Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

Н.В. Сергеева, А.К. Смирнов, О.А. Мыльцина

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие для студентов очного отделения факультета нелинейных процессов

Саратов
2014

УДК 519.2(076)
ББК 22.17я73
С50

Сергеева, Н.В.
С50 Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб.пособие для студентов очного отд-ния фак.нелин.проц./ Н.В. Сергеева, А.К. Смирнов, О.А. Мыльцина. 2014.– с.

В пособии приведены необходимые теоретические сведения и формулы, даны решения типовых задач, помещены задачи для самостоятельного решения, сопровождающиеся ответами.

Для студентов очного отделения факультета нелинейных процессов. Оно может быть полезно студентам других факультетов, на которых преподается дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика».

Рекомендует к печати:
Кафедра теории вероятностей, математической статистики
и управления стохастическими процессами

УДК 519.2(076)
ББК 22.17я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данного учебно-методического пособия положены материалы, которые использовались авторами при чтении лекций и проведении практических занятий для студентов факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского.

В пособии вводятся и изучаются основные понятия теории вероятностей и математической статистики, рассматриваются решения типовых примеров, а так же приводятся задачи для самостоятельного решения.

Пособие состоит из 16 пунктов. Каждый пункт содержит краткий теоретический материал, решение типовых примеров и задачи. В пунктах 1-11 содержится материал раздела «Теория вероятностей». В пунктах 12-16 содержится материал раздела «Математическая статистика». В приложении приведены таблицы некоторых распределений и квантилей распределений.

Данное учебно-методическое пособие может представлять интерес для студентов других факультетов, где изучается дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика».

Авторы

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Основным понятием естествознания является понятие эксперимента, независимо от него, осуществляет этот эксперимент природа или исследователь. Условно будем считать, что эксперимент - это определенный комплекс условий $\Re$, его определяющих. Ограничимся классом экспериментов, носящих массовый характер, то есть относительно которых существует принципиальная возможность их неоднократного повторения.

Определение. Эксперимент называется случайным, если условия эксперимента неоднозначно определяют исход данного эксперимента.

Этот класс экспериментов и есть предмет изучения теории вероятностей.

Определение. Исходы случайного эксперимента будем называть случайными событиями.

Определение. Событие Ω называется достоверным, если оно осуществляется при каждой реализации эксперимента.

Обозначим через $\Omega = \{\omega_i\}$ - пространство точечных неразложимых исходов случайного эксперимента, ω_i - непосредственный результат эксперимента или элементарный исход. Существуют составные или сложные исходы.

Простейшими примерами случайных экспериментов являются модели азартных игр, урновые модели.

Пример 1. Модель игрального кубика.

Эксперимент: подбрасывание симметричного однородного игрального кубика (число граней от 1 до 6).

Пространство элементарных исходов такого бросания игрального кубика $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$. Здесь, например, элементарный исход ω_3 есть выпадение грани с номером 3.

Исход $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ - выпадение нечетной грани, является примером составного случайного события. Это событие есть подмножество пространства элементарных исходов Ω.

При бросании двух игральных кубиков пространство элементарных исходов – это множество пар $\Omega = \{(\omega_i, \omega_j)\}$, $i, j = \overline{1,6}$. Всего элементарных исходов $n = 6 \times 6 = 36$, так надо различать исходы (ω_5, ω_6) и (ω_6, ω_5).

Примером составного случайного события является исход $A_{11} = \{(\omega_5, \omega_6), (\omega_6, \omega_5)\}$ - сумма набранных очков равна 11.

Пример 2. Урновая модель.

Имеется урна с шарами (шары различной расцветки и пронумерованы). Эксперимент заключается в извлечении шаров из урны (извлечения с возвращением или без возвращения). Исходы – извлеченные шары различной расцветки и их номера.

Из урны, в которой 10 шаров (3 красных и 7 черных), извлекают два шара. Пространство элементарных исходов – множество пар шаров зависит от способа извлечения шаров. Всего элементарных исходов с учетом порядка появления шаров (извлечение без возвращения) $n = 10 \times 9 = 90$, без учета порядка $n = \frac{10\times 9}{2} = C_{10}^2 = 45$. Составной исход $B = \{$извлечены шары разной расцветки без учета порядка$\}$ образован из $m = C_7^1 \times C_3^1 = 21$ исхода, так как черные шары можно извлекать только из черных, а красные – из красных.

Соотношения между случайными событиями

Определение. Событие $\oslash$ называется невозможным, если оно не осуществляется, сколько бы не повторялся данный эксперимент.

Случайные события характеризуются тем, что при одних реализациях данного эксперимента они осуществляются, при других – нет.

Обозначим через $\Im$ пространство всевозможных исходов случайного эксперимента - $\Im = \{A\}$. Определим в данном пространстве соотношения между событиями. Пусть все рассматриваемые ниже события из $\Im$.

1. Говорят, что случайное событие A влечет за собой событие B ($A \subset B$), если при каждом осуществлении события A осуществляется событие B.

Пусть событие A - появление единицы в модели игрального кубика, событие B - появление нечетной грани, тогда $A \subset B$.

2. Событие $C = A \bigcup B$ называется объединением событий A и B, если оно эквивалентно наступлению хотя бы одного из них (A или B).

3. События A и B эквивалентны, если эти события взаимно влекут осуществление друг друга $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$.

Пусть A - появление четной грани, B - появление нечетной грани в модели игрального кубика, тогда $C = A \bigcup B = \Omega$.

Если $B \subset A$, то $C = A \bigcup B = A$.

4. Событие $C = A \bigcap B = AB$ называется произведением или пересечением событий A и B, если оно эквивалентно их одновременному осуществлению (и A, и B).

События A и B, пересечение которых невозможно, называют несовместными событиями. Появление четной грани - A и появление нечетной грани - B - несовместные события $A \bigcap B = \oslash$. Если $B \subset A$, то $C = A \bigcap B = B$.

5. Событие $\overline{A}$ (не A) противоположно событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда A не происходит. Два события A и $\overline{A}$ называются взаимно противоположными, если $A \bigcup \overline{A} = \Omega$; $A \bigcap \overline{A} = \oslash$.

Событие, противоположное осуществлению хотя бы одного из событий A_i ($\overline{\bigcup A_i}$), эквивалентно неосуществлению ни одного из событий A_i ($\bigcap \overline{A_i}$), то есть $\overline{\bigcup A_i} = \bigcap \overline{A_i}$.

6. Говорят, что события $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ образуют полную группу или полную систему событий, если объединение этих событий достоверно, а попарное пересечение невозможно, то есть $\bigcup A_i = \Omega$ и $\forall i \neq j$ $A_i \bigcap A_j = \oslash$.

События $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ образуют разбиение пространства $\Omega = \{\omega_i\}$. При бросании двух игральных кубиков система событий $A_2, A_3, ..., A_{12}$ (индекс – сумма набранных очков) есть пример полной системы событий. Естественно, пространство $\Omega = \{\omega_i\}$ элементарных исходов является полной системой событий (притом самой широкой). Это самое мелкое разбиение пространства.

Подводя итог вышесказанному, видим, что с каждым случайным экспериментом связано не только пространство $\Omega = \{\omega_i\}$ элементарных исходов, но и более широкое пространство $\Im = \{A_j\}$ составных событий как системы подмножеств пространства элементарных исходов. В пространстве $\Im$ определены соотношения 1 – 6 между элементами данного пространства. Если пространство исходов конечно, т.е. $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ содержит n элементов, то пространство всевозможных его подмножеств $\Im = \{A_j\}_{j=1}^{2^n}$ содержит 2^n элементов. Действительно, пустое множество одно, одноточечных множеств $n = C_n^1$, двухточечных множеств C_n^2 и так далее. Всего подмножеств $1 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. Этот результат получается, если в биноме $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$ положить $a = b = 1$.

Решение типовых примеров.

Пример 1. При каких событиях A и B возможно равенство $A \bigcup B = A$?

Решение. Сумма $A \bigcup B$ представляет собой событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B . Если $A \bigcup B = A$, то событие A включает в себя событие B.

Пример 2. Доказать, что $\overline{\overline{A} \bigcap \overline{B}} = A \bigcup B$ и $\overline{\overline{C} \bigcup \overline{D}} = C \bigcap D$.

Решение. Если положить $C = \overline{A}$ и $D = \overline{B}$, то второе равенство перепишется в виде $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$, то есть $A \bigcup B = \overline{\overline{A} \bigcap \overline{B}}$. Поэтому достаточно доказать справедливость только первого равенства. Событие $\overline{A} \bigcap \overline{B}$ означает непоявление событий A и B. Противоположное событие $\overline{\overline{A} \bigcap \overline{B}}$ означает, что хотя бы одно из событий A или B имеет место, а это сумма событий $A \bigcup B$. Поэтому $A \bigcup B = \overline{\overline{A} \bigcap \overline{B}}$. Доказательство этого равенства можно произвести геометрически, связав каждое событие с попаданием точки в соответствующую область.

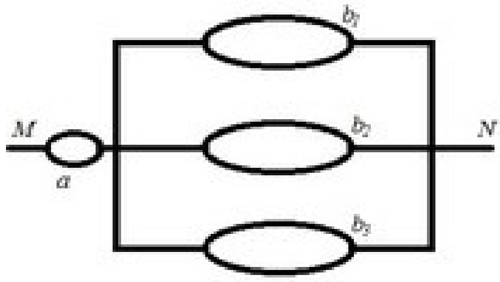

Рис. 1: Схема электрической цепи

Пример 3. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, приведенной на Рис.1 Выход из строя элемента a - событие A , элемента b_k - событие B_k, $k = 1, 2, 3$. Записать выражения для событий C и $\overline{C}$, если C означает разрыв цепи.

Решение. Разрыв цепи произойдет только в том случае, если выйдет из строя элемент a или все три элемента b_k, $K = 1, 2, 3$. Эти события соответственно равны A и $B_1 \bigcap B_2 \bigcap B_3$. Поэтому $C = A \bigcup B_1 \bigcap B_2 \bigcap B_3$.

Используя равенства из примера 2, находим $\overline{C} = \overline{A \bigcup B_1 \bigcap B_2 \bigcap B_3} = \overline{A} \bigcap \overline{B_1 \bigcap B_2 \bigcap B_3} = \overline{A} \bigcap (\overline{B_1} \bigcup \overline{B_2} \bigcup \overline{B_3})$.

2 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n,\infty}$ - пространство элементарных исходов случайного эксперимента, - дискретно, то есть, конечно или счетно (множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел). В случае конечного пространства равновозможных исходов рассмотрим следующее определение вероятности. Пусть пространство Ω содержит n элементарных равновозможных исходов. Тогда вероятности этих исходов должны быть равны, а их сумма равна единице, то есть $\forall \omega_k \in \Omega : P(\omega_k) = p > 0$, $\sum_{k=1}^{n} P(\omega_k) = np = 1$. Следовательно, $P(\omega_k) = p = 1/n$.

Определим для любого исхода $A = \{\omega_i^1, ..., \omega_i^m\}$ его вероятность

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\omega_k) = \frac{m}{n}.$$

В этой формуле вероятность $p = 1/n$ повторяется слагаемым столько раз, сколько элементарных событий содержится в A.

В случае равновозможных элементарных исходов неважно, какие события содержаться в A, а важно сколько их. Используя этот подход в полных группах составных равновозможных событий.

Определение. *Классическое определение вероятности.* Если случайному событию B соответствует m частных случаев ω_i из полной группы в n равновозможных исходов, то вероятность случайного события B равна отношению m к n , то есть

$$P(B) = \tfrac{m}{n}$$

.

Свойства вероятности

Рассмотрим основные свойства вероятности, исходя из классического определения вероятности.

1. $P(\emptyset) = 0$, $0 \le P(A) \le 1$, $P(\Omega) = 1$.

2. Монотонность вероятности.

Если $B \subset A$, то $P(B) \le P(A)$.

Действительно, так как событие B влечет за собой событие A, то число исходов m_1, соответствующих A, не меньше, чем число исходов m_2, соответствующих B, то есть $\frac{m_2}{n} \le \frac{m_1}{n}$.

3. Если $A = B$, $P(A) = P(B)$.

Так как одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то $P(A) \le P(B)$ и $P(B) \le P(A)$, следовательно, $P(A) = P(B)$.

4. Теорема сложения вероятностей.

Если события A и B не совместны, то есть $A \bigcap B = \emptyset$, то $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.

Пусть мы имеем полную группу в n равновозможных исходов. Так как пересечение A и B пусто, то все исходы m_1 события A отличны от m_2 исходов события B. Тогда их объединению соответствуют $m_1 + m_2$ равновозможных исходов из n: $P(A \bigcup B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$.

5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Если событию A соответствует m исходов из полной группы в n равновозможных событий, то событию $\overline{A}$ соответствуют все остальные (их ровно $n - m$). Следовательно

$$P(\overline{A}) = \tfrac{n-m}{n} = 1 - \tfrac{m}{n} = 1 - P(A)$$

.

6. Расширенная теорема сложения.

Для любых A и B $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

Пусть событию A соответствует m исходов из полной группы в n равновозможных исходов, событию B - k исходов, событию $A \bigcap B$ - l исходов. Событию $A \bigcup B$ соответствуют все исходы события A и все исходы события B, не принадлежащие A, их ровно $m + k - l$. Имеем

$$P(A \bigcup B) = \tfrac{m+k-l}{n} = \tfrac{m}{n} + \tfrac{k}{n} - \tfrac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$$

.

Решение типовых примеров.

Пример 1. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый. *Решение.* Общее число случаев $a + b$. Число благоприятных случаев a. Вероятность того, что шар белый $P(A) = \frac{a}{a+b}$.

Пример 2. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятность того, что а) в каждой пачке окажется по два туза; б) в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой – все четыре; в) в одной из пачек будет один туз, а в другой – три.

Решение. Общее число случаев C_{52}^{26}. а) число благоприятных случаев $m = C_4^2 C_{48}^{24}$, тогда вероятность того, что в каждой пачке окажется по два туза а) $P(A) = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$; б) $P(A) = \frac{2C_4^4 C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}}$; в) $P(A) = \frac{2C_4^3 C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}}$.

Пример 3. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а две оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд.

После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.

Решение. Так как любое гнездо при первом выстреле может сочетаться с любым при втором, общее число случаев $n = 7 \cdot 7 = 49$. Число благоприятных случаев равно числу комбинаций пустых гнезд $m = 2 \cdot 2 = 4$, тогда вероятность того, что мы оба раза не выстрелим $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{49}$.

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Геометрическое определение вероятности распространяет идеи классической схемы, основанной на понятии равновозможности событий с дискретного на непрерывный случай.

Рассмотрим эксперимент, в котором случайная точка M бросается в область $D \subset R^n$, событие A попадание точки M в область $d, d \subset D$. При этом вероятность события A прямо пропорциональна мере множества d, т.е. $P(A) = k\mu_d$. Если мера множества D конечна, то $P(D) = k\mu_D = 1$ получаем $k = \frac{1}{\mu_D}$.

Определение. *Геометрическое определение вероятности.* Вероятность попадания точки M в подобласть d области D равна отношению меры множества d к мере всего пространства:

$$P(A) = \frac{\mu_d}{\mu_D}.$$

Под мерой области понимается длина, площадь, объем области в зависимости от ее размерности.

Решение типовых примеров.

Пример 1. На линии связи длиной 10 км. произошел обрыв. Какова вероятность, что он произошел не далее, чем в 2 км от начала (событие B)?

Решение. Предполагается, что линия связи однородна и потому положение точки обрыва равновозможно на любом малом отрезке линии, где бы он ни располагался. Тогда применимо геометрическое определение вероятности. Искомая вероятность $P(A) = 0,2$.

Пример 2. (Задача о встрече). Два лица договорились о встрече в парке в течение промежутка времени T. Первый прибывший на встречу ждет другого в течение времени t $(t < T)$, затем уходит. Найти вероятность встречи (событие A), если известно, что моменты прихода каждого из двух лиц независимы и «выбираются наудачу» в промежутке времени $[0, T]$.

Решение. Пусть x и y - моменты прихода встречающихся лиц. Областью возможных положений точки $M(x, y)$ будут точки квадрата $T \times T$, с площадью T^2 (Рис.2). Выбор моментов x и y «наудачу» будем трактовать как возможность применения геометрического определения вероятности.

Встреча произойдет, если $|x - y| \le t$.

Это неравенство определяет область, лежащую в квадрате между прямыми $y = x - t$ и $y = x + t$. Ее площадь равна площади квадрата минус площадь двух треугольников: $T^2 - (T - t)^2$. Поэтому $P(A) = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2}$. Если $T = 1$ час, $t = 1/4$ часа, то $P(A) = 1 - 9/16 = 7/16$.

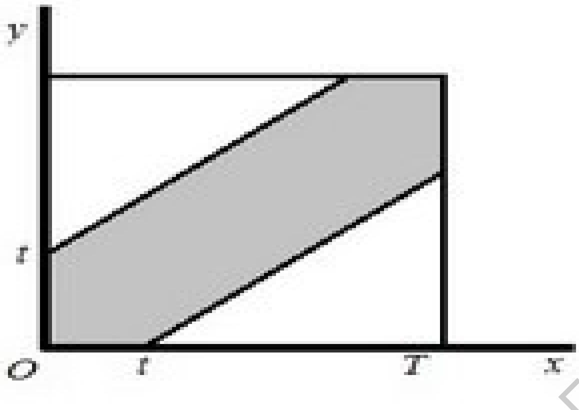

Рис. 2: Задача о встрече

Задачи.

1. Что означают события $A + A$ и AA?
2. Когда возможно равенство $AB = A$?
3. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k, $k = 1, ..., 10$, причем $r_1 < r_2 < ... < r_{10}$. Событие A_k - попадание в круг радиуса r_k, $k = 1, ..., 10$. Что означают события $B = \sum_{k=1}^{6} A_k$, $C = \prod_{k=5}^{10} A_k$?
4. Упростить выражение $A = (B + C)(B + \overline{C})(\overline{B} + C)$.
5. Когда возможны равенства а) $A + B = \overline{A}$; б) $AB = \overline{A}$; в) $A + B = AB$?
6. Доказать, что $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{AB}$.
7. Совместны ли события A и $\overline{A + B}$?
8. Доказать, что события A, $\overline{A}B$ и $\overline{A + B}$ образуют полную группу.
9. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A - исправна машина, событие B_k, $k = 1, 2$, - исправен k-ый котел. Событие C означает работоспособность машинно-котельной установки, что будет в том случае, если исправны машина и хотя бы один котел. Выразить события C и $\overline{C}$ через A и B.

10. В книге 300 страниц. Найти вероятность того, что наудачу открытая страница будет иметь порядковый номер кратный 7.

11. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий A - сумма выпавших очков равна 8; B - произведение выпавших очков равно 8; C - сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

12. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятности следующих событий: A - появление четного числа очков; B - появление не менее 5 очков; C - появление не более 5 очков.

13. В урне a белых и b черных шаров ($a \geq 2$, $b \geq 2$). Из урны одновременно вынимают два шара. Какое событие наиболее вероятней: A - шары одного цвета, B - шары разных цветов?

14. Имеется две урны: в первой a белых и b черных; во второй c белых и d черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

15. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируют две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеются 5 команд экстракласса. Найти вероятности следующих событий A - все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу; B - две команды экстракласса попадут в одну из групп, а три в другую.

16. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а две оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, оба раза выстрел произойдет.

17. Из пяти букв разрезанной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а потом собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово «книга».

18. Тот же вопрос, если было составлено слово «ананас».

19. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый их них выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий A - все пассажиры выйдут на пятом

этаже; B - все пассажиры выйдут одновременно на каком-либо этаже; C - все пассажиры выйдут на разных этажах.

20. Буквенный замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

21. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе, состоящей из l самолетов ($k \leq l$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по одной и той же цели.

22. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по разным целям.

23. Трое игроков играют в карты. Каждому из них сдано по 10 карт, а две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт бубновой масти и 4 – не бубновой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две бубновые карты.

24. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается четыре. Ввести пространство элементарных событий, а также найти вероятность того, что среди вынутых карт а) будет только один туз, б) будут представители всех мастей.

25. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся окрашенными.

26. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется три женщины.

27. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

28. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

29. В круг радиуса R наугад бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в круг а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

30. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат – пара чисел (x, y) , где x – время прихода Петра, y – время прихода Ивана. Найти вероятности следующих событий:

    $A=$ встреча состоялась;

    $B=$ Петр ждал Ивана Все обусловленное время и не дождался;

    $C=$ Ивану не пришлось ждать Петра;

    $D=$ встреча состоялась после 11 ч 30 мин;

    $E=$ Иван опоздал на встречу;

    $F=$ встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут.

31. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение будет не больше единицы, а частное x/y не больше двух.

32. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

33. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии a. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r, (r < a)$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

34. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r, (r < a)$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

35. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет так же и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

36. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры.

37. На отрезок длины l числовой оси Ox наудачу поставлена точка M. Найти вероятность того, что меньший из отрезков и имеет длину, большую, чем $l/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой прямой.

4 УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Очень часто дополнительная информация о результатах случайного эксперимента или некоторое событие B меняют пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega\}$. В измененном пространстве исходов Ω^* так же, как и в исходном пространстве, возможно определение вероятностей исходов, но они называются условными вероятностями.

Пусть в модели игрального кубика выпала нечетная грань – событие B . Данное событие изменило пространство возможных исходов $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$. Новое пространство $\Omega^* = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ содержит три исхода. Вероятность появления единицы – событие A , при условии, что выпала нечетная грань, будет условной вероятностью и будет равна $P(A|B) = \frac{1}{3}$, так как исходы в измененном пространстве равновозможны и событию A соответствует один исход из трех.

Условные и безусловные вероятности случайных событий связаны формулой:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ (формула условной вероятности).}$$

Докажем эту формулу.

Пусть событию B соответствуют m исходов из полной группы в n равновозможных исходов $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Пусть это исходы $(\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m})$, тогда $P(B) = \frac{m}{n}$ - вероятность случайного события B . Пусть событие B произошло, тогда новое пространство элементарных исходов - $\Omega^* = B = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m}\}$ (реализованная случайность становится достоверным событием). А тогда в новом пространстве равновозможных исходов (как и в основном) применимо классическое определение вероятности.

Рассмотрим, какие исходы пространства $\Omega^* = B$ соответствуют событию A. Естественно, это те и только те исходы, которые принадлежат и A , и B одновременно. В основном пространстве Ω эти исходы образуют $A \cap B = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}\}$. Получаем $P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Из формулы условной вероятности легко получить формулу произведения вероятностей $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ или $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$.

Для последовательности событий $A_1, A_2, ..., A_n$ один из вариантов формулы вероятности пересечения имеет вид

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}).$$

Т. е. вероятность совместного появления событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже наступили.

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие стохастической независимости. Независимость явлений, событий как отсутствие причинно-следственных связей в случайных экспериментах означает, что осуществление одного события не влияет на возможность осуществления другого, а следовательно не меняет его количественную характеристику, то есть вероятность.

Определение. Говорят, что событие A не зависит от события B, если $P(A|B) = P(A)$, то есть условная вероятность события A при условии B равна безусловной вероятности события A. Осуществление события B не меняет вероятность события A.

Докажем, что если A не зависит от B , то и B не зависит от A , то есть понятие независимости двух событий взаимны.

Пусть A не зависит от B, Это значит, что $P(A|B) = P(A)$. Из формулы произведения вероятностей $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ или $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ (если одни сомножители равны, то и другие тоже равны) имеем $P(B|A) = P(B)$, то есть B не зависит от A.

Следствием этого является теорема умножения для двух независимых случайных событий: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Определение. Система событий называется попарно независимой системой, если для любых пар событий A_i, A_j вероятность их пересечения равна произведению вероятностей:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Определение. Система событий называется независимой в совокупности, если для любого $2 \leq k \leq n$ и для любой выборки $A_{i_1}, ..., A_{i_k}$ выполняется условие:

$$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Пример. Пусть событие A - появление нечетной грани при первом подбрасывании игрального кубика, событие B - появление четной грани при втором подбрасывании, событие C состоит в том, что сумма очков будет четной. Рассмотрим A, B, C как систему событий, их вероятности $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Если н – нечетная грань, ч – четная грань, то можно построить полную группу равновозможных исходов: (н,н), (ч,н), (н,ч), (ч,ч).

Вероятности $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$, то есть выполнено условие попарной независимости. Но одновременное осуществление событий A, B, C невозможно: $P(ABC) = 0 \neq \frac{1}{8}$, то есть не выполнено условие независимости системы в совокупности.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Двое охотников увидели зайца и одновременно выстрелили. Вероятность попадания для первого охотника $p_1 = 0,6$, для второго охотника $p_2 = 0,7$. Какова вероятность того, что заяц будет убит только одной пулей?

Решение. Введем события: $A_1 = \{$1-й охотник попал в зайца$\}$; $A_2 = \{$2-й охотник попал в зайца$\}$; $A = \{$в зайца попал только один охотник$\}$. Тогда $A = A_1\overline{A_2}\bigcup\overline{A_1}A_2$.

$P(A) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,46.$

Пример 2. Студент из 30 вопросов знает 20. Чему равна вероятность того, что данный студент ответит на первый вопрос и не ответит на второй и третий?

Решение. Пусть событие $A = \{$ответ на первый вопрос$\}$, событие $B = \{$отсутствие ответа на второй вопрос$\}$, $C = \{$отсутствие ответа на третий вопрос$\}$. По формуле произведения вероятностей имеем

$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} \approx 0,074.$

Пример 3. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: $A = \{$выпадение герба на первой монете$\}$; $B = \{$выпадение герба на второй монете$\}$. Найти вероятность события $C = A\bigcup B$.

Решение. Поскольку события A и B совместные, то

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A\bigcap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

Можно решить эту задачу, рассмотрев противоположное событие $\overline{C} = \{$на первой и второй монете выпала решка$\}$,

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

Пример 4. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью $1/4$ попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

Решение. Событие $A = \{$шарики попали в соседние ячейки$\}$– разобьем на столько вариантов, сколько можно образовать пар соседних ячеек; получим $A = A_1\bigcup A_2\bigcup A_3$, где $A_1 = \{$шарики попали в первую и вторую ячейки$\}$; $A_2 = \{$шарики попали во вторую и третью ячейки$\}$; $A_3 = \{$шарики попали в третью и четвертую ячейки$\}$. Вероятность каждого из вариантов одна и та же и равна

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{8}$. Тогда $P(A) = \frac{3}{8}$.

Задачи.

1. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события: $A = \{$появление туза$\}$; $B = \{$появление карты красной

масти}; $C = \{$появление бубнового туза$\}$; $D = \{$появление десятки$\}$. Зависимы или независимы следующие пары событий: 1) A и B; 2) A и C; 3) B и C; 4) B и D; 5) C и D?

2. Брошены две игральные кости. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

3. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди взяли по одному билету. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$первый студент взял «хороший» билет$\}$; $B = \{$оба студента взяли «хорошие» билеты$\}$; $C = \{$второй взял «хороший» билет$\}$.

4. Два охотника пошли на охоту, увидели медведя и одновременно выстрелили. Медведь убит, но в шкуре одна дыра, т.е. попал только один из охотников. Вероятность попадания первого охотника равна $0,8 (P_1 = 0,8)$, а второго – $0,4 (P_2 = 0,4)$. Шкуру продали за 70 рублей. Как поделить деньги?

5. Два стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0.7, вторым – 0.8. Найти вероятность того, что в мишень попадет: а) хотя бы один стрелок (событие A); б) только один стрелок (событие B); с) только первый стрелок (событие C).

6. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при 4 независимых выстрелах равна 0.9984. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

7. В урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй 10, 8 и 6 соответственно. Из каждой урны наудачу взяли по одному шару. Найти вероятность того, что шары одного цвета.

8. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

9. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезанной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».

10. Те же условия, но вынутые пять карточек можно менять местами произвольным образом. Какова вероятность того, что из вынутых пяти карточек можно сложить слово «конец»?

11. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

12. Та же задача, но каждая карта после вынимания возвращается обратно в колоду.

13. Уходя из квартиры, n гостей, имеющих одинаковые номера обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$каждый гость наденет свои калоши$\}$;$B = \{$каждый гость наденет калоши, относящиеся к одной паре (может быть и не свои)$\}$.

14. В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий A и B , если гости не могут отличить правой калоши от левой и просто берут первые, попавшиеся две калоши.

15. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

16. . Студент озабочен экзаменами по иностранному языку и теории вероятностей. Вероятность того, что он сдаст иностранный язык, равна 0,4; вероятность того, что он сдаст хоть один из этих двух предметов, равна 0,6; вероятность сдать оба предмета равна 0,1. Какова вероятность сдать теорию вероятностей?

17. В первой урне 5 белых и 3 черных шара, во второй - 3 белых и 1 черный. Из первой урны извлекли шар и переложили во вторую, а затем из второй урны извлекли шар и переложили в первую. Какова вероятность, что состав урн останется тем же? Как изменится эта вероятность, если извлекать и перекладывать два шара?

18. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

19. В урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8, 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета.

20. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали 1-й и 2-й элементы, если вероятности отказов соответственно равны $P_1 = 0,2$; $P_2 = 0,4$; $P_3 = 0,3$.

21. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0,973. Какова вероятность попадания при одном выстреле?

22. Студент пришел на экзамен зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

23. В общежитии проживает 10 % студентов университета. 75 % студентов, проживающих в общежитии, увлекается спортом; среди них 46 % юношей. Какова вероятность встретить в студенческом городке юношу, увлекающегося спортом и живущего в общежитии.

5 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - полная система событий (гипотез), то есть $\bigcup_{k=1}^{n} H_k = \Omega$ и $H_i \bigcap H_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Тогда вероятность любого события B можно вычислить по формуле полной вероятности

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(B|H_k),$$

где $P(H_k)$ - вероятность гипотез, $P(B|H_k)$ - условная вероятность события B в предположении, что гипотеза H_k верна.

Данная формула позволяет вычислять вероятности событий в том случае, когда неоднозначно определено пространство исходов.

Систему $H_1, H_2, ..., H_n$ можно интерпретировать как систему гипотез относительно пространств исходов, в которых вычисляется вероятность события B. Тогда для подсчета вероятности события B достаточно знать вероятности гипотез и вероятности осуществления события B при условии, что верна та или иная гипотеза H_i.

Пусть относительно A была выдвинута полная система гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$. Формула Байеса позволяет вычислять вероятности гипотез в предположении, что событие A произошло, то есть вычислить условные вероятности гипотез.

Формула Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(B|H_k)}, i = \overline{1, n}.$$

Формула Байеса позволяет принимать решения в условиях неопределенности, неоднозначности. Метод состоит в выборе наиболее правдоподобного (наиболее вероятного) исхода. Этот метод называют методом максимального правдоподобия. Основываясь на результатах опыта (исход B), выбирают наиболее правдоподобную гипотезу H_i, то есть гипотезу, для которой условная вероятность $P(H_i|B)$ максимальна.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных; в третьей только белые. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие $A = \{$ появление белого шара$\}$. Формулируем гипотезы: $H_1 = \{$ выбор первой урны $\}$; $H_2 = \{$ выбор второй урны$\}$; $H_3 = \{$ выбор третьей урны $\}$. Тогда

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$;

$P(A|H_1) = \frac{a}{a+b}$; $P(A|H_2) = \frac{c}{c+d}$; $P(A|H_3) = 1$.

По формуле полной вероятности $P(A) = \frac{1}{3}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1)$.

Пример 2. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом $p_1 = 0,9$, из винтовки без оптического прицела - $p_2 = 0,7$. а) Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки. б) Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Решение. Обозначим через событие $A = \{$цель поражена$\}$. Формулируем гипотезы: $H_1 = \{$стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом$\}$, $H_2 = \{$стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела$\}$. Тогда

$P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 0,6$, $P(A|H_11) = 0,9$, $P(A|H_2) = 0,7$.

а) По формуле полной вероятности имеем

$P(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,78$.

б) По формуле Байеса

$P(H_1|A) = \frac{0,9 \cdot 0,4}{0,78} = 0,46$, $P(H_2|A) = \frac{0,7 \cdot 0,6}{0,78} = 0,54$.

Задачи.

Задача из сказки

Иван Царевич стоит на перепутье, перед ним лежит камень, на котором написано: на право пойдешь, с вероятностью 0,5 утонешь, налево пойдешь, с вероятностью 0,4 шею сломаешь, а прямо пойдешь, с вероятностью 0,3 волки загрызут. Иван Царевич решает, что выберет себе дорогу, кинув монетку: если выпадет орел, то он пойдет прямо, ели решка, то он еще раз кинет монетку и при выпадении орла пойдет налево, а при выпадении решки направо. Спрашивается, с какой вероятностью Иван Царевич погибнет?

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наугад, выполнит норму.

2. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества, вообще около 40 % приборов собираются из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, его надежность за время t равна 0,95, если из деталей обычного качества – 0,7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

3. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 2 белых. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из 3-й урны, окажется белым.

4. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80% радиоламп первого типа и 90% второго типа. Найти вероятность того, что радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

5. Бросается монета и если она упадет так, что сверху оказывается герб, вынимается шар из урны I; в противном случае – из урны II. Урна I содержит 3 красных и 1 белый шар. Урна II содержит 1 красный и 3 белых шара. а) Какова вероятность, что вынутый шар красный? б) Какова вероятность того, что шар вынимался из урны I, если он оказался красным?

6. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что из двух шаров будет выбран белый.

7. Имеется две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

8. 20 % приборов монтируется с применением микромодулей, а остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодуля – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен.

9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом - по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков.

10. В ящике находится a новых теннисных мячей и b игранных. Из ящика наугад вынимается два мяча, которыми играют. После этого мячи воз-

вращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми ($a \geq 2$, $b \geq 2$).

11. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается в вероятностью p_0. Определить вероятности следующих событий: $A = \{$изделие будет забраковано$\}$; $B = \{$изделие будет забраковано в цехе$\}$; $C = \{$изделие будет забраковано в ОТК завода$\}$.

12. Группа студентов состоит из a отличников, b хорошо успевающих и c занимающихся слабо. Отличники могут получить на предстоящем экзамене только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит отличную или хорошую оценку.

13. В условиях предыдущей задачи вызываются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получат отметки: отлично, хорошо и удовлетворительно (в любом порядке).

14. Пусть некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, кладет k яиц, а вероятность развития насекомого из яйца p . Найти вероятность того, что у насекомого будет а) потомство; б) будет только один потомок.

15. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание 0,9; Вероятность принять здорового за больного 0,01. Доля больных по отношению ко всему населению 0,001. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

16. Пусть некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^(-\lambda)(\lambda > 0)$ кладет k яиц, а вероятность развития насекомого из яйца равна p. Найти вероятность того, что у насекомого будет: а) потомство; б) будет только один потомок.

17. Три оператора радиолокационной установки производят соответственно 25 %, 35 %, 40 % всех измерений6 допуская 5 %, 4 % и 2 % ошибок соответственно. Случайно проверенной измерение оказалось ошибочным. Найти вероятность того, что оно принадлежит третьему оператору.

18. В первой урне 2 черных и 1 белый шар, во второй 2 белых и 1 черный. Первая урна выбирается с вероятностью $\frac{3}{4}$, вторая - с вероятностью $\frac{3}{4}$. Из случайно выбранной урны выбирается наугад шар. Если он оказался черным, то какова вероятность, что он вынут из первой урны?

19. Из одного пункта оповещения о пожаре ложная тревога поступает в среднем в четырех случаях из пяти, из второго - в двух из пяти, из третьего - в одном случае из десяти. количество случаев, когда сигналы подают эти пункты, относятся соответственно как 12:5:3. какова вероятность поступления ложной тревоги?

20. Имеется три партии по 20 деталей. В одной две бракованных, в другой - четыре, в третьей - шесть. Извлеченные случайным образом из какой-то партии две детали оказались бракованными. Какова вероятность, что это была первая, вторая, третья партии?

6 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим некоторый эксперимент $\Re$ с полной группой исходов $A_1, A_2, ..., A_l$ и осуществим последовательность из n однородных экспериментов. Обозначим i-й исход k-го эксперимента через A_i^k, где нижний индекс – номер исхода $(1 \leq i \leq l)$, верхний – номер эксперимента $(1 \leq k \leq n)$.

Определение. Последовательность экспериментов называется последовательностью независимых экспериментов, если вероятность $P(A_i^k)$ не зависит от номера испытания и от результатов предшествующих экспериментов: $P(A_i^k) = p_i$, $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$.

Примером схем зависимых и независимых экспериментов является пример Урновой модели. Если извлечение шаров производится с возвращением, то это последовательность независимых испытаний, если извлечения без возвращения, то имеем зависимость вероятности от номера эксперимента и от исходов предшествующих экспериментов.

Схема независимых испытаний с двумя исходами A и $\overline{A}$ называется схемой Бернулли.

В схеме Бернулли из n экспериментов нас интересует m - число экспериментов, в которых осуществилось событие A, $0 \leq m \leq n$.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в последовательности из n независимых испытаний событие A появится ровно m раз равна:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$, $p + q = 1$, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Отметим, что по теореме сложения вероятностей вероятность того, что m лежит в пределах от $m_0 \leq m \leq m_1$ равна

$$P(m_0 \leq m \leq m_1) = \sum_{m=m_0}^{m_1} P_n(m).$$

Событие $\{0 \leq m \leq n\}$ достоверно, следовательно,

$$P(0 \leq m \leq n) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1.$$

Решение типовых примеров.

Пример. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно зафиксированных в этом месяце 8 дней дождливыми окажутся: а) три дня; б) не менее трех дней; в) не более трех дней.

Решение. Наблюдения в условиях данной задачи являются независимыми. Вероятность выпадения дождя в любой день сентября $p = \frac{12}{30} = 0,4$, а вероятность того, что в любой день сентября дождя не будет, $q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$.

Вероятность $P_n(m)$ того, что в n наблюдениях событие наступит m раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

а) По условию задачи $n = 8$, $m = 3$, $p = 0,4$, $q = 0,6$. Тогда
$P_8(3) = C_8^3(0,4)^3(0,6)^5 = 0,278692$.

б) Поскольку $n = 8$, $3 \leq m \leq 8$, $p = 0,4$, $q = 0,6$, то
$P(3 \leq m \leq 8) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) =$
$= 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) = 1 - (0,6)^3 - 8 \cdot 0,4 \cdot (0,6)^7 - 28 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^6 = 0,624893$.

в) Так как $n = 8$, $0 \leq m \leq 3$, $p = 0,4$, $q = 0,6$, то
$P(0 \leq m \leq 3) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) = 0,653309$.

Задачи.

1. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут а) три; б) не менее трех.

2. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.

3. Вероятность работы каждого из семи моторов в данный момент равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) хотя бы один мотор; б) два мотора; в) три мотора.

4. Производится стрельба по цели 3-мя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель с вероятностью 0,3; если 2 снаряда – с вероятностью 0,7, если три снаряда – с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

5. Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций выигрышными окажутся три.

6. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до одного попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется не израсходованным, если вероятность попадания при каждом броске 0,1.

7. В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

8. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. Каждая попавшая в корабль торпеда с одинаковой вероятностью попадает в любой из k отсеков, на которые разделена подводная часть корабля. Торпеда, попавшая в отсек, приводит к его заполнению водой. Корабль идет ко дну, если водой заполнено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну.

9. Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем испытаниям. первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью $0,9$; второе - с вероятностью $0,95$; третье с вероятностью - $0,8$ и четвертое - с вероятностью $0,85$. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно:

   A - все четыре испытания;

   B - Ровно два испытания (из четырех);

   C - Не менее двух испытаний (из четырех).

7 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Понятие случайной величины – одно из важнейших понятий теории вероятностей.

Примеры.

1. Опыт – бросание игральной кости, случайная величина – количество выпавших очков.

2. Опыт – проведение серии из N выстрелов по мишени, случайная величина – количество попаданий в цель.

3. Опыт – эксплуатация ЭВМ, случайная величина – время работы до первого отказа.

4. Опыт – измерение угла, случайная величина – погрешность измерения.

Пусть Ω - пространство элементарных исходов. Обозначим через $\Re(\Omega)$ класс всех подмножеств множества Ω.

Определение. Класс $S \subset \Re(\Omega)$ называется алгеброй множеств, если

1) $\emptyset \in, \Omega \in S$;

2) если $A \in S$, то $\overline{A} \in S$;

3) если $A_1, A_2 \in S$, то $A_1 \bigcup A_2 \in S$, $(A_1 \bigcap A_2 \in S)$.

Определение. Класс $S \subset \Re(\Omega)$ называется σ-алгеброй множеств, если

1) S есть алгебра множеств;

2) если $A_1, A_2, ... \in S$, то $\bigcup A_i \in S$, $(\bigcap A_i \in S)$.

Определение. Случайной величиной ξ называется функция, заданная на пространстве Ω, принимающая вещественные значения: $\xi(\omega) = x$, где $\omega \in \Omega$, $x \in R$. При этом предполагается, что все события вида $\{\xi < a\} = \{\omega \in \Omega : \quad \xi(\omega) < a$ S , то есть для них вероятность определена, a - любое вещественное число.

Такие функции называются измеримыми функциями.

Со случайными величинами можно действовать как с обычными функциями: их можно складывать, перемножать.

Важнейшей характеристикой случайной величины является ее функция распределения.

Определение. Функцией распределения случайной величины ξ называется такая определенная на всей числовой прямой функция $F_\xi(x)$, что ее значение в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$, то есть

$$F(x) = P(\xi < x), \quad \forall x \in R.$$

Функция распределения дает полную информацию о вероятности случайных событий, порожденных случайной величиной.

Свойства функции распределения.

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

2. $F_\xi(x)$- неубывающая.

3. Вероятность попадания значений случайной величины ξ в промежуток $[a, b)$ $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$.

4. $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(+\infty) = 1$.

5. Непрерывна слева в каждой точке $\lim_{x_0 \to -0} F(x) = F(x_0)$.

Дискретная случайная величина.

Определение. Случайная величина ξ называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетно, то есть может быть занумеровано натуральными числами и существует распределение вероятностей такое что:

$P\{\xi = x_i\} = p_i$, где $p_i > 0$, $\sum_{k=1}^{n,\infty} p_i = 1$.

Примеры.

1. Число выпадений герба при N - кратном бросании монеты.

2. Количество бракованных изделий в выборке фиксированного объема из данной партии.

3. Количество вызовов, поступающих на телефонную станцию, в течение фиксированного промежутка времени.

Для того, что бы задать дискретную случайную величину (д.с.в.), достаточно перечислить все значения случайной величины и указать вероятности, с которыми эти значения принимаются.

Определение. Рядом распределения д.с.в. ξ называется таблица из двух строк, в верхней строке которой перечисляют (в порядке возрастания) все значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ случайной величины ξ, а в нижней строке – соответствующие вероятности $p_1, p_2, ..., p_n, ...$, с которыми принимаются эти значения.

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

(1)

Здесь $P(\xi = x_i) = p_i$, $\Sigma p_i = 1$.

Ряд распределения полностью характеризует случайную величину, тем самым представляет один из видов закона распределения.

Замечание. Постоянная величина C - дискретная случайная величина, принимающая единственное значение C с вероятностью $p = 1$. Ее ряд распределения имеет вид

ξ	C
p	1

Непрерывная случайная величина.

Определение. Случайная величина ξ называется непрерывной случайной величиной (н.с.в.), если существует неотрицательная интегрируемая на всей вещественной оси функция $f_\xi(x)$, называемая плотностью распределения вероятностей, такая что вероятность попадания значений случайной величины в любой промежуток $[a,b]$ есть интеграл от плотности по этому промежутку

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f_\xi(x)dx,$$

Свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения определена на всей числовой прямой.

2. $f(x) \geq 0 \forall x \in R$.

3. Пусть ξ - н.с.в., $F(x)$ - ее функция распределения, $f(x)$ - ее плотность распределения, тогда $\forall x \in R$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

5. $F'(x) = f(x)$.

Замечание. Геометрический смысл свойств 3 и 4.

Соотношение $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ означает, что площадь бесконечной фигуры между осью абсцисс и графиком плотности распределения равна единице. А равенство $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ означает, что вероятность попадания значений н.с.в. левее точки x равна площади части криволинейной трапеции, лежащей левее точки x, ограниченной осью Ox и графиком плотности распределения $f(x)$.

Функция распределения $F(x)$ н.с.в. непрерывна на всей числовой оси как интеграл с переменным верхним пределом.

Из непрерывности функции распределения следует, что вероятность попадания значений случайной величины в фиксированную точку равна нулю $P(\xi = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

Таким образом

$$P(a \leq \xi \leq b) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Решение типовых примеров.

Пример 1. При измерении окружности груди у 25 спортсменов установлено, что у троих этот объем равен 88 см, у четверых – 92 см, у пятерых – 96 см, у шестерых – 98 см и у семи – 100 см. Пусть случайная величина ξ - окружность груди спортсмена. Построить закон распределения и функцию распределения такой случайной величины.

Решение. Вероятность обнаружения среди 25 спортсменов троих с окружностью груди, равной 88 см, $p_1 = \frac{3}{25} = 0,12$. Аналогично вычисляется вероятность обнаружения среди 25 спортсменов четверых с окружностью груди – 92 см, $p_2 = \frac{4}{25} = 0,16$ и т. д. Получаем закон распределения случайной величины ξ в виде следующей таблицы:

ξ	88	92	96	98	100
p	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28

Далее находим функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 88; \\ 0,12, & 88 < x \leq 92; \\ 0,28, & 92 < x \leq 96; \\ 0,48, & 96 < x \leq 98; \\ 0,72, & 98 < x \leq 100; \\ 1, & x > 100. \end{cases}$$

Пример 2. Дана функция распределения случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$. Вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[0,5; 1,5]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение. Так как $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2]; \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

$P(0,5 \leq \xi \leq 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{(0,5)^2}{4} = 0,5.$

Задачи.

1. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа стандартных деталей среди отобранных.

2. В партии из десяти деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

3. Вероятность получения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна $0,5$. Составить ряд распределения отношения числа X появлений герба к числу Y появлений решки.

4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равно 0,8. Стрелку даются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составит закон распределения дискретной случайной величины ξ - числа патронов выданных стрелку.

5. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Составить закон распределения случайной дискретной величины ξ - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

6. Контролер извлекает для проверки по одной детали из ящика (без возвращения). Проверка прекращается, как только обнаруживается бракованная деталь. До начала проверки в ящике находились 4 однотипные детали, причем 2 детали поступили с первого автомата, а 2 - со второго автомата. Известно, что первый автомат производит бракованную деталь с вероятностью 0,1, а второй - с вероятностью 0,2. Составить закон распределения числа проверенных деталей.

7. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать рад распределения числа нестандартных деталей среди отобранных четырех.

8. Баскетболист бросает мяч в корзину. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания равна 0.4.

9. С вероятностью попадания при одном выстреле 0.7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Пусть ξ - число промахов. а) Найти ряд распределения ξ. б) Найти вероятность событий: $\xi < 2$, $\xi \leq 3$. в) Построить функцию распределения.

10. Производится два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Пусть ξ - разность между числом попаданий и числом промахов. Построить ряд распределения ξ.

11. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до тех пор, пока один из них не промахнется. Вероятность попадания для первого стрелка равна p_1, а

для второго – p_2. Найти законы распределения количества выстрелов, произведенных каждым стрелком.

12. Задана функция распределения случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0,25, & 1 < x \le 3; \\ 0,4, & 3 < x \le 4; \\ 0,8, & 4 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найти вероятность событий: $\xi = 1$, $\xi = 2$, $2 \le \xi \le 4$. Построить ряд распределения случайной величины ξ.

13. Задана функция распределения случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0,3, & 2 < x \le 3; \\ 0,5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность событий: $1 \le \xi \le 3$, $2 < \xi \le 3$. Построить ряд распределения случайной величины ξ.

14. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в 2 мин. подает красный и зеленый сигналы; случайная величина ξ - число остановок автомобиля на этой улице. Найти закон распределения указанной случайной величины ξ и ее функцию распределения $F(x)$.

15. Производится три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,4, вторым - 0,5, третьим - 0,6; случайная величина ξ - число поражений мишени. Найти закон распределения указанной случайной величины ξ и ее функцию распределения $F(x)$.

16. Задана функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывной случайной величины ξ, причем в выражении $F_\xi(x)$ входят неизвестные постоянные. Требуется:

    1) найти неизвестные постоянные;

    2) найти плотность $p_\xi(x)$ случайной величины ξ, если она существует;

    3) найти вероятность $P(\alpha \le \xi < \beta)$;

4) найти вероятность того, что случайная величина ξ при n независимых наблюдениях точно k раз, примет значения принадлежащие промежутку $[\alpha, \beta)$.

а)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a + bx, & 0 < x \le h; \\ 1, & x > h. \end{cases}$$

$\alpha = h/2$, $\beta = 3h/2$, $n = 3$, $k = 2$.

б) $F_\xi(x) = a + b \cdot arctgx$, $\alpha = -1/\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{3}$, $n = 4$, $k = 3$.

в)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ a + b \cdot arcsinx, & -1 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 5$, $k = 4$.

г)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ sinx, & 0 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

$\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{4}$, $n = 3$, $k = 1$.

17. Задана плотность $f_\xi(x)$ распределения непрерывной случайной величины ξ, содержащая некоторые произвольные постоянные. Найти:

1) Неизвестные постоянные;

2) Функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величиныξ;

3) Вероятности $P(\alpha_1 \le \xi \le \beta_1)$, $P(\alpha_2 < \xi < \beta_2)$.

а)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & 1/2 < x \le 2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$.

б)

$$f(x) = \begin{cases} asinx, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = \pi/2$.

в)

$$f(x) = \begin{cases} ax^3, & 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 1/4$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3/4$.

Числовые характеристики случайных величин.

Функция распределения позволяет находить вероятности случайных событий, связанных с данными случайными величинами. Эту же информацию можно извлечь из ряда распределения д.с.в. и плотности распределения н.с.в. На практике, когда нет возможности, а иногда и необходимости, иметь столь полную информацию о случайной величине, часто достаточно знать некоторые численные параметры, которые хоть и не полностью определяют случайную величину, но тем не менее дают представление о ее принципиальных свойствах и особенностях.

Определение. Математическим ожиданием или средним значением д.с.в. ξ, принимающей значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ называется число

$$M\xi = \sum_i x_i p_i,$$

где ряд предполагается абсолютно сходящимся. В противном случае считают, что д.с.в. ξ не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой прямой.

Математическое ожидание расположено между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины.

Определение. Математическим ожиданием или средним значением непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ называется число, определяемое равенством

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

при условии, что интеграл абсолютно сходится. В противном случае считают, что н.с.в. не имеет математического ожидания.

Вероятностный смысл математического ожидания н.с.в. такой же как и в дискретном случае.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине $MC = C$, $C = const$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания $M(c\xi) = cM\xi$.

3. Если к случайной величине ξ добавить константу, то математическое ожидание изменится на эту же константу $M(\xi + C) = M\xi + C$.

4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Определение. Отклонением ξ^0 случайной величины ξ от ее математического ожидания $M\xi$ называется разность $\xi^0 = \xi - M\xi$. Отклонение ξ^0 называется центрированной случайной величиной, ее математическое ожидание равно нулю $M\xi^0 = M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0$.

Помимо математического ожидания к характеристикам положения относятся мода и медиана.

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины ξ, заданной рядом распределения (1), называется наиболее вероятное ее значение по сравнению с соседними, то есть такое x_m, что $P(\xi = x_m) = max_{m-1 \leq k \leq m+1} P(\xi = x_k)$.

Модой M_0 непрерывной случайной величины называется точка локального максимума функции плотности распределения.

В общем случае мода и математическое ожидание случайной величины не совпадают. В частности, когда распределение является симметричным и модальным (то есть имеет моду) и существует математическое ожидание, то оно совпадает с модой и центром симметрии распределения.

Определение. Медианой непрерывной случайной величины называется число M_e, удовлетворяющее условию

$P(\xi \leq M_e) = P(\xi \geq M_e)$, то есть любое решение уравнения $F(x) = \frac{1}{2}$.

Так как уравнение может иметь несколько корней, то медиана определяется не однозначно.

Геометрическая медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам. В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

Важнейшими и наиболее употребимыми из характеристик рассеивания являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Определение. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание $M\xi$, называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для удобства введем еще одну характеристику рассеивания, размерность которой совпадает с размерностью самой случайной величины.

Определение. Средним квадратическим отклонением σ называется квадратный корень из дисперсии $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Теорема (о вычислении дисперсии):

Если случайная величина ξ^2 имеет математическое ожидание, то случайная величина ξ имеет дисперсию $D\xi$, для которой справедливы соотношения:

1. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, где $M\xi^2$ вычисляется по формуле $M\xi^2 = \sum_i x_i^2 p_i$ или $M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ в зависимости от типа случайной величины.

2.

$$D\xi = \begin{cases} \sum_i (x - M\xi)^2 p_i; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx. \end{cases}$$

Без доказательства.

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $DC = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его предварительно в квадрат: $D(c\xi) = c^2 D\xi$.

3. Если к случайной величине добавить постоянную, то дисперсия не изменится: $D(\xi + C) = D\xi$.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Дан ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	3	5	7	9
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

Решение. Вычислим математическое ожидание. По определению имеем $M\xi = 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,3 = 6,6$.

Дисперсию вычислим по формуле

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

где $M\xi^2 = \sum_i x_i^2 p_i$. В нашем случае получим $M\xi^2 = 3^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,1 + 7^2 \cdot 0,4 + 9^2 \cdot 0,3 = 48,2$, $D\xi = 48,2 - (6,6)^2 = 4,64$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{4,64} \approx 2,15$. Наиболее вероятное значение (мода) $M_0 = 7$.

*Пример 2.*Дана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2, & x \in [0,2]; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Решение. Вычислим математическое ожидание

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4\right)\Big|_0^2 = 1.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

где $M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$. В нашем случае получим

$$M\xi^2 = \int_0^2 x^2\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^4\right)\Big|_0^2 = 1,2,$$

$D\xi = 1,2 - 1^2 = 0,2$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0,2} \approx 0,45$.

Задачи.

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

а)

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

б)

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2. Известны дисперсии двух независимых случайных величин X, Y: DX=4, DY=3. Найти:

   а) дисперсию суммы X+Y;

   б) дисперсию разности X-Y;

   в) дисперсию -2X+3Y;

   г) дисперсию X-1 и 3X+6.

3. Для случайной величины X распределенной по закону $P(x_1 = 4) = 1/4$, $P(x_2 = 10) = 1/2$, $P(x_3 = 20) = 1/4$ найти математическое ожидание MX, дисперсию DX и среднеквадратическое отклонение σ.

4. Дискретная случайная величина имеет распределение $P(x_1 = -1) = 0,2$, $P(x_2 = 0) = 0,1$, $P(x_3 = 1) = 0,3$, $P(x_4 = 4) = 0,4$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2^x$.

5. Случайная величина ξ задана функцией распределения

   $F_\xi(x) = 0$, если $x \le 2$; $F_\xi(x) = 0,5x - 1$, если $2 < x \le 4$; $F_\xi(x) = 1$, если $x > 4$.

   Найти : а) математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$; б) вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение в интервале $(2, 3)$.

6. Непрерывная случайная величина ξ распределена в интервале по закону с плотностью

   $f_\xi(x) = 2x$, если $0 < x < 1$; иначе 0.

   Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата случайной величины $\eta = \xi^2$.

7. Непрерывная случайная величина ξ распределена в интервале по закону с плотностью

   $f_\xi(x) = acosx, -\pi/2 < x < \pi/2$, иначе 0.

   Найти: а) коэффициент a; б) математическое ожидание случайной величины ξ; в) вероятность того, что ξ попадет в интервал $[\pi/6, \pi/3]$.

8. Случайная величина ξ задана функцией распределения $F_\xi(x)$:

   а)
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ lnx^2, & 1 < x \le \sqrt{e}; \\ 1, & x > \sqrt{e}. \end{cases}$$

   б)
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3), & -1 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

   в)
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ sin\pi x, & 0 < x \le \frac{1}{2}; \\ 1, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   г)$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctg(x)$

   Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану (если они существуют).

9. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны соответственно 2 и 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины η: а) $\eta = 2\xi$; б) $\eta = 2\xi + 7$; в) $\eta = 3\xi + 1$; г) $\eta = 3\xi - 2$.

10. Дана дискретная случайная величина ξ:

ξ	-2	1	2
p	p_1	p_2	p_3

Найти вероятности p_1, p_2, p_3, если известно, что $M\xi = 1$, $D\xi = 1,5$.

11. Нормально распределенная величина задана плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Найти моду и медиану ξ.

12. Случайная величина ξ распределена по закону, определяемому плотностью распределения вероятностей вида

$f_\xi = c\cos x$, если $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ и $f_\xi = 0$, если $|x| > \pi/2$.

Найти константу c, вычислить $P\{|\xi| < \pi/4\}$, M_ξ и D_ξ. Квантилью какого порядка для данного распределения является точка $x = \pi/4$?

13. Найти медиану экспоненциального распределения.

8 ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

***Распределение Бернулли (биномиальное)* $\xi \sim B(n,p)$.**

Параметры распределения: n - натуральное число, $0 < p < 1$.

Распределение называется *Распеределением Бернулли*, если оно сосредоточено в целочисленных точках m, $0 \leq p \leq 1$ множества $N = \{m\}_0^n$. Вероятностная мера каждой точки m равна $P_\xi(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

Математическое ожидание биномиально распределенной случайной величины ξ $M_\xi = np$ и дисперсия $D_\xi = np(1-p)$.

***Распределение Пуассона* $\xi \sim \mathbf{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.**

Распределение называется *Распеределением Пуассона*, если оно сосредоточено в множестве натуральных чисел $m \in N$, $m = 0, 1, 2, ...$ и мера точки задается формулой:

$$P_\xi(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ причем} \sum_{m=0}^{\infty} P_\xi(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины имеющей распределение Пуассона $M_\xi = D_\xi = \lambda$.

Равномерное абсолютно-непрерывное распределение.

Случайная величина распределена равномерно, если плотность распределения ее вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Для этой случайной величины математическое ожидание и дисперсия имеют вид

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{a+b}{2} \\ D_\xi &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Показательное распределение.

Определение. Случайная величина ξ называется распределенной по показательному закону, если плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geq 0, a > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия такой случайной величины принимают значения

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{1}{a} \\ D_\xi &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Гауссовское нормальное распределение.

Определение. Случайная величина ξ называется распределенной по гауссовскому или нормальному закону с параметрами $a \in R$ и $\sigma > 0$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Параметры совпадают с основными характеристиками распределения: $M_\xi = a$ и $D_\xi = \sigma^2$.

Короткая запись: $\xi \sim N(a, \sigma)$.

Если $\xi \sim N(0, 1)$, то она называется нормированной нормальной величиной. Ее функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Функция распределения нормированной случайной величины связана с функцией Лапласа $\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ соотношением

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

С помощью функции Лапласа можно вычислять интервальные вероятности для нормального распределения $N(a, \sigma)$:

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Значения функции $\Phi(x)$ приведены в приложении (Приложение 2). При решении задач на нормальное распределение часто требуется использовать табличные значения функции нормального распределения. Поскольку для этой функции справедливо соотношение

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \qquad (2)$$

достаточно иметь табличные значения функции $\Phi(x)$ только для положительных значений аргумента. Для вероятности попадания на симметричный относительно математического ожидания интервал справедлива формула

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Распределение χ^2.

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - независимые случайные величины, причем $\xi_k \sim N(0,1)$. Говорят, что случайная величина ξ распределена по закону χ^2 с n степенями свободы, если $\xi = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2$.

Распределение Стьюдента.

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - независимые случайные величины, причем $\xi \sim N(0,\sigma)$ и $\xi_k \sim N(0,\sigma)$. Говорят, что случайная величина η распределена по закону Стьюдента с n степенями свободы, если $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2+...+\xi_n^2)}}$.

Решение типовых примеров.

Пример 1. Производится измерение без систематических ошибок диаметра вала. Случайные ошибки измерения ξ подчиняются нормальному распределению со стандартным отклонением 10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине15 мм.

Решение. Так как по условию систематические ошибки отсутствуют, то $M\xi = 0$мм. Стандартное отклонение — это другое название для среднеквадратического отклонения, часто используемое на практике. Поэтому $\sigma = 10$ мм.

Для искомой вероятности попадания в симметричный интервал используем формулу

$$P(|\xi| < 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) = 2\Phi(1,5).$$

По таблице Приложения 2 находим $\Phi(1,5) \approx 0,4332$. Таким образом,

$$P(|\xi| < 15) \approx 0,8664.$$

Задачи.

1. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны $\frac{4}{5}$ и независимы. Испытания заканчиваются после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний. Вычислить математическое ожидание и дисперсию полученного распределения.

2. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами $a = 1$, $\sigma = 2$. Выразить её функцию распределения через функцию $\Phi(x)$.

3. Случайная величина ξ распределена по закону $N(a, \sigma)$. Пользуясь таблицей функции нормального распределения, вычислить вероятность p_k того, что отклонение величины ξ от её математического ожидания не превзойдёт величины $k\sigma$ (ответ получить для трёх значений $k = 1, 2, 3$).

4. Измеряемая случайная величина ξ подчиняется закону распределения $N(10, 5)$. Найти симметричный относительно $M\xi$ интервал, в который с вероятностью p попадет измеренное значение. Рассмотреть сведущие числовые значения: a) $p = 0,9974$; b) $p = 0,9544$; c) $p = 0,50$.

5. В нормально распределенной совокупности 15% значений x меньше 12 и 40% значений x больше 16,2. Найти среднее значение и стандартные отклонение данного распределения.

6. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины ξ равно $a = 3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$. Написать плотность вероятности ξ.

7. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины ξ, зная, что $M\xi = 3$, $D\xi = 16$.

8. Нормально распределенная случайная величина ξ задана плотностью $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ.

9. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины ξ соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что а результате испытания ξ примет значение, заключённое в интервале (15,25).

10. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение её контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм и

математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

11. Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадёт величина ξ в результате испытания.

12. Вероятность наступления события в каждом испытании равна p $(0 < p < 1)$. Испытания проводятся до тех пор, пока событие не наступит. Случайная величина ξ - число испытаний, которые надо произвести до появления события. Найти: а) закон распределения СВ ξ; б) Математическое ожидание ξ; в) дисперсию ξ.

9 ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. КВАНТИЛИ. ТАБЛИЦЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Доверительные интервалы для значений случайных величин.

При изучении и практическом применении теории вероятностей большое значение имеют определения класса практически невозможных событий, это те события которыми можно пренебрегать, и класс практически достоверных событий.

Определение. Для заданного критического значения γ_0 (малых значений вероятности) события, вероятность которых меньше γ_0, называются практически невозможными событиями. Противоположные события образуют класс практически достоверных событий, это события вероятность осуществления которых больше, чем $1 - \gamma_0$.

Обозначим $1 - \gamma_0 = \alpha_0$ и будем называть уровнем доверия или доверительной вероятностью. Тогда для случайной величины областью доверительных значений случайной величины, называется область D для которой $P(\xi(\omega) \in D) = P_\xi(D) \geq \alpha_0$. Область D определенная соотношением $P_\xi(D) \geq \alpha_0$ определяется неоднозначно. Любая область $D_1 \supset D$, в силу монотонности меры $P_\xi(D_1) \geq \alpha_0$. Область D выбирается так чтобы

$$\begin{cases} P_\xi(D) \geq \alpha_0, \\ \mu(D) \text{ - минимальна, где } \mu(D) \text{ — мера Лебега в } R_1. \end{cases}$$

Односвязной областью в R_1 является интервал $D = [a, b)$. Интервал удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} P_\xi\{[a, b)\} \geq \gamma_0, \\ \mu[a, b) = b - a - \min, \end{cases}$$

называется наикратчайшим доверительным интервалом.

Теорема. Для унимодальных абсолютно непрерывных случайных величин с плотностью $p(x)$, наикратчайшим доверительным интервалом с уровнем доверия α_0, является интервал $[a, b) = \{x \in R_1 : p(x) > c\}$, где c удовлетворяет условию $P(\xi(\omega) > c) = \alpha_0$.

Пояснение к теореме можно увидеть на Рис.1.

Квантили, процентные и критические точки.

В различных приложениях теории вероятностей и математической статистики важную роль играет определение границ, в которых лежат значения случайных величин с заданной вероятностью.

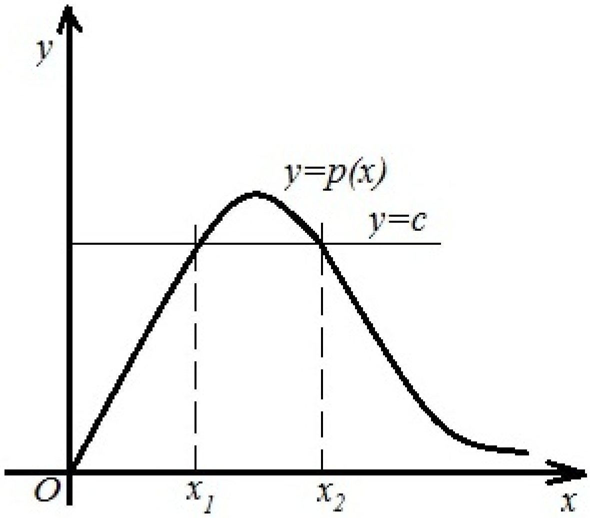

Рис.1. Интервал $[x_1, x_2]$ наиболее вероятных значений случайной величины с плотностью распределения $p(x)$.

Определение. Квантилью уровня p или p - квантилью непрерывной строго монотонной функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi(\omega) < x)$, называется решение x_p уравнения $F_\xi(x) = p$, для $0 < p < 1$.

Для $p = 1/2$ x_p называется медианой распределения.

Определение. Процентной точкой уровня q $(0 \leq q \leq 100)$, или q%-ной точкой, называется, такое значение случайной величины ν_q, что $P(\xi(\omega) \geq \nu_q) = 1 - F(\nu_q) = q/100$. Значение ν_q случайной величины $\xi(\omega)$ называется критической точкой распределения порядка q.

10 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ.

Сходимость почти наверное. Последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, ... сходится к случайной величине ξ с вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1.$$

Сходимость по вероятности. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ сходится к случайной величине ξ по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$$

Сходимость в среднем квадратичном. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ сходится к случайной величине ξ в среднем квадратичном, если

$$\lim_{n\to\infty} M|\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

Сходимость по распределению. Последовательность функций распределения $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$, $n = 1, 2, ...$ слабо сходится к функции распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$, если для любой точки x, где $F(x)$ непрерывна, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

(в этом случае говорят также, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ сходится к случайной величине ξ по распределению; при этом $\xi, \xi_1, \xi_2, ...$ могут быть заданы на различных вероятностных пространствах).

Первое неравенство Чебышева. Если случайная величина $\xi \geq 0$ и существует M_ξ, то $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M_\xi}{\varepsilon}$.

Второе неравенство Чебышева. Если случайная величина ξ имеет конечную дисперсию, то $\forall \varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность случайных величин, попарно независимы, а их дисперсии удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = 0,$$

(в частности, если дисперсии попарно независимых случайных величин равномерно ограниченны одной и той же постоянной: $D\xi_k \leq C$, $k = 1, 2, ...$, то выполняется предыдущее равенство)

то $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Хинчина. Если независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, ...$ одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания $M\xi$, то $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - M\xi| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Маркова. Для последовательности зависимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ удовлетворяющих условию:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\sum_{k=1}^{n}\xi_k = 0,$$

при $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k| < \varepsilon) = 1.$$

Решение типовых примеров.

Пример. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$, имеющих одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a}.$$

Проверить, применима ли к этой последовательности теорема Хинчина.

Решение. Для применимости теоремы Хинчина необходимо существование математического ожидания случайной величины ξ, т.е. чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{dF(x)}{dx}dx$ сходился абсолютно. Однако

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{dF(x)}{dx}dx = \frac{2a}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+a^2} =$$
$$= \lim_{A\to\infty}\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{A}\frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{a}{\pi}\lim_{A\to\infty}\ln(1+\frac{A^2}{a^2}) = \infty,$$

т.е. интеграл не сходится, математическое ожидание не существует и теорема Хинчина неприменима.

Задачи.

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на два средних квадратических отклонения.

2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания менее чем на три средних квадратических отклонения.

3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|\xi - M\xi| < 0,2$, если $D\xi = 0,004$.

4. Дано: $P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) \geq 0,9$ и $D\xi = 0,009$. Используя неравенство Чебышева, оценить ε снизу.

5. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время Т равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время Т окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

6. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время Т лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за время Т окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

7. Вероятность появления события A в каждом испытании равна $\frac{1}{2}$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число ξ появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

8. Вероятность появления события A в каждом испытании равна $\frac{1}{4}$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число ξ появлений события A заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 независимых испытаний.

9. Дискретная случайная величина задана законом распределения

ξ	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|\xi - M\xi| < 0,2$.

10. Дискретная случайная величина задана законом распределения

ξ	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|\xi - M\xi| < \sqrt{0,4}$.

11. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ задана законом распределения

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

12. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ задана законом распределения

ξ_n	a	$-a$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

13. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ...$ задана законом распределения

ξ_n	$n+1$	$-n$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

а) Убедиться, что требование теоремы Чебышева о равномерной ограниченности дисперсии не выполняется;

б) Можно ли от сюда заключить, что к рассматриваемой последовательности теорема Чебышева неприменима?

14. Дана последовательность независимых случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}$. Проверить, применима ли к этой последовательности теорема Хинчина.

15. Задан закон распределения попарно независимых случайных величин, образующих случайную последовательность ξ_n , $n = 1, 2, ...$ Выяснить применим ли к ней закон больших чисел.

ξ_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

16. Для некоторого автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях, равно 5.

а) Оценить вероятность события A - $\{$по истечении месяца в данном автопарке будет отправлено в ремонт меньше 15 автобусов$\}$, если информация о дисперсии отсутствует.

б) Оценить вероятность события A, если дисперсия равна 4.

11 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пример 1. Станок штампует детали. Вероятность того, что деталь выйдет бракованной, равна $0,005$. Какова вероятность того, что партия из 1000 деталей содержит: a) ровно 8 бракованных; b) не более 8 бракованных деталей?

Решение. Запишем решение задачи по формуле Бернулли. Получим

a) $P_{1000}(8) = C_{1000}^{8}(0,005)^8(0,995)^{992}$.

b) Пусть событие A – число бракованных деталей не более 8, $P_{1000}(k)$ – вероятность того, что среди 1000 деталей окажется ровно k бракованных. Тогда, очевидно, $P(A) = P_{1000}(k \leq 8) = \sum_{k=0}^{8} C_{1000}^{k}(0,005)^k(0,995)^1 000 - k$.

Вычисление по данным формулам значений вероятностей является очень затруднительным. Задачи, подобные приведенным в *Примере 1*, легко решаются при помощи так называемых предельных теорем.

Теорема Пуассона. Если последовательность положительных чисел p_n такова, что $np_n \to \lambda < \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $q_n = 1 - p_n$.

Из теоремы Пуассона следует, что если n велико и $p_n \to p$ мало, то

$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$,

где $\lambda = np$. Функция $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ табулирована (Приложение 3).

Продолжение решения *Примера 1* По таблице, приведенной в Приложении 3, находим численные значения вероятности событий для пункта a) и b), при чем $\lambda = np = 1000 \cdot 0,005 = 5$.

$$a) P_{1000}(8) \approx \frac{5^8}{8!}e^{-5} \approx 0,065.$$

$$b) P(A) \approx \sum_{k=0}^{k} \frac{5^k}{k!}e^{-5} \approx 0,932.$$

Локальная теорема Муавра - Лапласа. Если вероятность «успеха» , $0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n, то для $k \leq n$ и

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\left(1 + \varepsilon_n\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, для достаточно больших n

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ - четная функция, значения ее табулированы (Приложение 1)

Интегральная теорема Муавра - Лапласа. Если вероятность "успеха"равна p, $0 < p < 1$, при одном испытании и не зависит от числа испытаний n, то для любых целых $k_1 < k_2 \le n$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k_1 \le k \le k_2) = \lim_{n\to\infty} P_n(a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - нечетная функция, значения которой табулированы (Приложение 2), $a = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Следствие.

$$P_n(|\frac{k}{n} - p| \le \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}).$$

Отношение $\frac{k}{n}$ - называется относительной частотой появления "успеха"при n независимых испытаниях.

Замечание. Теорема Пуассона обычно используется при $p \le 0,1$ и $npq \le 9$. В случае, когда $npq > 9$, используются предельные теоремы Муавра - Лапласа.

Решение типовых примеров.

Пример 2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $0,8$. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах a) мишень будет поражена ровно 75 раз; b) не менее 75 раз и не более 90 раз; c) не менее 75 раз; d) не более 74 раз.

Решение. a) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. В нашем случае имеем

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2} = 4;$$
$$x = \frac{75-80}{4} = -1,25;$$
$$P_{100}(75) = 0,25\cdot\varphi(1,25) = 0,25\cdot 0,1826 = 0,046.$$

b) Для вычисления $P(75 \le k \le 90)$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра - Лапласа. Имеем

$$P(75 \le k \le 90) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $a = \frac{75-80}{4} = -1,25$; $b = \frac{90-80}{4} = 1,5$. Таким образом

$$P(75 \le k \le 90) = \Phi(1,4) - \Phi(-1,25) = 0,4332 + 0,3944 = 0,8276.$$

c) $P(k \ge 75) = P(75 \le k \le 100) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944$.

d) $P(0 \leq k \leq 74) = \Phi(b) - \Phi(a)$, где $a = -\frac{80}{4} = -20$, $b = \frac{74-80}{4} = -1,5$. $P(0 \leq k \leq 74) = \Phi(20) - \Phi(1,5) = 0,5 - 0,4332 = 0,0668$.

Пример 3. Монету подбрасывают 900 раз. Найти вероятность того, что относительная частота выпадения "орла"отклонится от $\frac{1}{2}$ по абсолютной величине не более чем на $0,02$.

Решение. По условию $\varepsilon = 0,02$; $n = 900$; $p = q = 0,5$. Следовательно,

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,02 \cdot \frac{30}{0,5} = 1,2;$$

$$P(|\frac{k}{900} - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi(1,2) = 0,7698.$$

Задачи.

1. Среди семян пшеницы 0,6 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном выборе 1000 семян обнаружить: а) не менее 3 семян сорняков; б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков?

2. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

3. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

6. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что герб выпадет ровно N раз.

7. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

8. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено m бракованных изделий среди проверенных.

9. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

10. При бросании монеты 4040 раз (опыт Бюффона), герб выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона частота появления герба отклонится по абсолютной величине от $\frac{1}{2}$ (вероятности появления герба при одном испытании) не более, чем в опыте Бюффона?

11. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равна 0,4, не более, чем на 0,1?

12. Отдел технического контроля проверяет стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

13. Вероятность появления события в каждом из 21 независимом испытании равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний?

14. В урне содержаться белые и черные шары в отношении 3:2. Производятся последовательные опыты по извлечению одного шара с возвращением, причем каждый раз фиксируется цвет вынутого шара. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0,9948, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины 0,05?

15. Вероятность некоторого изделия быть бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что среди 10 000 наугад взятых изделий 40 бракованных?

16. Книга в 400 страниц содержит 40 опечаток. Какова вероятность, что на случайно выбранной странице не менее 2 опечаток?

17. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность p того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

18. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируют его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения частоты появления белого шара от его вероятности будет не более, чем 0,01?

19. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

20. Среди коконов некоторой партии 20% цветных. Какова вероятность того, что среди 100 случайно отобранных из партии коконов 15 цветных? Не более 30 и не менее 15 цветных?

21. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит:

    1) ровно 5 бракованных книг;2) менее 3-х бракованных книг; 3) хотя бы одну бракованную книгу; 4) более 2-х бракованных книг.

22. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975, утверждать, что частота выпадения герба попадет в интервал $(0,4; 0,6)$? Получить оценку указанного числа, используя второе неравенство Чебышева. Получить эту оценку. считая применимой интегральную теорему Муавра- Лапласа.

12 ВЫБОРКА И СПОСОБЫ ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Выборка. Различные типы выбора.

Рассмотрим абстрактный эксперимент . В результате его проведения будем измерять значение x изучаемой случайной величины ξ.

Генеральное и выборочное распределение

Определение. Множество изучаемых (наблюденных) значений x_1, x_2,..., x_n случайной величины ξ называется выборкой или простой статистической совокупностью.

Числа x_1, x_2,..., x_n – элементы выборки (варианты), а их количество n – объем выборки.

Определение. Закон распределения изучаемой случайной величины ξ называется генеральным законом распределения. Это может быть генеральная функция распределения $F_\xi(x)$, генеральная плотность распределения $f(x)$ или таблица распределения в дискретном случае. Генеральный закон, как правило, не известен. Его изучают. Обозначим его $L(\xi)$.

В математической статистике по свойствам выборки делают заключение о свойствах изучаемой случайной величины ξ , то есть -– заключение о свойствах генерального закона распределения $L(\xi)$. Свойства выборки содержатся в ее законе распределения, который называется выборочным законом распределения.

Итак, по свойствам выборочного закона распределения делается заключение о свойствах генерального закона распределение.

Генеральная совокупность

Определение. Генеральной совокупностью называется множество возможных значений изучаемой случайной величины ξ с приписанным к нему законом распределения $L(\xi)$ случайной величины ξ.

Простой случайный выбор

Процесс составления выборки называется выбором.

Определение. Простым случайным выбором называется выбор с возвращением в Урновой модели, когда из конечного множества каждый элемент выбирается независимо и равновероятно с другими элементами.

Если один и тот же элемент выбран дважды, то он учитывается один раз.

Свойства такого выбора:

1. Повторяя выборку x_1, x_2,..., x_n несколько раз, в общем случае, будем получать новые элементы выборки, поэтому элементы выборки рассматриваются как случайные величины. Так как они принимают значения из одной и той же совокупности, то распределены одинаково – так же как и случайная величина ξ, образующая рассматриваемую генеральную совокупность. Так как каждый элемент выборки получен независимо от остальных, то все элементы выборки рассматриваются как независимые случайные величины.

2. Все элементы генеральной совокупности могут быть выбраны. При этом каждому элементу предоставляется равная возможность быть выбранным.

3. Каждый элемент x_i, $i = \overline{1,n}$ конкретной выборки получен в равных условиях выбора.

В математической статистике рассматривается только простой случайный выбор.

Виды реальных выборов

1. Механический выбор: выборку составляют по какой-либо закономерности. Например, делают измерения через равные промежутки времени, снимают с конвейера каждую десятую деталь и т. п.

2. Серийный выбор: в каждом опыте выбирается не один элемент, а целая серия. Например, выбирают не одно зерно, а целый колос при исследовании урожайности поля.

3. Типический выбор: генеральную совокупность разбивают на части и из каждой части берут случайных представителей в количестве, пропорциональном объему части.

4. Выбор на основе суждения (субъективный): выбор производится на основе какого-либо предварительного субъективного принципа. Например, обследуются не все партии, а одна, наиболее подозрительная на брак.

Все типы выборов могут комбинироваться между собой.

Типы выборок

К выборкам предъявляется ряд требований.

1. Репрезентативность. Выборка должна хорошо представлять всю генеральную совокупность. Для составления репрезентативной выборки более всего подходит типический выбор. Простой случайный выбор тоже репрезентативен, так как теоретически любой элемент генеральной совокупности может попасть в выборку, но менее надежен, чем типический. 2. Однородность. Условия проведения эксперимента для получения выборки не должны меняться. Неоднородная выборка не может дать правильного прогноза.

Различают малые и большие выборки, так как они отличаются методами обработки. Для обработки большой выборки привлекают асимптотические методы. Большой считают выборку объемом $n > 30$.

Вариационный и статистический ряд. Полигон частот

Описательная статистика начинается с упорядочения, осреднения и графического представления материала. Выборка является труднообозримым множеством, неудобным для последующего анализа. Для дальнейшего изучения выборку подвергают группировки, чтобы выявить ее характерные особенности, а, следовательно, и соответствующие свойства генеральной совокупности.

Определение. Вариационным рядом называется последовательность элементов выборки, расположенных в неубывающем порядке. Одинаковые элементы повторяются.

Элементы вариационного ряда x_i, $i = \overline{1, n}$ называются порядковыми статистиками. Минимальный и максимальный элементы называются крайними, то есть $x_{min} = x_1$, $x_{max} = x_n$.

Разность между максимальным и минимальным элементами выборки называется размахом, или широтой выборки $R = x_{max} - x_{min}$.

Пример. Измеренные с точностью до одного грамма отклонения веса деталей от номинала составили следующую выборку объема $n = 15$:

$(0; 3; -5; -3; 1; 0; 1; 3; 0; 0; -3; -1; -1; 0; -1)$.

Для нее вариационным рядом будет последовательность

$-5; -3; -3; -1; -1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 3; 3$

$x_{min} = -5, \quad x_{max} = 3, \quad R = 3 - (-5) = 8.$

Определение. Статистическим рядом называется последовательность различных элементов выборки z_1, z_2,..., z_k расположенных в возрастающем порядке с указанием частот n_1, n_2,...,n_k, с которыми эти элементы содержаться в выборке

z	z_1	z_2	...	z_k
n	n_1	n_2	...	n_k

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Пример. $n = 15$

z	-5	-3	-1	0	1	3
n	1	2	3	5	2	2

Статистический ряд можно наглядно изобразить в виде полигона частот, откладывая по оси Ox элементы z_i, $i = \overline{1, k}$ статистического ряда, а по оси Oy частоты n_i, $i = \overline{1, k}$. Полученные точки плоскости соединяют отрезками (рис. 1).

Группированный статистический ряд. Гистограмма

Если выборка получена из непрерывной генеральной совокупности и объем ее большой, то вариационный и статистический ряды, как и сама выборка, будут труднообозримыми множествами. Действительно, в этом случае при достаточно точном измерении практически не будет равных элементов

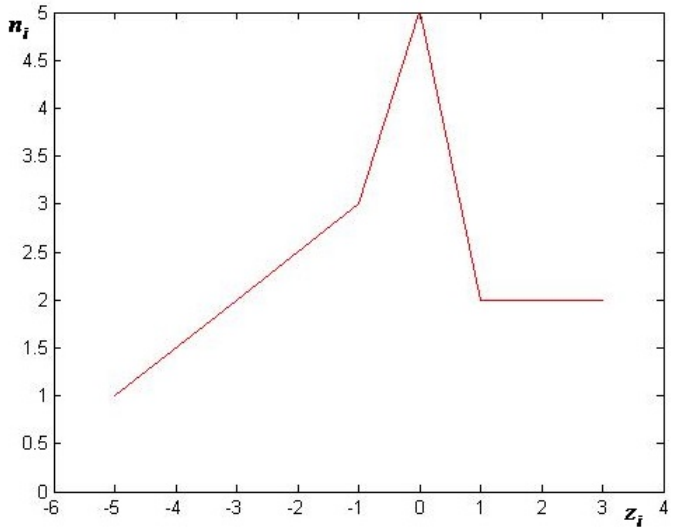

Рис. 1. Полигон частот

выборки, ибо вероятность совпадения элементов для непрерывного распределения равна нулю.

Пример. Проведено 100 измерений предела текучести стали (кг/мм) некоторого сорта стали. Данные помещены в таблицу и составляют первичную выборку.

Таблица 1.

3.4250	4.7280	2.5210	4.3170	4.7660	5.1100	2.5060	0.2688	5.2360	5.6630
4.7160	7.3370	4.4240	4.5110	6.1320	5.8610	4.9900	1.3600	3.5460	4.7300
3.0260	1.9920	4.2880	4.5640	1.2320	1.1150	5.8100	2.2930	5.6100	6.1580
5.1250	1.4010	4.7940	3.1010	5.4440	3.1460	5.7740	7.9850	4.1500	8.4000
5.0420	9.0690	6.4540	4.5470	5.0620	2.2340	3.0740	4.6930	5.1460	0.8608
1.9400	3.2490	4.6820	2.2920	2.8820	3.2450	2.0190	2.7920	0.8445	3.9030
2.4180	6.7600	3.1890	4.8660	6.5270	4.3220	4.4420	8.2070	5.1970	4.9320
6.0520	6.0230	5.8820	4.8490	6.1990	2.6390	6.4190	4.2600	2.9480	4.1540
4.9630	1.0920	2.8990	5.0330	0.9253	2.4120	2.9950	8.7560	4.7610	6.3020
3.8860	6.4320	5.4910	2.5720	4.0450	6.1000	6.0090	2.8890	4.3540	4.7720

Сгруппируем элементы выборки следующим образом. Промежуток $[x_{min}, x_{max}]$ делится на некоторое число k равных по длине промежутков. Обозначим эти промежутки Δ_1, Δ_2,..., Δ_k. Если точки, разделяющие эти промежутки, обозначить a_0, a_1,..., a_k, то $\Delta_1 = [a_0 = x_{min}, a_1]$, $\Delta_2 = (a_1, a_2]$,..., $\Delta_k = (a_{k-1}, x_{max} = a_k]$.

Пусть n_i – число элементов выборки, попавших в промежуток Δ_i. Числа n_1, n_2,... ,n_k – частоты попадания элементов выборки в промежутки Δ_1, Δ_2,..., Δ_k соответственно.

Определение. Совокупность промежутков Δ_1, Δ_2,..., Δ_k и соответствующих им частот n_1, n_2,... ,n_k называется группированным статистическим рядом.

Как выбрать число промежутков k?

При слишком большом k картина распределения будет искажена случайными колебаниями частот, при слишком маленьком k будут сглажены и затушеваны характерные особенности распределения.

Для определения числа интервалов k можно воспользоваться формулой Стерджеса, согласно которой рекомендуемое число интервалов разбиения $k \approx 1 + log_2 n$, где n – объем выборки. Так при $n = 40$, число интервалов $k = 6$, при $n = 100$, число интервалов $k = 8$, при $n = 10^6$, число интервалов $k = 21$.

Длина промежутков определяется по формуле

$$h = \frac{R}{k} = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}.$$

Группированный статистический ряд обычно оформляют в виде таблицы.

Пример. Из таблицы 1 видно, что $x_{min} = 0.2688$, $x_{max} = 9.0690$. Размах выборки $R = 9.0690 - 0.2688 = 8.8002$. Так как объем выборки $n = 100$, то число интервалов $k = 8$. Длина интервалов $h = \dfrac{8.8002}{8} = 1.100025$.

Делим промежуток $[0.2688, 9.0690]$ на 8 интервалов одинаковой длины и подсчитываем частоты.

a_{i-1}, a_i	$0.2688, 1.3688$	$1.3688, 2.4688$	$2.4688, 3.5689$	$3.5689, 4.6689$
n_i	8	9	19	15

a_{i-1}, a_i	$4.6689, 5.7689$	$5.7689, 6.8689$	$6.8689, 7.9690$	$7.9690, 9.0690$
n_i	26	17	1	5

Группированный статистический ряд можно изобразить в виде гистограммы (рис. 2).

Определение. Гистограммой выборки называется фигура, образованная прямоугольниками с основаниями Δ_i, $i = \overline{1, k}$ и высотами $\dfrac{n_i}{nh}$, $i = \overline{1, k}$.

С помощью гистограммы оценивается кривая плотности распределения вероятностей, так как ступенчатая ломаная, ограничивающая гистограмму сверху, близка к графику плотности вероятности. Площадь гистограммы равна единице.

Сравнивая гистограмму с известными графиками теоретических распределений можно выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности. Другим наглядным изображением группировочной выборки является полигон относительных частот. С помощью полигона так же оценивается кривая плотности распределения вероятностей.

Пример. Пример построения гистограммы.

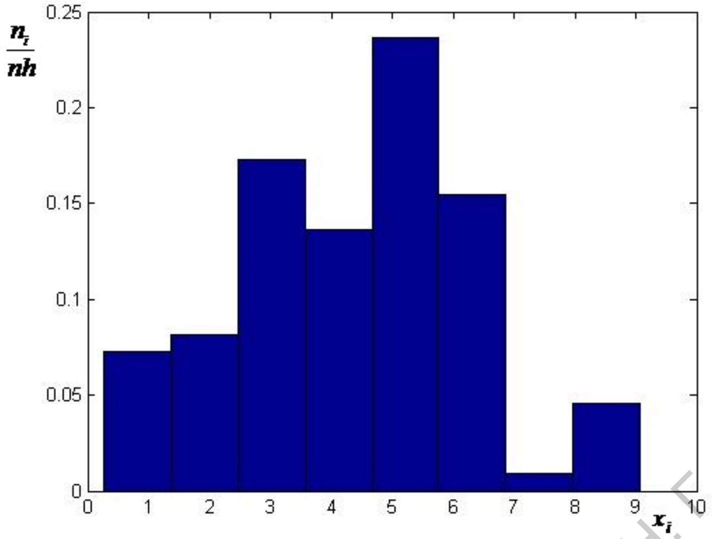

Рис. 2. Гистограмма

Эмпирическая функция распределения

Определение. Эмпирической (выборочной) функцией распределения называется относительная частота события $\xi < x$, полученная по данной выборке

$$F^* = P^*(\xi < x).$$

Для получения относительной частоты $P^*(\xi < x)$ просуммируем в статистическом ряде, построенном по данной выборке, все частоты n_i, для которых элементы z_i статистического ряда меньше x. Тогда

$$P^*(\xi < x) = \frac{1}{n} \sum_{z_i < x} n_i.$$

Получим

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{z_i < x} n_i.$$

Это функция распределения дискретной случайной величины ξ^*, заданной таблицей распределения

z	z_1	z_2	$\ldots$	z_k
n	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\ldots$	$\frac{n_k}{n}$

Пример.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -5, \\ 1/15, & \text{при} \quad -5 < x \le -3, \\ 3/15, & \text{при} \quad -3 < x \le -1, \\ 3/15, & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ 11/15, & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 13/15, & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Графиком такой функции распределения является ступенчатая функция (рис. 3)

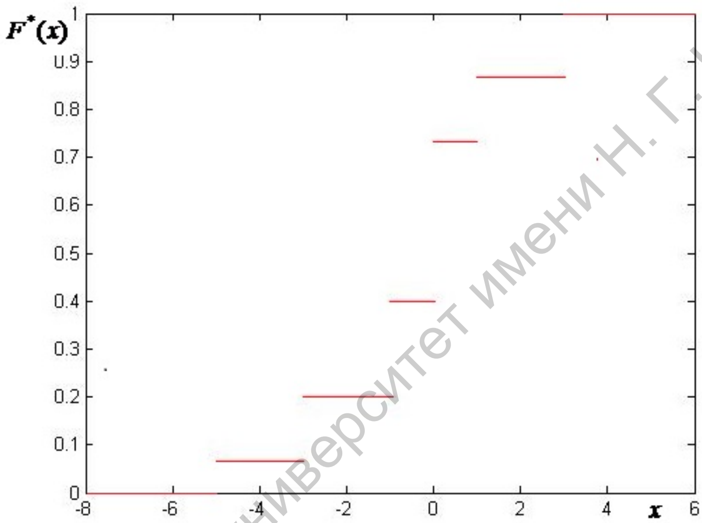

Рис. 3. График функции распределения

Теорема Гливенко. Для любого фиксированного значения x эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ при $n \to \infty$ стремиться к генеральной функции распределения

$$F_n^*(x) \to F_\xi(x), \text{при } x \to \infty \text{ или } P(\omega : sup_{x \in R}|F_n(x) - F(x)| \to 0) = 1.$$

Из этой теоремы следует, что эмпирическая функция распределения является оценкой генеральной функции распределения.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x	1	4	6
n	10	15	25

Решение. Найдем объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Наименьшая варианта равна единице, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$. Значение $\xi < 4$, а именно $x_1 = 1$, наблюдалось 10 раз, следовательно,

$F^*(x) = \dfrac{10}{50} = 0.2, \quad \text{при} \quad 1 < x \leq 4.$

Значение $\xi < 6$, а именно: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ наблюдались 10+15=25 раз; следовательно,

$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0.5, \quad \text{при} \quad 4 < x \leq 6.$$

Так как $x = 6$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 6$. Напишем искомую эмпирическую функцию:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leq 1, \\ 0.2, & \text{при} \quad 1 < x \leq 4, \\ 0.5, & \text{при} \quad 4 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

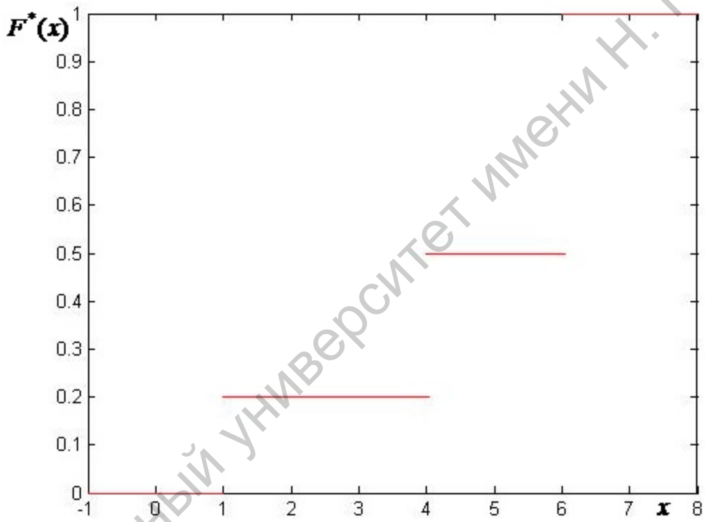

Рис. 4. График функции распределения

Пример 2. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

z	1	4	5	7
n	20	10	14	6

Решение. Отложим на оси абсцисс варианты z_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i, соединив точки (z_i, n_i) отрезками прямых, получим искомый полигон частот.

Пример 3. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$:

a_{i-1}, a_i	$1, 5$	$5, 9$	$9, 13$	$13, 17$	$17, 21$
n_i	10	20	50	12	8

Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины $h = 4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных $\dfrac{n_i}{nh}$. Например, над интервалом

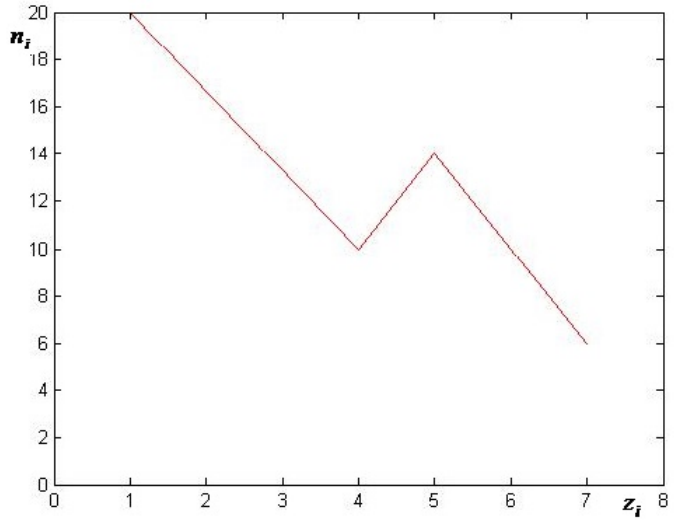

Рис. 5. Полигон частот

(1,5) построим отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии 0.025; аналогично строят остальные отрезки.

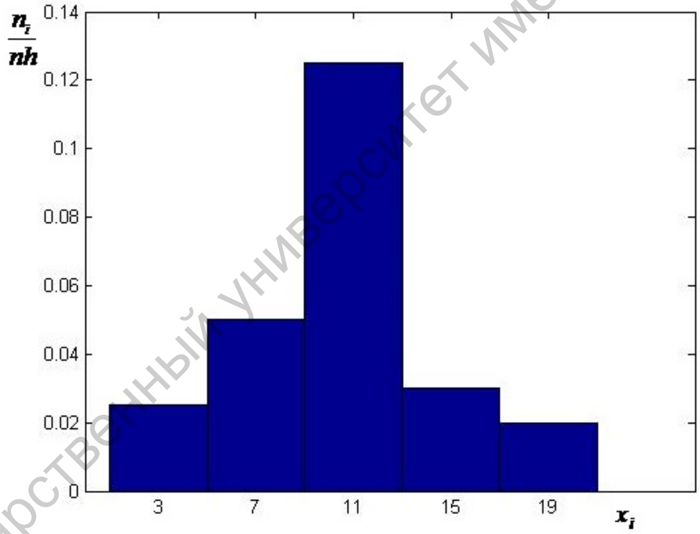

Рис. 6. Гистограмма

Задачи

1. Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

   а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

   б)

x_i	4	7	8
n_i	2	5	3

2. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

3. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки

а)

a_{i-1}, a_i	$10, 15$	$15, 20$	$20, 25$	$25, 30$	$30, 35$
n_i	2	4	8	4	2

б)

a_{i-1}, a_i	$2, 5$	$5, 8$	$8, 11$	$11, 14$
n_i	6	10	4	5

13 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ ПО ВЫБОРКЕ

Пусть закон распределения наблюдаемой случайной величины ξ известен, т.е. известна его функция распределения, но она зависит от одного или нескольких параметров: $F(x,\theta)$.

Пример. $\xi \sim N(a,\theta)$, $\theta \in (0,\infty)$.

Задача сводится к построению оценки параметра θ.

Пусть $f(X,\theta)$ плотность случайной величины ξ, если она распределена по непрерывному закону, и если она распределена по дискретному закону, то $f(X,\theta) = P(\xi = X)$.

Определение. Плотность распределения случайного вектора выборки $L(X,\theta) = L(x_1,...,x_n,\theta) = f(x_1,\theta)...f(x_n,\theta)$ называется *функцией правдоподобия*.

Определение. Оценкой параметра θ называется любая измеримая функция выборки $t(X) = t(x_1,x_2,...,x_n)$.

Определение. Оценка $t(X)$ параметра θ, называется *несмещенной*, если $M_\theta t(X) = \theta\ \forall\theta \in \Theta$.

$$M_\theta t(X) = \int_{R^n} t(x_1,...,x_n)L(x_1,...,x_n,\theta)dx_1...dx_n = \int_{R^n} t(X)L(X,\theta)dX.$$

Точечные оценки и их свойства.

Определение. Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1,...x_n)$, где $x_1,...x_n$ - результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

где x_i - варианта выборки, n_i - частота варианты x_i, $n = n_1 + .. + n_k$ - объем выборки.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}_{\text{В}}\right)^2;$$

эта оценка является смещенной, так как $M_{D_{\text{В}}} = \frac{n-1}{n}D_{\Gamma}$.

Более удобна формула

$$D_{\text{В}} = \overline{x^2} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2;$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{n-1}{n}D_{\text{В}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}_{\text{В}}\right)^2.$$

или

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2.$$

Методы отыскания точечных оценок.

Метод наибольшего правдоподобия.

Метод наибольшего правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения сводится к отысканию максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров.

Определение. Оценкой наибольшего правдоподобия параметра θ называют такое его значение θ^*, при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении θ, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут, максимум функции $\ln L$.

$\ln L$ называют логарифмической функцией правдоподобия.

Метод моментов.

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Если распределение определяется одним параметром, то для его отыскания приравнивают один теоретический момент одному эмпирическому моменту того же порядка.

Например: $M_\xi = \overline{x}_{\text{В}}$. Математическое ожидание является функцией от неизвестного параметра заданного распределения, поэтому, решив это уравнение относительно неизвестного параметра, тем самым получим его точечную оценку.

Если распределение определяется двумя параметрами, то приравнивают два теоретических момента двум соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$M_{\xi} = \overline{x}_{\text{В}}$$
$$D_{\xi} = D_{\text{В}}$$

Левые части этих равенств являются функциями от неизвестных параметров, поэтому, решив систему относительно неизвестных параметров, тем самым получим их точечные оценки.

Замечание. Для вычисления выборочного среднего и выборочной дисперсии необходимо располагать выборкой $x_1, ...x_n$.

Решение типовых примеров.

Пример 1. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) Выборочную и исправленную дисперсию ошибок прибора.

Решение. а) Найдем выборочную среднюю:

$\overline{x}_{\text{В}} = 92 + (0 + 2 + 11 + 13 + 14)/5 = 92 + 8 = 100$. б) найдем выборочную дисперсию:

$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x}_{\text{В}}\right)^2 =$
$= \frac{1}{5}\left((92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2\right) =$
$= 34$

Найдем исправленную дисперсию:

$s^2 = \frac{n}{n-1}D_{\text{В}} = \frac{5}{4}34 = 42,5.$

Пример 2. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона

$$P_m(x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda},$$

где m - число испытаний, произведенных в одном опыте; x_i - число появлений события в i - м опыте.

Найти методом моментов по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ, определяющего распределение Пуассона.

Решение. Для получения оценки одного параметра достаточно составить одно уравнение. Приравняем начальный теоретический момент первого порядка (математическое ожидание) и начальный эмпирический момент первого порядка (выборочное среднее), получим

$$M_\xi = \overline{x}_\text{В}.$$

Или $\lambda = \overline{x}_\text{В}$. Итак, точечной оценкой параметра λ распределения Пуассона служит выборочная средняя: $\lambda^* = \overline{x}_\text{В}$.

Пример 3. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность которого $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda}$, $x \geq 0$.

Решение. Составим функцию правдоподобия

$$L = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta),$$

учитывая $\theta = \lambda$ и, следовательно, $f(x_i;\theta) = f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$:

$$L = \lambda e^{-\lambda x_1}\lambda e^{-\lambda x_2}...\lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия $\ln L = n \ln\lambda - \lambda \sum x_i$.

Для отыскания максимума функции, найдем первую производную по λ логарифмической функции правдоподобия $\frac{d\ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i$.

Запишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:$\frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0$. Найдем критическую точку, для сего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\sum x_i}{n}} = \frac{1}{\overline{x}_\text{В}}.$$

Найдем вторую производную по λ: $\frac{d,2\ln L}{d\lambda,2} = \frac{-n}{\lambda^2}$.

При $\lambda = \frac{1}{\overline{x}_\text{В}}$ вторая производная отрицательна; следовательно, эта точка есть точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия надо принять величину, обратную выборочной средней: $\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}_\text{В}}$.

Задачи.

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

2. Задано распределение первоначальных вариант выборки объема n:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Доказать, что

$$\overline{x}_{\text{В}} = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i,$$

где условные варианты $u_i = x_i - C$.

3. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 1270$.

4. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 2620$.

5. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_{\text{В}} = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

6. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

7. В таблице приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов.

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-1
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

8. Найти выборочную и исправленную выборочную дисперсии по данному распределению выборки объема $n = 100$:

а)

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

б)

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

в)

x_i	0,01	0,04	0,08	0,09
n_i	27	43	13	17

г)

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	10	20	40	30

9. Найти исправленную выборочную дисперсии по данному распределению выборки

а) объема $n = 20$:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

б) объема $n = 10$:

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

10. а) Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона

$$P_m(x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda},$$

где m - число испытаний, произведенных в одном опыте; x_i - число появлений события в i - м опыте.

Найти методом моментов по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ, определяющего распределение Пуассона.

б) СВ ξ (число семян сорняков в пробе зерна) распределена по закону Пуассона. Распределение семян сорняков в $n = 1000$ пробах зерна (в первой строке указано количество x_i сорняков в одной пробе; во второй строке указана частота n_i - число проб, содержащих x_i семян сорняков) приведено в таблице:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона.

11. а) Найти методом моментов по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку параметра p биномиального распределения

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i},$$

где x_i - число появлений события в в i - м опыте $(i = 1, 2, ..., n)$, m - количество испытаний в одном опыте.

б) СВ ξ (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена биномиальному закону распределения с неизвестным параметром p. Ниже приведено эмпирическое распределение появлений события в 10 опытах по 5 испытаний в каждом (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке указана частота n_i - количество опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

Найти методом моментов точечную оценку параметра p биномиального распределения.

12. а) Найти методом моментов по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность которого $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda}$, $x \geq 0$.

    б) СВ ξ (время работы элемента) имеет показательное распределение. Ниже приведено эмпирическое распределение среднего времени работы $n = 200$ элементов (в первой строке приведено среднее время x_i работы элемента в часах; во второй строке указана частота n_i - количества элементов, проработавших в среднем x_i часов):

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

    Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра показательного распределения.

13. а) Найти методом моментов точечную оценку параметра p (вероятности) геометрического распределения $P(\xi = x_i) = (1-p)^{x_i-1}p$, где x_i - число испытаний, проведенных до появления события; p - вероятность появления события в одном испытании.

    б) Найти методом моментов точечную оценку параметра p (вероятности) геометрического распределения $P(\xi = x_i) = (1-p)^{x_i-1}p$, если в четырех опытах событие появилось соответственно после двух, четырех, шести и восьми испытаний.

14. а) Найти методом моментов по выборке $x_1, ...x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения, плотность которого

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

    б) СВ ξ (отклонение контролируемого размера изделия от номинала) подчинена нормальному закону распределения с неизвестными параметрами a и σ. Ниже приведено эмпирическое распределение отклонения от номинала $n = 200$ изделей (в первой строке указано отклонение x_i (мм);

во второй строке приведена частота n_i - количества изделий, имеющих отклонение x_i):

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения.

15. а) Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра p (вероятность появления события в одном испытании) биномиального распределения:

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i},$$

где x_i - число появлений события в в i - м опыте $(i = 1, 2, ..., n)$, m - количество испытаний в одном опыте, n - число опытов.

б) СВ ξ (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена биномиальному закону распределения с неизвестным параметром p. Ниже приведено эмпирическое распределение появлений события в 100 испытаний (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте из $m = 10$ испытаний; во второй строке указана частота n_i - количество опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку параметра p биномиального распределения.

16. а) Случайная величина ξ (число появлений события A в m независимых испытаниях) подчинена закону распределения Пуассона с неизвестным параметром λ :

$$P_m(x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda},$$

где m - число испытаний, произведенных в одном опыте; x_i - число появлений события в i - м опыте $(i = 1, 2, ..., n)$.

Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

б) СВ ξ (число поврежденных стеклянных изделий в одном контейнере) распределена по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Распределение числа поврежденных изделий в $n = 500$ контейнерах (в первой строке указано количество x_i поврежденных изделий в одном контейнере; во второй строке указана частота n_i - число контейнеров, содержащих x_i поврежденных изделий) приведено в таблице:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона.

17. а) Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, ...x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность которого $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda}$, $x \geq 0$.

б) СВ ξ (время безотказной работы элемента) имеет показательное распределение. Ниже приведено эмпирическое распределение среднего времени работы $n = 1000$ элементов (в первой строке приведено среднее время x_i безотказной работы одного элемента в часах; во второй строке указана частота n_i - количества элементов, проработавших в среднем x_i часов):

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

Найти методом наибольшего правдоподобия точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения.

18. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, ...x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения, плотность которого

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

14 ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Доверительные интервалы и доверительная вероятность.

Доверительные интервалы для параметров нормально распределенной генеральной совокупности.

1. Интервальной оценкой (с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака ξ по выборочной средней $\overline{x}_{\text{В}}$

   при *известном* среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

   $$\overline{x}_{\text{В}} - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < \overline{x}_{\text{В}} + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

   где $t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \delta$ - точность оценки, n - объем выборки, t - значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. Приложение 2), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;

   при *неизвестном* σ

   $$\overline{x}_{\text{В}} - t_{\gamma}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) < a < \overline{x}_{\text{В}} + t_{\gamma}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

   где s - исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, t_{γ} находится по таблице Приложения 4 по данным n и γ.

2. Интервальной оценкой (с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака ξ по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

   $$s(1-q) < \sigma < s(1+q)(\text{при} \quad q < 1),$$

   $$0 < \sigma < s(1+q)(\text{при} \quad q > 1),$$

   где q находят по таблице Приложения 5 по заданным n и σ.

Доверительные интервалы для вероятности успеха в схеме Бернулли и параметра λ распределения Пуассона.

3. Интервальной оценкой (с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$) неизвестной вероятности p биномиального распределения по относительной частоте ω служит доверительный интервал:

$$p_1 < p < p_2,$$

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega^2 + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right),$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega^2 + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right),$$

где n - общее число испытаний; m - число появлений события; ω - относительная частота, равная отношению $\frac{m}{n}$; t - значение аргумента функции Лапласа (Приложение 2), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ (γ - надежность).

Замечание. При больших значениях n (порядка сотен) можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1 = \omega^2 - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}},$$

$$p_2 = \omega^2 + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Задачи.

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака ξ генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочное среднее $\overline{x}_{\text{В}}$ и объем выборки n: а) $\sigma = 4$, $\overline{x}_{\text{В}} = 10,2$, $n = 16$; б) $\sigma = 5$, $\overline{x}_{\text{В}} = 16,8$, $n = 25$.

2. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma = 40$ м произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния a до цели с надежностью $\gamma = 0,95$, зная среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_{\text{В}} = 2000$ м.

   Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

3. Станок - автомат штампует валики. По выборке объема $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготовляемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

4. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна $\delta = 0,3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

6. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_{\text{В}} = 42,8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 8$. оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0,999$.

7. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

8. По данным выборки объема n из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение s нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999, если а) $n = 10$, $s = 5,1$; б) $n = 50$, $s = 14$.

9. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

10. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие появилось 15 раз.

11. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти довери-

тельный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,99, если в 100 испытаниях событие появилось 60 раз.

12. Произведено 300 испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p появления события A постоянна. Событие A появилось в 250 испытаниях. найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

13. При испытаниях 1000 элементов зарегистрировано 100 отказов. Найти доверительные интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью: а) 0,95; б) 0,99.

Разные задачи по математической статистике.

1. С целью исследования суммы вклада в банке, имеющем 2200 вкладчиков, проведено выборочное обследование 100 вкладов. Результаты обследования даны в таблице:

Сумма вклада, тыс. р.	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
Число вкладчиков	4	5	18	27	30	10	6

Считая, что сумма вклада имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, найти:

а) надежность, которая гарантирует средний вклад во всем банке от 53,1 до 62,5 тыс. р.;

б) вероятность, того что из пяти наудачу отобранных вкладов не менее четырех будут от 60 до 75 тыс.р.

2. Из 500 коммерческих фирм налоговой инспекцией было проверено 100, сокрытие налогов среди которых приведено в таблице:

Сумма сокрытых налогов, тыс. р.	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50
Количество фирм	7	24	38	19	12

Считая, что сумма сокрытых налогов имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, найти:

а) надежность, которая гарантирует среднюю сумму сокрытых налогов по всем фирмам от 44,52 до 45,68 тыс. р.;

б) вероятность, того что из трех наудачу отобранных фирм по крайней мере в одной сокрытые налоги меньше 45 тыс. р.

3. В области около 1000 предприятий. По схеме случайного отбора были отобраны 100 предприятий одной отрасли. Имеются следующие данные о распределении их по затратам (в копейках) на рубль продукции.

Затраты на 1 руб. продукции, коп.	Число предприятий (m_i)
61,5-66,5	7
66,5-71,5	7
71,5-76,5	11
76,5-81,5	27
81,5-86,5	23
86,5-91,5	16
91,5-96,5	9

Полагая, что распределение затрат имеет нормальный закон:

а) с надежностью $\gamma = 0,99$ найти доверительный интервал затрат на 1 руб. продукции;

б) найти процент предприятий, затраты которых на 1 руб. продукции не превосходят 85 коп.

4. Случайная величина X принимает значения 1, 2, 3 с соответствующими вероятностями $p_1 = \frac{1}{3} + \frac{\theta}{4}$, $p_2 = \frac{1}{3} + \frac{\theta}{2}$, $p_3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\theta$, где $-\frac{2}{3} < \theta < \frac{4}{9}$ - неизвестный параметр. Проведена случайная повторная выборка объемом n: $X_1, X_2, ..., X_n$ из генеральной совокупности с таким распределением. В качестве оценки параметра θ выбрана случайная величина $\widehat{\theta} = 2 - \overline{X}_b$. Найти математическое ожидание $M\widehat{\theta}$ и дисперсию $D\widehat{\theta}$.

5. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(-1, \theta)$, где $\theta > -1$ - неизвестный параметр. Произведена случайная повторная выборка объема n: $X_1, X_2, ..., X_n$ из генеральной совокупности с таким распределением. В качестве оценки параметра θ выбрана случайная величина $\widehat{\theta} = \frac{n}{n-1}(2\overline{X}_b + 1)$. Найти математическое ожидание $M\widehat{\theta}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	4997	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0904	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0009	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4456
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0,3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.31106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.54	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499928
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

Приложение 3

Распределение Пуассона $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	4	5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622
7							0,00001	0,00002	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444
8										0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9											0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10											0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11											0,00001	0,00022	0,00192	0,00824
12												0,00005	0,00064	0,00343
13												0,00002	0,00020	0,00132
14													0,00006	0,00047
15														0,00016
16														0,00005
17														0,00001

Приложение 4

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0.95	0.99	0.999	n \ γ	0.95	0.99	0.999
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.57	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.720	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.697	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.991	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.627	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

Приложение 5

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0.95	0.99	0.999	$n \backslash \gamma$	0.95	0.99	0.999
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.02	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.08	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.06	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	1.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	1.33	70	0.174	0.245	0.34
14	0.48	0.78	1.23	80	0.161	0.226	0.31
15	0.46	0.73	1.15	90	0.151	0.211	0.29
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.27
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

Приложение 6

Критические точки распределения χ^2.

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Смирнов А.К. Вероятностные методы анализа. Теория вероятностей: Учебное пособие. Саратов: ООО Издательский Центр "Наука 2013. - 94 с.

2 Задачи вузовских олимпиад по теории вероятностей [Текст]: учеб. пособие/ Л.А. Игнаткина, Н.П. Перстенева, Т.Ю. Субеева, С.Ю.Ю Ширнаева. - Самара: Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2009. - 64 с.

3 Репин О.А. Сборник олимпиадных заданий по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие/ О.А. Репин, Е.И. Суханова, Л.К. Ширяева. -Самара: изд-во Самар.гос.экон.ун-та, 2007.-100с.

4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей, математической статистике: учеб. Пособие-М.Издательство ЮРАЙТ; 2010.-404с.

5 Александров Е.Л. Сборник задач по математической статистике: учеб. пособие для студентов механико-математического и физического факультетов. Изд-во Саратовского университета. 1992. - 112 с.

6 Израйлевич В.Л., Смирнов А.К., Черкасов И.Д., Чернявский И.Я. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Часть 1. Исчесление вероятностей и случайные величины. Изд-во Сарат ун-та, 1982. 82 с.

7 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория верочтностей. Издательство "Наука 1969. -368 с.

Сергеева Надежда Викторовна
Смирнов Анатолий Константинович
Мыльцина Ольга Анатольевна

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие для студентов очного отделения
факультета нелинейных процессов