac{\pi}{2}) = 2V_0^2$, $V^2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}V_0^2$.

8. a) Нет, b) 0.

9. 0.

10. $\Gamma_{ij}^k = \begin{cases} 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \\ -\partial_k\sigma, \quad i = j \neq k, \\ \partial_i\sigma, \quad j = k, \\ \partial_j\sigma, \quad i = k \neq j. \end{cases}$

11. Да.

12. $\nabla_i\omega_{jj} = 0$, $i = 1,\, 2$; $\nabla_1\omega_{12} = -\nabla_1\omega_{21} = -1$; $\nabla_2\omega_{12} = \nabla_2\omega_{21} = 0$.

13. a) 0, b) 0.

14. Отличные от 0 координаты тензора кручения: $T_{12}^2 = -T_{21}^2 = -\frac{2y}{1+y^2}$; тензора кривизны: $R_{122}^2 = -R_{212}^2 = -2\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$.

15. 0.

16. $R_{22} = 1$, остальные $R_{ij} = 0$.

17. $R_{112}^1 = 0$, $R_{211}^1 = -x^1$.

18. $R_{2121} = x^2$.

19. $\nabla_i\delta_j^k = 0$.

28. $x^1(t) = \ln(1+t)$, $x^2(t) = 0$.

29. $x^1(t) = 1 + t$, $x^2(t) = 0$.

30. $\gamma(t) = (2t,\, \cos 2t)$.

31. $\vec{v} = (1,\, 1) \in T_{t,t}\mathbb{R}^2$.

32. Уравнения геодезических линий для a) и b): $c_1x + c_2y + c_3 = 0$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные константы, $(c_1)^2 + (c_2)^2 \neq 0$.

33. Для линий $u^1 = \text{const}$ необходимое и достаточное условие чтобы они были геодезическими: $\Gamma_{22}^1 \equiv 0$, для $u^2 = \text{const}$ — $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$.

36. В размерности 2 одна компонента, в размерности 3-6 компонент, в размерности 4-20 компонент.

37. $\nabla_i\nabla_j t_q^p - \nabla_j\nabla_i t_q^p = R_{ijk}^p t_q^k - R_{ijq}^k t_k^p - T_{ij}^k\nabla_k t_q^p$.

38. Тензор кривизны равен нулю.

43. SO(2).

44. Большие окружности — пересечения трехмерной сферы двумерными плоскостями, проходящими через ее центр.

48. $C > 0$ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = C$ с индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрикой; $C < 0$ — полуплоскость $y > 0$ с метрикой $-\frac{-C}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ (модель плоскости Лобачевского); $C = 0$ — плоскость с евклидовой метрикой.

49. $R_{11} = R_{22} = -\frac{1}{y^2}$, $R_{12} = R_{21} =$. Скалярная кривизна равна -2. Геодезические — полуокружности с центрами на оси OX и полупрямые, перпендикулярные оси OX.

51. Проективные прямые.

52. Ненулевые существенные координаты тензора кривизны: $R^3_{232} = 1$, $R^2_{233} = -1$.

53. а) при параллельном переносе вектора вдоль меридиана сохраняется длина вектора и угол между ним и касательной к меридиану; если тор получен вращением окружности радиуса b, центр которой описывает окружности радиуса a, то при параллельном переносе вектора вдоль параллели радиуса R $(a - b \leq R \leq a + b)$ с возвращением в исходную точку сохраняется длина вектора, а угол между вектором и касательной к параллели изменяется на $\pm 2\pi\sqrt{1 - (\frac{R-a}{b})^2}$.