

Министерство образования и науки Российской Федерации
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

А.Е.Артемьев

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

Учебное пособие

Саратов – 2012

УДК 550.83 (075.8)

ББК 26.21я73

A86

Артемьев А.Е.

A86 Физические основы сейсморазведки: Учебное пособие - Саратов: ООО

Издательский Центр "Наука", 2012. -56 с.

ISBN 978-5-9999-1361-6

В учебном пособии в сжатом виде излагаются основные понятия динамической теории упругости, рассматриваются волновые процессы в упругих телах, геометрическая сейсмика, необходимые сведения о явлениях отражения, преломления и дифракции сейсмических волн. Особое внимание уделяется современной классификации моделей сейсмических сред, и, в частности, модели анизотропной среды.

Пособие составлено в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшей школы по специальности 020302 «Геофизика» и предназначено для изучения первого раздела дисциплины «Сейсморазведка».

Рецензенты:

Доктор геолого-минералогических наук, профессор С.И. Михеев

Доктор физико-математических наук, профессор В.П. Губатенко

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	6
1.1. Упругие деформации	6
1.2. Упругие напряжения	9
1.3. Связь между напряжениями и деформациями	11
1.4. Обобщенный закон Гука	12
1.5. Коэффициенты упругости	13
1.6. Уравнения движения упругой среды	14
1.7. Основные уравнения теории упругости	16
1.8. Приведение уравнений теории упругости к уравнению Ламэ	16
ГЛАВА 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ	17
2.1. Волновое уравнение	17
2.2. Запись волновых уравнений через потенциалы Гельмгольца	19
2.3. Решение волнового уравнения. Понятие волны	20
2.4. Гармоническая волна	21
2.5. Параметры гармонической волны	22
2.6. Понятие об интеграле Фурье	23
2.7. Разложение сферической волны по плоским волнам	25
2.8. Фазовая и групповая скорости волны. Дисперсия скорости	26
2.9. Геометрическое расхождение и поглощение волны	26
2.10. Аналитическое представление сейсмических колебаний	27
ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СЕЙСМИКА	28
3.1. Приближение геометрической сейсмологии. Уравнение поля времен	28
3.2. Геометрический смысл уравнения поля времен	30
3.3. Понятие о прямой кинематической задаче сейсморазведки	31
3.4. Уравнение переноса	31
3.5. Основные принципы геометрической сейсмологии	32
3.6. Разрешающая способность сейсморазведки по горизонтали	33
3.7. Принцип Ферма	33
3.8. Дифференциальные уравнения лучей	35
3.9. Лучевой метод решения прямой динамической задачи сейсморазведки	36

3.10. Методы решения прямых динамических задач сейсморазведки	37
ГЛАВА 4. ОТРАЖЕНИЕ, ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ	38
4.1 Законы отражения и преломления	38
4.2 Монотипные и обменные волны	40
4.3 Уравнения Нотта-Цеппритца	40
4.4 Коэффициенты отражения и преломления при нормальном падении	43
4.5 Понятие о преломленных (головных) волнах	44
4.6 Рефрагированные волны	45
4.7 Дифрагированные волны. Закон Брега-Вульфа	46
4.8 Поверхностные волны	47
ГЛАВА 5. МОДЕЛИ СЕЙСМИЧЕСКИХ СРЕД	48
5.1 Понятие модели. Современная классификация моделей	48
5.2 Модель горизонтально-слоистой среды. Среднескоростная аппроксимация разреза	50
5.3 Модель слоисто-непрерывной среды	50
5.4 Модель анизотропной среды	51
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	53
ЛИТЕРАТУРА	54

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ПРЕДИСЛОВИЕ

Необходимость написания краткого учебного пособия по физическим основам сейсморазведки обусловлена тем, что имеющиеся книги либо сложны математически и непригодны для первоначального изучения предмета, либо устарели и стали библиографической редкостью. К первой группе можно отнести многотомный труд А.А. Кауфмана и А.Л. Левшина «Введение в теорию геофизических методов» и фундаментальную монографию К. Аки и П. Ричардса «Количественная сейсмология». Учебники Е.Ф. Саваренского «Сейсмические волны» и Л.А. Рябинкина «Теория упругих волн» характеризуются доступным для студентов уровнем изложения основ предмета, но уже не отвечают современным требованиям к уровню подготовки геофизиков. Основные современные учебники В.И. Бондарева, Г.Н. Боганика и И.И. Гурвича в ряде случаев не содержат подробных выводов математических уравнений, выражающих важнейшие физические законы распространения упругих волн. Думается, что отсутствие подробных выводов в этих прекрасных книгах обусловлено тем, что курсу «Сейсморазведка» должен предшествовать курс «Теория упругих волн», для изучения которого необходима дополнительная литература. Очень хорошее краткое и вместе с тем математически строгое изложение основ теории упругости и теории сейсмических волн можно найти во второй главе книги Т.Б. Яновской «Основы сейсмологии». Особо следует отметить монографию Е.А. Козлова «Модели среды в разведочной сейсмологии». В этой работе очень подробно рассматриваются почти все вопросы, выбранные для составления учебного пособия. Приведенный в конце пособия список литературы ни в коей мере не претендует на полноту, но является достаточным для изучения физических основ сейсморазведки.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретической основой сейсмического метода разведки является раздел физики, называемый механика сплошных сред (МСС). МСС включает в себя следующие основные разделы: механика твердого тела, гидромеханика и газодинамика. Каждая из этих дисциплин делится на более узкие разделы. Так, механика твердого тела делится на теорию упругости, теорию пластичности, теорию трещин и некоторые другие. Мы ограничимся изучением основных понятий теории упругости. Ключевыми понятиями в теории упругости являются понятия напряжений и деформаций.

Деформация – любое смещение частиц среды, вызывающее изменение объема среды или ее формы. Деформация называется упругой, если среда полностью восстанавливает свою структуру (форму и объем) после прекращения действия внешней силы. Деформация называется неупругой, если в результате приложенной силы произошли необратимые изменения первоначальной структуры среды. Реальные геологические среды можно рассматривать в качестве упругих сред только тогда, когда происходящие в них смещения (следовательно, и деформации) очень малы. При малых деформациях выполняется основное условие классической теории упругости – линейная зависимость между силами, действующими на тело, и производимыми ими деформациями. Передача малых деформаций и вызвавших их напряжений происходит в виде упругих (сейсмических) волн.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1.1 Упругие деформации

Рассмотрим идеально упругую непрерывную изотропную среду. Положение произвольной материальной точки среды P определим в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) при помощи радиуса-вектора $\vec{r} = xi + yj + zk$ ($|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Пусть в результате деформации точка $P(x, y, z) = P(\vec{r})$ переместится в близкое положение $P'(\vec{r} + \Delta\vec{r})$. Вектор смещения для P и P' равен \vec{U} и $\vec{U} + \Delta\vec{U}$ соответственно. В теории упругости принято обозначать компоненты вектора смещения \vec{U} по осям x, y, z через u, v, w . Поскольку компоненты вектора $\vec{U}(u, v, w)$ разные в различных точках среды, то они сами являются функциями координат x, y, z , то есть $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Следовательно, компоненты вектора смещений в точке P' можно записать в скалярной форме:

$$\begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z, \\ v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z, \\ w + dw &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z. \end{aligned} \quad (1)$$

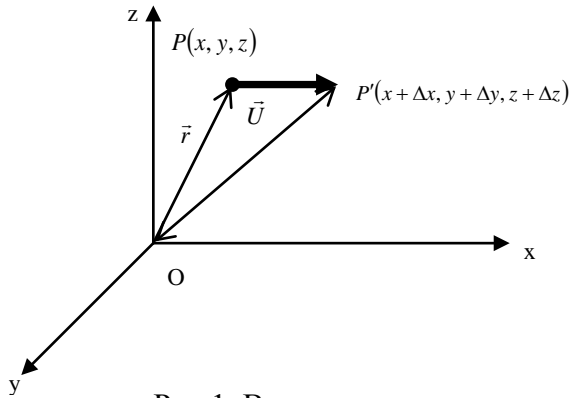


Рис.1. Вектор смещения

Физический смысл частных производных, входящих в формулы (1), – это скорость изменения составляющих деформаций вдоль осей x, y, z .

По геометрическому смыслу эти частные производные определяют относительное удлинение (или укорочение) вдоль соответствующих осей. Введем обозначения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2)$$

Величины $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ называются компонентами деформации, характеризующими линейную деформацию. Для характеристики объемной деформации вводится понятие дилатации, которая является количественной мерой деформации объема:

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \operatorname{div} \vec{U} = \nabla \cdot \vec{U},$$

$$\Theta = \operatorname{div} \vec{U}.$$

Смешанные частные производные выражают изменение формы.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (2')$$

Формулы (2) носят название формул Коши, а девять компонент деформации составляют тензор бесконечно малых деформаций Коши

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Деформацию, определенную уравнениями (1), можно произвольным образом разложить на сумму произвольного числа деформаций. Для доказательства этого возьмем

сумму трех последних членов первого уравнения (1) $\Sigma = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$.

Преобразуем эту сумму, прибавляя и вычитая $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z$. Получим

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Delta z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Delta z. \end{aligned}$$

Вводя принятые выше обозначения для производных смещений (2), а также

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \text{ можем записать:}$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$du = \varepsilon_{xx} \Delta x + \varepsilon_{xy} \Delta y + \varepsilon_{xz} \Delta z + (\omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y),$$

Аналогично можно преобразовать два другие уравнения.

$$dv = \varepsilon_{yy} \Delta y + \varepsilon_{yx} \Delta x + \varepsilon_{yz} \Delta z + (\omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z), \quad (3)$$

$$dw = \varepsilon_{zz} \Delta z + \varepsilon_{zx} \Delta x + \varepsilon_{zy} \Delta y + (\omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x).$$

В уравнениях (3) первые три члена выражают деформацию некоторого объема – растяжение и сжатие (чистая деформация), а члены в круглых скобках – вращение этого объема в пространстве (чистое вращение).

Проходящие через точку P ортогональные оси можно выбрать так, чтобы компоненты деформаций сдвига отсутствовали. Эти оси называются главными осями тензора деформации. Тогда чистую деформацию в окрестностях точки P можно свести только к главным растяжениям по осям x, y, z – $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$. Вторая составляющая деформаций – повороты – определяется ротором вектора смещений $rot \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Переместим начало координат в точку P . Тогда $\Delta x = x, \Delta y = y, \Delta z = z, du = u, dv = v, dw = w$.

Теперь уравнения (3) можно переписать в следующем виде:

$$u = \varepsilon_{xx} x + \varepsilon_{xy} y + \varepsilon_{xz} z + (\omega_y z - \omega_z y),$$

$$v = \varepsilon_{yy} y + \varepsilon_{yx} x + \varepsilon_{yz} z + (\omega_z x - \omega_x z),$$

$$w = \varepsilon_{zz} z + \varepsilon_{zx} x + \varepsilon_{zy} y + (\omega_x y - \omega_y x).$$

Последние три скалярных уравнения, определяющие поле смещений в окрестностях точки P , могут быть заменены одним векторным:

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = grad \varphi + rot \vec{\psi}, \text{ где}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} x^2 + \varepsilon_{yy} y^2 + \varepsilon_{zz} z^2 + 2\varepsilon_{xy} xy + 2\varepsilon_{xz} xz + 2\varepsilon_{yz} yz),$$

$$\text{rot } \vec{\psi} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Скалярная функция φ определена так, что ее частные производные – суть компоненты вектора смещений \vec{U}_1 :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ и называется скалярным потенциалом поля смещений. При}$$

$$\text{этих обозначениях дилатация } \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Векторная функция $\vec{\psi}$ называется векторным потенциалом поля смещений.

Компоненты u, v, w вектора смещения \vec{U} через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\vec{\psi}$ будут определены так:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right),$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right),$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right).$$

Итак, в общем случае, поле смещений в окрестности точки P состоит из двух частей: объемной $\vec{U}_1 = \text{grad } \varphi$ и вихревой $\vec{U}_2 = \text{rot } \vec{\psi}$.

1.2 Упругие напряжения

Рассмотрим элементарный объем упругой среды, в котором под действием внешних сил возникли деформации. За элементарный объем примем объем тетраэдра, построенного так, что площадку в форме треугольника ΔS , внутри которого находится точка P , замкнута тремя взаимно перпендикулярными координатными плоскостями xOy , xOz и yOz . Площадка ΔS выбрана настолько малой, что действующие на ее поверхность силы можно считать постоянными. Равнодействующую этих сил обозначим $\Delta \vec{F}$. Когда ΔS стремится к нулю, то предел отношения равнодействующей $\Delta \vec{F}$ к площади элементарной площадки ΔS стремится к определенной величине, называемой напряжением $\vec{\sigma}$. Таким образом, напряжение на элементарной площадке ΔS равно:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}.$$

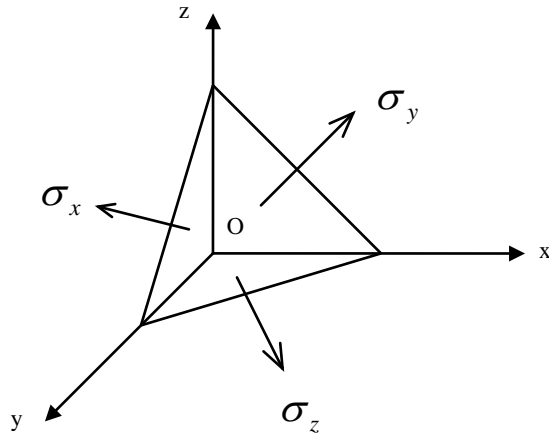


Рис. 2. Напряжения, приложенные к граням бесконечно малого тетраэдра

Аналогично определим напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на гранях тетраэдра, ограниченных плоскостями xOy , xOz и yOz соответственно. Каждое из этих напряжений можно разложить на три компоненты по соответствующим координатным осям. Девять скалярных величин (компонент напряжений) полностью определяют напряжение в окрестностях точки P и составляют тензор напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В матрице (4) первая буква в индексе определяет грань, перпендикулярную соответствующей оси, а вторая – компоненту напряжения. Компоненты тензора напряжений, расположенные на главной диагонали, направлены нормально к соответствующим граням и называются нормальными напряжениями. Остальные шесть его компонент называются касательными напряжениями. В курсах теории упругости доказывается закон парности касательных напряжений, согласно которому $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$.

Как и в случае деформаций, координатные оси можно повернуть так, что на перпендикулярных к ним площадках исчезнут касательные напряжения и останутся только одни нормальные. Эти оси называются главными осями тензора напряжений.

1.3 Связь между напряжениями и деформациями

Рассмотрим график зависимости напряжений от деформаций.

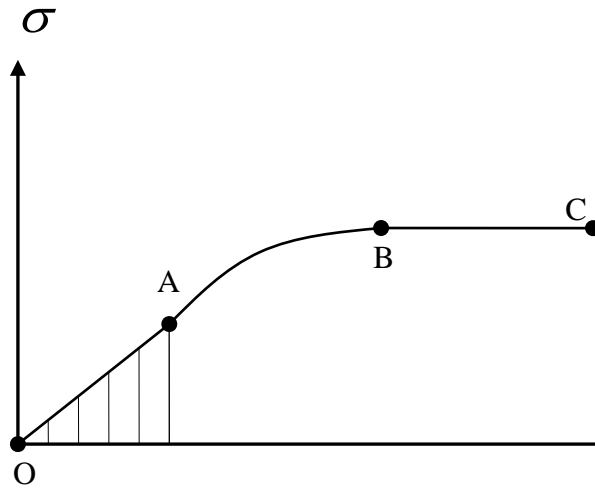


Рис.3. Диаграмма растяжения

OA – зона линейной связи между напряжениями и деформациями.

A – предел пропорциональности (предел линейности).

AB – зона нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями, то есть после прекращения действия внешней силы среда восстанавливает свою структуру, но происходит это по нелинейному закону.

BC – зона пластических деформаций.

C – предел прочности. Образец разрушается.

Для зоны линейной связи между напряжениями и деформациями OA справедлив закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга. Численное значение E зависит от рода материала деформируемого тела. В случае сейсморазведки – от литологического состава горных пород. Из школьной физики известен другой вид закона Гука: $F = k\Delta x$. Легко привести один к другому:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \Delta x = |x - x_0|.$$

Подставляем, получаем $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta x}{x_0}$ или $F = \frac{SE}{x_0} \Delta x$. Вводя обозначение $k = \frac{SE}{x_0}$,

получаем $F = k \Delta x$.

1.4 Обобщенный закон Гука

Как мы знаем, напряженно-деформированное состояние упругой анизотропной среды описывается тензором напряжений σ и тензором деформаций ε . Согласно закону Гука, каждая компонента тензора напряжений является линейной функцией всех компонент тензора деформаций.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5) \quad \text{здесь } \sigma_{ij} - \text{тензор напряжений,}$$

ε_{kl} - тензор деформаций,

C_{ijkl} - тензор упругости, характеризующий упругие

свойства среды. Поскольку тензоры напряжений и деформаций – это тензоры II ранга, то согласно правилам тензорного анализа C будет тензором IV ранга. Как известно, тензор IV ранга состоит из $3^4 = 81$ компоненты. Это означает, что компоненты напряжений и деформаций связаны между собой девятью линейными уравнениями:

$$(6) \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Это эквивалентная форма записи закона Гука (5). В силу симметрии тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, только шесть из уравнений (6) независимы. Аналогично, в силу симметрии тензора деформаций $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, только шесть из слагаемых правой части независимы. Поэтому, без потери общности можно заменить тензор C_{ijkl} на тензор C_{nm} , который содержит $6 \times 6 = 36$ упругих постоянных. Таким образом, с учетом последних замечаний, обобщенный закон Гука в матричном представлении будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Распишем систему уравнений (7) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\varepsilon_{xy} + C_{15}\varepsilon_{xz} + C_{16}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\varepsilon_{xy} + C_{25}\varepsilon_{xz} + C_{26}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{zz} &= C_{31}\varepsilon_{xx} + C_{32}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{34}\varepsilon_{xy} + C_{35}\varepsilon_{xz} + C_{36}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{xy} &= C_{41}\varepsilon_{xx} + C_{42}\varepsilon_{yy} + C_{43}\varepsilon_{zz} + C_{44}\varepsilon_{xy} + C_{45}\varepsilon_{xz} + C_{46}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{xz} &= C_{51}\varepsilon_{xx} + C_{52}\varepsilon_{yy} + C_{53}\varepsilon_{zz} + C_{54}\varepsilon_{xy} + C_{55}\varepsilon_{xz} + C_{56}\varepsilon_{yz}, \\
\sigma_{yz} &= C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{63}\varepsilon_{zz} + C_{64}\varepsilon_{xy} + C_{65}\varepsilon_{xz} + C_{66}\varepsilon_{yz}.
\end{aligned} \tag{8}$$

В матрице C_{nm} в выражении (7) соблюдается соотношение $C_{nm} = C_{mn}$, то есть условие симметрии. Поэтому в уравнениях (7) только 21 независимая переменная (главная диагональ матрицы C и все элементы выше или ниже ее). В изотропной среде 24 из 36 элементов матрицы C_{nm} обращаются в нуль, а часть оставшихся выражается через соседние элементы. Введем в рассмотрение константы Ламэ следующим образом:

$\lambda = C_{33} - 2C_{44}$ и $\mu = C_{44}$. Тогда закон Гука для изотропной среды примет вид:

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, & \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}, & \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}, \\ \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}, & \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}. \end{cases}$$

С учетом определения дилатации $\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, окончательно запишем:

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, & \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{yy}, & \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}, \\ \sigma_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, & \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}. \end{cases}$$

Запишем теперь уравнения (9) в тензорном виде. Для этого введем в рассмотрение символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$ (11) тогда

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ii}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \tag{12}$$

Получили систему уравнений (9) в тензорном виде. Здесь $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \Theta$. С учетом последнего выражения окончательно запишем:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \tag{13}$$

Получили систему уравнений (10), выражающую закон Гука для изотропной среды.

1.5 Коэффициенты упругости

Упругие свойства однородной изотропной среды полностью характеризуются парой коэффициентов упругости Ламэ или парой коэффициентов E и γ - модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Модуль Юнга – коэффициент, который характеризует сопротивление горной породы растяжению или сжатию, например, $E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$, где σ_{xx} - нормальное напряжение, возникающее при растяжении (сжатии), ε_{xx} - относительное растяжение (сжатие) по оси x , вызванное этим напряжением.

Коэффициент Пуассона – равен отношению относительного сжатия к относительному растяжению, например $\gamma = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$, где ε_{xx} - относительное растяжение по оси x , а ε_{yy} - относительное сжатие по оси y . Запишем уравнения связи:

$$\lambda = \frac{\gamma E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\gamma)},$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Модуль Юнга для осадочных горных пород составляет $(0.3-9)10^{10} \text{ н/м}^2$, для кристаллических пород $(3-16)10^{10} \text{ н/м}^2$. Коэффициент Пуассона для осадочных пород равен 0.18-0.5, для кристаллических 0.19-0.38. Величина безразмерная.

1.6 Уравнения движения упругой среды

Рассмотрим условие равновесия среды в элементарном объеме dV с элементарной массой $dm = \rho dV$, где ρ - плотность среды. Пусть на поверхность этого объема dS действуют силы, связанные с напряжением выражением $dF = \sigma dS$. Эти силы назовем поверхностными силами. Кроме того, необходимо учесть силы, действующие внутри объема. Назовем их объемными силами. Согласно I закону Ньютона, элементарный объем среды находится в состоянии равновесия (покоя), если сумма всех действующих на него поверхностных и объемных сил равна нулю. Для компонент сил, действующих вдоль осей x, y, z , это условие будет $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$ или в развернутой форме:

$$\left. \begin{aligned} \rho X dV + \sigma_{xx} dS + \sigma_{yx} dS + \sigma_{zx} dS &= 0, \\ \rho Y dV + \sigma_{xy} dS + \sigma_{yy} dS + \sigma_{zy} dS &= 0, \\ \rho Z dV + \sigma_{xz} dS + \sigma_{yz} dS + \sigma_{zz} dS &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где X, Y, Z – компоненты объемной силы, отнесенной к единице массы, σ – компоненты напряжений. Если рассматривать конечный объем V и конечную его поверхность S , то первое из трех уравнений (14) следует записать так:

$$\iiint_V \rho X dV + \iint_S [\sigma_{xx} + \sigma_{yx} + \sigma_{zx}] dS = 0. \quad (15)$$

Поверхностный интеграл можно преобразовать в объемный по формуле Гаусса-Остроградского. В этом случае уравнение (15) примет вид

$$\iiint_V \left[\rho X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right] dV = 0. \quad (16)$$

Аналогично можно преобразовать и два остальных уравнения (14). Объемные интегралы в уравнениях (16) обращаются в нули независимо от формы V . Следовательно, подынтегральные выражения в них равны нулю. Тогда условия равновесия примут вид

$$\left. \begin{aligned} \rho X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \rho Y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= 0, \\ \rho Z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если рассматривать случай движения частиц среды (упругие волны), то в уравнениях (17) нужно добавить силу инерции, которая, согласно II закону Ньютона для единичной массы (объема), равна $\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$. Следовательно, уравнения движения среды следует записать так:

$$\left. \begin{aligned} \rho X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \rho Y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \rho Z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из курса физики известен II закон Ньютона, или более точно, основное уравнение динамики материальной точки: $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2}$. Для упругой среды имеем систему (18).

Запишем систему (18) в тензорном виде

$$\rho \vec{F} + \text{div } \sigma = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}.$$

На больших удалениях от источника упругих колебаний объемные силы \vec{F} практически не действуют, тогда

$$\text{div } \sigma = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Или, в других обозначениях

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (20)$$

1.7 Основные уравнения теории упругости

К основным уравнениям теории упругости обычно относят:

1. уравнения движения упругой среды (20);
2. закон Гука (5) и (13);
3. формулы Коши (2) и (2').

Выпишем эти формулы в тензорном виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (21)$$

Пояснения к последнему выражению:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

1.8 Приведение уравнений теории упругости к уравнению Ламэ

Для решения задач о распространении сейсмических волн необходимо получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет вектор смещения \vec{U} . Для этого мы будем использовать закон Гука и формулы Коши. Это можно сделать в скалярном виде, но, учитывая наши знания основ тензорной алгебры, сделаем это в тензорном виде.

Для этого подставим формулы Коши (21) в закон Гука (13).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (20); \quad \sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (13) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + \frac{2\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Подставим полученное выражение в левую часть (20)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \underbrace{\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}}_1 + \mu \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_2 + \mu \underbrace{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}}_3.$$

Теперь распишем правую часть полученного выражения в скалярном и векторном виде:

$$1) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \text{grad } \Theta = \text{grad } \text{div } \vec{U};$$

$$2) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 \vec{U};$$

$$3) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \vec{U} = \text{grad } \text{div } \vec{U}. \text{ Итак,}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \text{grad } \text{div } \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} + \mu \text{grad } \text{div } \vec{U} = \mu \nabla^2 \vec{U} + (\lambda + \mu) \text{grad } \text{div } \vec{U},$$

Подставляя эти выражения в (20), окончательно получим:

$$\mu \nabla^2 \vec{U} + (\lambda + \mu) \text{grad } \text{div } \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Получили обобщенное векторное волновое уравнение для однородной изотропной среды, иначе называемое уравнением Ламэ. Кроме (22) используется еще одна форма записи уравнения Ламэ. Вспомним известную формулу векторного анализа

$$\text{rot } \text{rot } \vec{U} = \text{grad } \text{div } \vec{U} - \nabla^2 \vec{U}, \text{ тогда } \nabla^2 \vec{U} = \text{grad } \text{div } \vec{U} - \text{rot } \text{rot } \vec{U}.$$

Подставим полученное выражение для лапласиана в (22)

$$\mu \text{grad } \text{div } \vec{U} - \mu \text{rot } \text{rot } \vec{U} + (\lambda + \mu) \text{grad } \text{div } \vec{U} = (\lambda + 2\mu) \text{grad } \text{div } \vec{U} - \mu \text{rot } \text{rot } \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2},$$

$$\text{то есть } (\lambda + 2\mu) \text{grad } \text{div } \vec{U} - \mu \text{rot } \text{rot } \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (22')$$

ГЛАВА 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

2.1 Волновое уравнение

Для однородной изотропной среды, в которой отсутствуют источники сейсмических колебаний, справедливо обобщенное векторное волновое уравнение (уравнение Ламэ) (22). Покажем, что это уравнение эквивалентно двум обыкновенным волновым уравнениям. Чтобы получить первое уравнение, применим операцию дивергенции к обеим частям уравнения (22):

$$\mu \nabla^2 (\text{div } \vec{U}) + (\lambda + \mu) \text{div } \text{grad } \text{div } \vec{U} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{div } \vec{U}),$$

$$\mu \nabla^2 (\operatorname{div} \vec{U}) + (\lambda + \mu) \nabla^2 (\operatorname{div} \vec{U}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \vec{U}),$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\operatorname{div} \vec{U}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \vec{U}),$$

$$\nabla^2 (\operatorname{div} \vec{U}) = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \vec{U}). \quad (23)$$

Получили первое искомое уравнение. Чтобы получить второе уравнение, применим операцию вихря к уравнению (22):

$$\mu \nabla^2 (\operatorname{rot} \vec{U}) + (\lambda + \mu) \operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \vec{U}),$$

$$\mu \nabla^2 (\operatorname{rot} \vec{U}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \vec{U}),$$

$$\nabla^2 (\operatorname{rot} \vec{U}) = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \vec{U}). \quad (24)$$

Получили второе искомое уравнение.

Уравнения (23) и (24) представляют собой классические волновые уравнения вида

$$\nabla^2 f = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (25)$$

Где V^2 представляет собой квадрат фазовой скорости волны. Введем обозначения

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \text{ и } V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \text{ С учетом этих обозначений уравнения (23) и (24) примут}$$

вид:

$$\nabla^2 (\operatorname{div} \vec{U}) = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \vec{U}), \quad (26)$$

$$\nabla^2 (\operatorname{rot} \vec{U}) = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \vec{U}).$$

В результате мы заменили одно уравнение (22), двумя более простыми уравнениями (26). Сравнив уравнения (26) с уравнением (25) мы увидим, что в однородной изотропной среде могут существовать упругие волны двух видов, распространяющиеся с фазовыми скоростями V_p и V_s . V_p волны называются продольными, V_s - поперечными. Волна называется продольной, если направления колебания частиц совпадают с направлением распространения волны. Волна называется поперечной, если направления колебаний частиц перпендикулярны направлению распространения волны. Названия P – primary, S – secondary, в переводе с английского означают первичные и вторичные. Эти названия обусловлены тем, что

скорость распространения продольных волн выше, чем поперечных. Существует гипотеза Пуассона, согласно которой:

$$\left. \frac{V_p}{V_s} \right|_{\lambda=\mu} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} = \frac{\sqrt{\frac{3\lambda}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}} = \sqrt{3}.$$

Отношение $\gamma = \frac{V_p}{V_s}$ тесно связано с коэффициентом Пуассона. Является важной петрофизической характеристикой горных пород. Зависимости $V_s = V_s(V_p)$ имеют различный вид для разных типов пород. Например, для аргиллито-глинистых пород эта зависимость линейна: $V_s = aV_p + b$, где a и b – коэффициенты.

2.2 Запись волнового уравнения через потенциалы Гельмгольца

Рассмотрим уравнения (26). Решением первого уравнения является дивергенция вектора смещений, то есть дилатация. Поскольку дилатация характеризует изменение объема, то продольные волны называют еще волнами сжатия. Решением второго уравнения является ротор вектора \vec{U} , который характеризует изменение формы. Поэтому поперечные волны часто называют волнами сдвига. Относительно вектора смещений \vec{U} уравнения (26) являются уравнениями III порядка. Чтобы получить уравнения II порядка – классические волновые уравнения, воспользуемся теоремой Гельмгольца о разложении полей, согласно которой, любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих

$$\vec{U} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}. \quad (27)$$

Формула (27) была получена нами при изучении упругих деформаций. Подставим (27) в первое уравнение (26), тогда волновая функция в первом уравнении примет вид:

$$\text{div } \vec{U} = \text{div grad } \varphi + \text{div rot } \vec{\psi} = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi, \\ \nabla^2(\nabla^2 \varphi) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2 \varphi) = 0 \text{ или } \nabla^2 \left[\nabla^2 \varphi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (28)$$

Получили уравнение IV порядка. С точностью до линейного члена, отображающего перемещение упругой среды в целом, без деформаций, выражение под знаком лапласиана в (28) можно принять равным нулю. Повторяя аналогичные рассуждения для второго уравнения (26), окончательно запишем:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi - \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \vec{\psi} - \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\quad (29)$$

Здесь заканчивается теория упругости, начинается теория волновых процессов.

2.3 Решение волнового уравнения. Понятие волны

С этого момента мы будем рассматривать скалярное волновое уравнение вида

$$\nabla^2 u - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (30)$$

При этом оставим без внимания вопрос о природе функции $u(\vec{r}, t)$. Уравнение (30) представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Принадлежит гиперболическому типу. Это одно из основных уравнений математической физики. Им описываются волновые процессы различной природы: электромагнитные, звуковые, сейсмические.

По определению волной мы будем называть колебательный процесс, распространяющийся в пространстве и удовлетворяющий уравнению (30).

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Плоская волна удовлетворяет одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (31)$$

Даламбер показал, что общим решением уравнения (31) является любая пара дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$u(x, t) = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt). \quad (32)$$

Функция f_1 в выражении (32) представляет собой волну, распространяющуюся вдоль оси x . Функция f_2 - это волна, распространяющаяся в противоположном к f_1 направлению.

Сферической волной называется волна, распространяющаяся в однородной изотропной среде от точечного источника. Чтобы получить волновое уравнение для сферической волны, необходимо перейти от прямоугольных координат (x, y, z) к сферическим (α, β, r) , где (α, β) - долгота и широта, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние. Если волновая функция $u = u(\alpha, \beta, r, t)$ зависит от всех трех координат, то получается сложное уравнение, не интегрируемое в элементарных функциях. В случае однородной изотропной

среды функция u не зависит от α и β , то есть $u = u(r, t)$. Волновое уравнение для такой функции имеет вид

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} = 0.$$

Легко видеть, что решением этого уравнения является функция

$$u(r, t) = \frac{f_1(x - Vt)}{r} + \frac{f_2(x + Vt)}{r} \quad (33).$$

Здесь первому члену соответствует волна, идущая от источника, а второму - к источнику. Если предположить, что среда безгранична, то второй член уравнения (33) равен 0, тогда

$$u(r, t) = \frac{f_1(x - Vt)}{r}. \quad (34)$$

Получили уравнение сферической волны, которое часто называют фундаментальным решением волнового уравнения, запаздывающим Ньютоновым потенциалом и т.д.

2.4 Гармоническая волна

Решим уравнение (30) методом разделения переменных (методом Фурье). Для этого представим решение уравнения (30) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координат, вторая - только от времени:

$$u(\vec{r}, t) = x(\vec{r}) \cdot y(t). \quad (35)$$

Подставляя в (35) в (30) будем иметь

$$\nabla^2 [x(\vec{r}) \cdot y(t)] - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [x(\vec{r}) \cdot y(t)] = 0,$$

$$y(t) \nabla^2 x(\vec{r}) - \frac{x(\vec{r})}{V^2} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\underbrace{\nabla^2 x(\vec{r}) \frac{V^2}{x(\vec{r})}}_{-\omega^2} - \underbrace{\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \frac{1}{y(t)}}_{-\omega^2} = 0.$$

Мы имеем право так поступить, поскольку $-\omega^2 - (-\omega^2) = -\omega^2 + \omega^2 = 0$. Итак,

$$\nabla^2 x(\vec{r}) \frac{V^2}{x(\vec{r})} = -\omega^2,$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \frac{1}{y(t)} = -\omega^2,$$

$$\nabla^2 x(\vec{r}) \frac{V^2}{x(\vec{r})} = -\omega^2;$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0. \quad (37)$$

Введем обозначение $k = \frac{\omega}{V}$, тогда

$$\nabla^2 x(\vec{r}) + k^2 x(\vec{r}) = 0. \quad (36)$$

В результате разделения переменных вместо одного уравнения (30) получили два уравнения (36) и (37). Уравнение (37) является обыкновенным дифференциальным уравнением II порядка с постоянными коэффициентами. Решить легко.

$$y(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}, \quad (38)$$

где $i = \sqrt{-1}$

Это хорошо известное из физики уравнение гармонических колебаний. Уравнение (36) называется уравнением Гельмгольца. Запишем его решение по аналогии с (38)

$$x(\vec{r}) = C_3 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + C_4 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Подставим полученные выражения в формулу (35), получим:

$$u(\vec{r}, t) = (C_1 + C_3) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})},$$

$$u(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}. \quad (40)$$

Из теории функций комплексного переменного известна формула Эйлера:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t.$$

Применяя формулу Эйлера к (40), и, беря действительную часть выражения, получим:

$$u(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}). \quad (40')$$

Получили уравнение гармонической волны. Не путать с волновым уравнением.

2.5 Параметры гармонической волны

Вспомним некоторые определения.

Колебанием называется процесс, периодически повторяющийся во времени ($x = x(t + nT)$).

Волной называется колебательный процесс, распространяющийся в пространстве ($u = u(\vec{r}, t)$).

Амплитудой называется максимальное значение колеблющейся величины.

Аргумент волновой функции в (41) называется фазой.

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = t - \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{\omega} = t - \frac{2\pi \vec{r}}{\lambda 2\pi f} = t - \frac{\vec{r}}{V}.$$

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе: $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = const$.

Фронт волны – волновая поверхность, которая отделяет часть пространства, охваченную колебаниями, от той части, в которую колебания еще не пришли.

Длина волны λ – расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одной фазе.

Период – время, за которое точка проходит длину волны.

Частота – величина обратная периоду, показывает число колебаний в секунду.

$f = \frac{1}{T}$ Измеряется в герцах. $1 \text{ гц} = \frac{1}{1 \text{ сек}}$, то есть одно колебание в секунду. Связана

с длиной волны соотношением $\lambda f = V \left[\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right] = \left[\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right]$.

Круговая частота $\omega = 2\pi f$ показывает число колебаний за 2π секунд.

Волновой вектор – вектор, показывающий направление распространения волны, всегда ортогонален волновым поверхностям. Численно равен $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

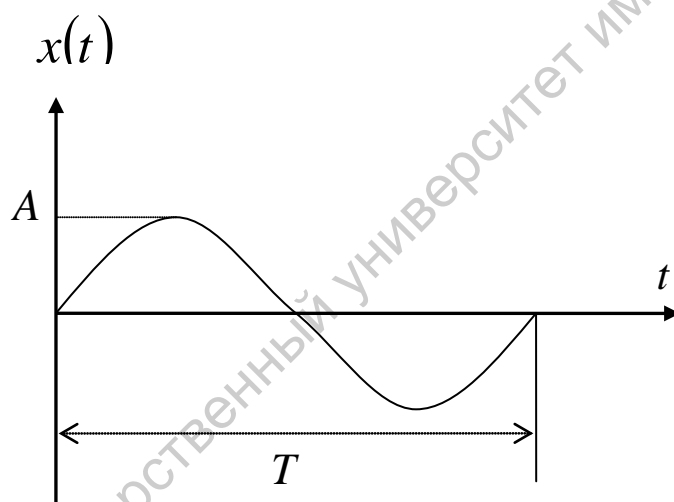


Рис. 4. График гармонического колебания

2.6 Понятие об интеграле Фурье

Гармонические колебания являются простейшим, но очень важным типом колебаний. Реальные сейсмические сигналы не являются гармоническими. В их состав входят колебания, характеризующиеся различными амплитудами и частотами. Для анализа сложных колебаний используется следующая теорема Фурье:

Любая функция, с несущественными для нас ограничениями (условия Дирихле и абсолютная интегрируемость), может быть представлена бесконечной суммой гармонических составляющих, бесконечно близких по частоте.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (41)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Выражения (41) называются обратным и прямым преобразованиями Фурье.

$S(\omega)$ называется комплексным частотным спектром колебания. Как любая комплексная функция $S(\omega)$ состоит из двух действительных функций – действительной и мнимой части, либо модуля и аргумента.

$$S(\omega) = \text{Re}[S(\omega)] + i \cdot \text{Im}[S(\omega)] - \text{алгебраическая форма};$$

$$S(\omega) = A(\omega) e^{i\phi(\omega)} - \text{показательная форма};$$

$$S(\omega) = A(\omega) [\cos \phi(\omega) + i \cdot \sin \phi(\omega)] - \text{тригонометрическая форма}.$$

$A(\omega) = |S(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[S(\omega)] + \text{Im}^2[S(\omega)]}$ - называется модулем комплексного спектра или амплитудно-частотным спектром (характеристикой). Типичная амплитудно-частотная характеристика сейсмического сигнала показана на рис. 5.

$|S(\omega)|^2$ - энергетический спектр.

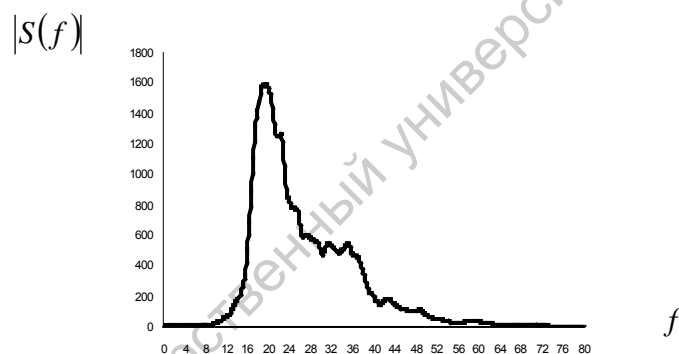


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика

$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[S(\omega)]}{\text{Re}[S(\omega)]}$ - аргумент комплексного спектра или фазово-частотный спектр.

Процесс вычисления спектра с использованием второго уравнения (41) называется спектральным анализом. Процесс формирования сложного сигнала из спектральных (гармонических) составляющих называется спектральным синтезом. Кроме одномерных преобразований Фурье (41), которые используются в спектральном анализе колебаний, при анализе волновых процессов применяются многомерные преобразования. Например, для анализа плоских волн можно использовать двумерное преобразование.

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S(\omega, k) e^{i(\omega t - kx)} d\omega dk, \quad (42)$$

$$S(\omega, k) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(\omega t - kx)} dx dt.$$

Здесь $S(\omega, k)$ - двумерный частотно-волночисловой спектр. Волновое число играет роль пространственного аналога временной частоты ω . Сравним определяющие выражения $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

2.7 Разложение сферической волны по плоским волнам

Вспомним уравнение сферической волны (34) $u(r, t) = \frac{f_1(x - Vt)}{r}$. Уравнение гармонической сферической волны имеет вид

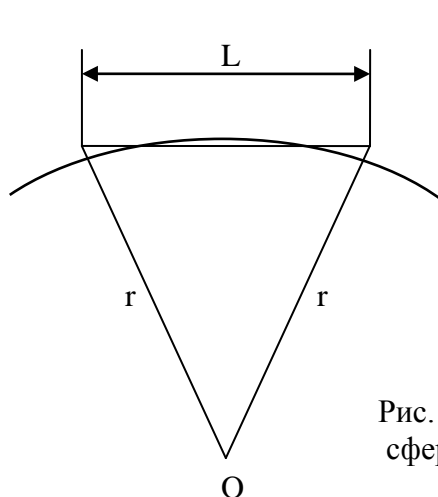
$$u(r, t) = \frac{1}{r} e^{-i(\omega t - k_0 r)}. \quad (43)$$

Гармоническая сферическая волна вида (43) может быть представлена в виде суперпозиции бесконечного числа плоских гармонических волн

$$\frac{e^{-i(\omega t - k_0 r)}}{r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y \pm z \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2})} dx dy. \quad (44)$$

Интеграл (44) называется интегралом Вейля. Также известен интеграл Зоммерфельда, позволяющий представить сферическую волну в виде суперпозиции цилиндрических волн. Цилиндрическая волна возникает в том случае, если в качестве источника возбуждения использовать детонирующий шнур. Более подробное изложение этого вопроса заинтересованный читатель сможет найти в работе [1].

Неравенство Фраунгофера



$$r \gg \frac{L^2 f}{4V}. \quad (45)$$

Где f – частота,
 V – скорость.

Рис. 6. Аппроксимация участка фронта сферической волны плоским фронтом

Неравенство Фраунгофера определяет условие, при котором участок фронта сферической волны можно считать плоским.

2.8 Фазовая и групповая скорости волн. Дисперсия скорости

Запишем основные определения.

Фазовая скорость – скорость перемещения фазы.

Дисперсия скорости – зависимость фазовой скорости от частоты (длины волны).

Различают нормальную дисперсию, когда скорость V_ϕ возрастает с увеличением длины волны, и аномальную, когда скорость V_ϕ уменьшается с увеличением длины волны.

Групповая скорость – скорость перемещения максимума энергии группы волн или скорость перемещения огибающей группы волн.

Связана с фазовой соотношением

$$V_{gp} = V_\phi - \lambda \frac{dV_\phi}{d\lambda}.$$

Если V_ϕ не зависит от λ , то $\frac{dV_\phi}{d\lambda} = 0$ и $V_{gp} = V_\phi$.

2.9 Геометрическое расхождение и поглощение волн

Рассмотрим уравнение сферической волны (34) $u(r, t) = \frac{f_1(x - Vt)}{r}$.

Мы видим, что амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию от источника r . Это явление называется геометрическим или сферическим расхождением.

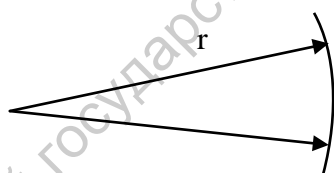


Рис. 7. Геометрическое расхождение

$$a = a_0 \frac{1}{r}, \quad (45)$$

где a_0 - амплитуда в начальный момент времени.

При распространении сейсмической волны в неидеально упругой среде часть ее энергии необратимо переходит в другие виды энергии. Переход части энергии сейсмической волны в другие виды энергии называется поглощением сейсмической волны. Механизм поглощения изучен недостаточно. Существует несколько гипотез, по одной из которых, поглощение объясняется тем, что при распространении волны, часть ее

энергии переходит в тепловую энергию вследствие "вязкого трения" в среде. На основе экспериментальных данных принято, что относительное уменьшение амплитуды волны вследствие поглощения пропорционально пройденному волной пути x

$$\frac{da}{a} = -k dx, \quad (46)$$

где $\frac{da}{a}$ - относительное уменьшение амплитуды волны на малом участке пути dx .

Проинтегрируем уравнение (46) $\int \frac{da}{a} = -k \int dx$, получим

$$a = a_0 e^{-kx}. \quad (47)$$

(47) – это уравнение показательного убывания, встречается во многих приложениях, например, закон радиоактивного распада описывается аналогичной формулой.

a_0 – амплитуда волны на расстоянии $x = 0$ от источника. Коэффициент пропорциональности k называется коэффициентом поглощения волны. Из (47) следует, что k определяет величину, обратную расстоянию, на котором амплитуда волны уменьшается в $e=2.71$ раз. В общем случае, коэффициент поглощения является частотно-зависимой величиной, то есть $k = k(f)$. Чтобы избавиться от частотной зависимости, введем в рассмотрение так называемый декремент поглощения, который представляет собой поглощение, отнесенное к участку пути, равному длине волны.

$$\delta = k\lambda = kVT. \quad (48)$$

Из (48) следует, что δ – безразмерная величина. Действительно $\left[\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{c} \cdot c \right]$.

2.10 Аналитическое представление сейсмических колебаний

Форма сейсмических колебаний зависит от многих факторов: особенностей источника возбуждения колебаний; поглощающих свойств среды; явлений отражения, преломления и дифракции волн на границах раздела упругих свойств; особенностей регистрации колебаний и др.

Для аналитического описания сейсмических колебаний в виде функций времени чаще всего используют формулы Н.Н. Пузырева, Г.П. Берлаге и Риккера.

Рассмотрим первые две функции.

1. Импульс Пузырева $u(t) = A_0 e^{-\beta^2 t^2} \cos \omega_0 t$;

2. Импульс Берлаге $u(t) = A_0 t^\alpha e^{-\beta t} \sin \omega_0 t, \quad u(t) = 0 \forall t < 0$.

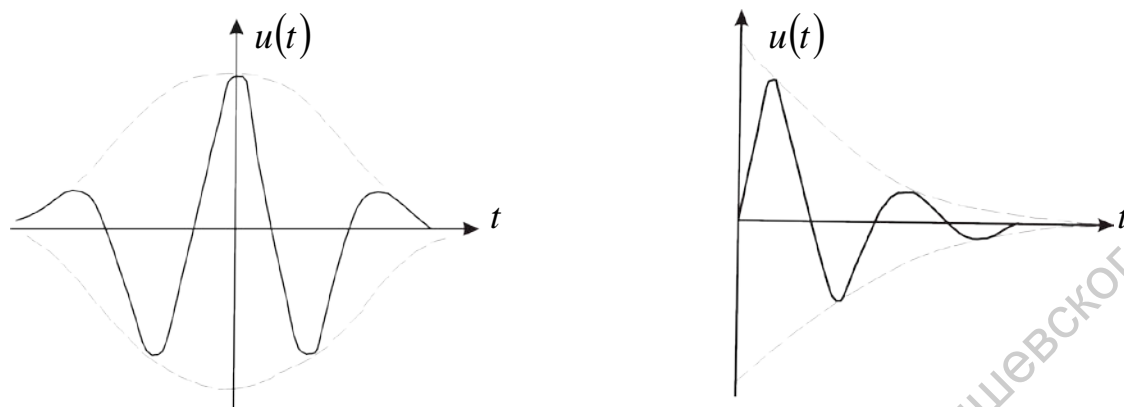


Рис. 8. Сейсмические импульсы Пузырева (слева) и Берлаге (справа)

Кроме этих двух импульсов различными исследователями предложено еще множество функций. Важно, что эти функции могут быть симметричными (как импульс Пузырева) или односторонними (как импульс Берлаге). Если источник упругих волн – взрыв, то сигнал, как правило, аппроксимируется симметричной функцией типа импульса Пузырева. Если источник вибрационный, то используется сигнал типа Берлаге.

ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СЕЙСМИКА

3.1 Приближение геометрической сейсмологии. Уравнение поля времен.

Геометрическая сейсмология является предельным случаем волновой сейсмологии, когда длина волны исчезающе мала. Очевидно, что при этом частота стремится к бесконечности, поэтому геометрическую сейсмологию также называют высокочастотным приближением волновой сейсмологии. Геометрическая сейсмология оперирует понятиями фронтов и лучей, подчиняется законам геометрической оптики.

Луч – это линия, направление которой определяет направление распространения энергии волны. Всегда ортогонален фронту.

Понятие поля времен в сейсморазведку было введено Ю.В. Ризниченко, затем теория поля времен была развита в работах Н.Н. Пузырева. После введения понятия поля времен удалось устранить то противоречие, которое сложилось между сейсморазведкой и другими методами разведочной геофизики. Для обозначения функции поля времен будем использовать букву $\tau = \tau(x, y, z) = \tau(\vec{r})$. С учетом этого обозначения уравнение гармонической волны можно записать так

$$u(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t - kr)} = A e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)} = A e^{-i\omega[t - \tau(\vec{r})]}. \quad (49)$$

Найдем теперь дифференциальное уравнение, которому будет удовлетворять функция поля времен. Рассмотрим следующее волновое уравнение

$$\nabla^2 u - \frac{1}{V^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (50)$$

До сих пор мы рассматривали волновые уравнения для однородных сред типа (30). Уравнение (50) - это волновое уравнение для неоднородной среды $V = V(\vec{r})$. Уравнение с переменными коэффициентами. Применим метод Фурье

$u(\vec{r}, t) = x(t) \cdot y(\vec{r})$, тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0; \quad \nabla^2 y + \left(\frac{\omega}{V}\right)^2 y = 0. \quad (51)$$

Будем искать решение уравнения Гельмгольца (51) в виде

$$y = A(\vec{r}) e^{i\omega\tau(\vec{r})}. \quad (52)$$

Найдем $\nabla^2 y$. Для вычисления производных необходимо использовать правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} e^{i\omega\tau} + A i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} e^{i\omega\tau} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + A i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) e^{i\omega\tau},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + A i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)' e^{i\omega\tau} + i\omega \left(\frac{\partial A}{\partial x} + A i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x} e^{i\omega\tau}, \text{ сократим везде на } e^{i\omega\tau}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\omega \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} A + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \omega^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\omega A \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \\ &+ i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \omega^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\omega A \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + 2i\omega \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \omega^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 A. \quad (*) \end{aligned}$$

Остальные производные находятся аналогично. Приравнявая члены при ω^2 к нулю и подставляя в (51), получим

$$-\omega^2 \left[A \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 + A \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 + A \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\omega^2}{V^2} A = 0.$$

Разделим обе части полученного выражения на $-\omega^2 A$, запишем

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{V^2} = 0. \quad (53)$$

Очевидно, что сумма квадратов частных производных в выражении (53) представляет собой квадрат модуля градиента скалярного поля $\tau(\vec{r})$, то есть

$$|\text{grad } \tau|^2 - \frac{1}{V^2} = 0 \text{ или } |\nabla \tau|^2 - \frac{1}{V^2} = 0. \quad (54)$$

В оптике это уравнение известно под названием уравнения Гамильтона или уравнения эйконала. Эйконал в переводе с греческого – изображение, в русском языке есть слово икона. Уравнение (54) представляет собой дифференциальное уравнение характеристик для волнового уравнения (50). В общем курсе физики термин эйконал не вводится. Есть понятия геометрической длины пути, как расстояния, измеренного вдоль траектории, и оптической длины пути, то есть $\frac{dS}{V}$. Это и есть эйконал. Решения уравнения эйконала $\tau(\vec{r}) = const$ определяют волновые поверхности в приближении геометрической оптики. Называются геометрическими волновыми поверхностями или изохронами. Изохрона – поверхность одинаковых времен.

Как мы знаем, волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе $\phi(\vec{r}, t) = (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = t - \tau(\vec{r}) = const$. Имеет размерность угла, а $\tau(\vec{r}) = const$ имеет размерность времени.

3.2 Геометрический смысл уравнения эйконала

Рассмотрим две изохроны.

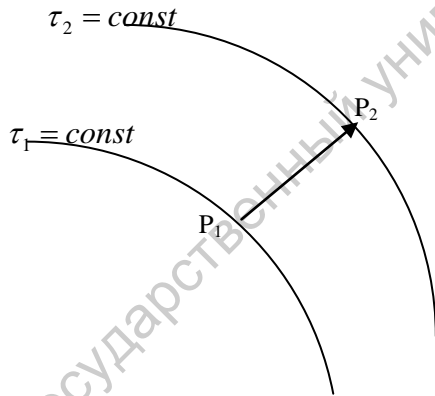


Рис. 9. Геометрический смысл уравнения эйконала

$dS = |d\vec{r}|$, $\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dS}$ - единичный вектор нормали, тогда производная по направлению нормали $\nabla \tau = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{\tau_2(P_2) - \tau_1(P_1)}{P_2 - P_1} = \frac{1}{V(P_1)} \vec{n}$. Возведем выражение в квадрат, получим уравнение эйконала $|\nabla \tau|^2 - \frac{1}{V^2(P_1)} = 0$. Вспомним известное из механики определение

вектора скорости $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, легко видеть, что выражение для обратной величины модуля скорости будет иметь вид $\frac{1}{V} = \left| \frac{dt}{dr} \right|$. Уравнение движения точки в механике: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, здесь – наоборот: t или $\tau = \tau(\vec{r})$.

3.3 Понятие о прямой кинематической задаче сейсморазведки

Уравнение эйконала (54) описывает кинематику волновых процессов. Решить уравнение эйконала, значит решить прямую кинематическую задачу сейсморазведки – то есть определить поле времен по известному полю скоростей. Обычно, в практике сейсморазведки приходится решать обратную кинематическую задачу сейсморазведки – определить значения скоростей по зарегистрированному полю времен. С точки зрения математики уравнение (54) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных I порядка. Для решения прямой кинематической задачи должны быть заданы начальные условия – данные Коши. Таким образом, прямая кинематическая задача сейсморазведки представляет собой задачу Коши для уравнения эйконала.

Если среда является однородной, то есть $V = const$, решением уравнения эйконала является функция $\tau = \frac{r}{V} = \frac{1}{V} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Легко показать, что это уравнение сферы

$$(V\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Если среда неоднородна, то изохроны представляют собой сложные криволинейные поверхности. Для сложных моделей сред уравнение эйконала может быть решено методами полного интеграла, характеристик, либо численными методами типа Рунге-Кутты.

3.4 Уравнение переноса

Найдем теперь уравнение, описывающее динамику волновых процессов. Для этого приравняем к нулю мнимую часть выражения (*), получим

$$A\nabla^2\tau + 2\nabla A \cdot \nabla\tau = 0. \quad (55)$$

Получили уравнение переноса. Подробный вывод этого уравнения содержится, например, в работе [5]. В него входит амплитуда, то есть динамическая характеристика. В результате произведенных преобразований мы перешли от волнового уравнения (50), описывающего кинематику и динамику волн, к двум более простым дифференциальным уравнениям (54) и (55). Как мы знаем, уравнение (54) описывает кинематику волн, а полученное уравнение переноса описывает динамику волн.

3.5 Основные принципы геометрической сейсмологии

Для геометрической сейсмологии справедливы все принципы и законы геометрической оптики.

Принцип Гюйгенса

Каждая точка среды, до которой дошло возмущение, сама становится источником вторичных волн (Гюйгенс, “Трактат о свете”, 1690г). Принцип Гюйгенса – чисто кинематический принцип. Позднее Френель дополнил его идеей интерференции, тем самым, вложив в него волновой смысл.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Волновая поверхность в любой момент времени представляет собой не просто огибающую вторичных волн, а результат их интерференции.

Этот принцип позволяет найти положение фронта волны в любой момент времени, если мы знаем положение фронта в предыдущий момент.

Зоны Френеля

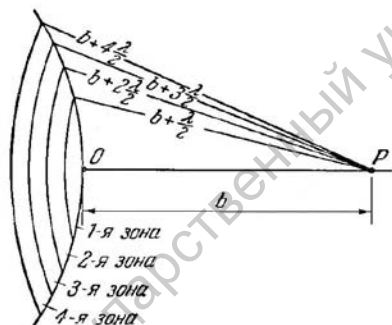


Рис. 10. Зоны Френеля

По Френелю, поле смещений в произвольной точке среды P, находящейся за фронтом волны, равно сумме возмущений, создаваемой малыми кольцевыми областями, на которые разбивается фронт волны. Эти кольцевые области называются зонами Френеля. Их радиусы равны

$b + \frac{\lambda}{2}, b + \frac{2\lambda}{2}, \dots, b + \frac{n\lambda}{2}$, где b – расстояние по нормали от точки P до фронта. Можно

показать, что вклады зон Френеля образуют знакопеременный ряд, члены которого уменьшаются по абсолютной величине. Полное возмущение в точке P приблизительно равно половине возмущения, обусловленного действием первой зоны Френеля

$$D_{F_1} = \sqrt{\lambda b} = \sqrt{VTb}.$$

Формула Кирхгоффа

Математическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля является дифракционный интеграл Кирхгоффа, который может быть получен путем решения волнового уравнения. Вывод формулы Кирхгоффа имеется, например, в книге Л.А. Рябинкина [8], а также в учебниках по теоретической оптике и математической физике. Наиболее подробно этот вопрос освещен в приложении к работе [4].

$$u(P, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{VR} \frac{\partial R}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right\} dS. \quad (56)$$

$u(P, t)$ - значение волновой функции в точке P в момент времени t . В квадратные скобки помещены значения функции u , взятые в момент времени $t - \frac{R}{V}$. Формула (56) позволяет рассчитать волновое поле в произвольной точке среды, если известны значения функции u и ее первых производных по нормали и времени во всех точках произвольной замкнутой поверхности, окружающей эту точку. Формула (56) справедлива для однородной среды. Для неоднородной среды известна формула С.Л. Соболева.

3.6 Разрешающая способность сейсморазведки по горизонтали

Под разрешающей способностью сейсморазведки по горизонтали будем понимать наименьшее расстояние между двумя объектами геологического разреза, при котором их можно различить на сейсмическом изображении. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, основной вклад в формирование волны вносит область среды, определяемая первой зоной Френеля.

$$R_F = \frac{D_F}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{VTH} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{VH}{f}}. \quad (57)$$

<u>Пример</u>		$R_F = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{VH}{f}}$		$R_F = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3000 \cdot 2500}{25}} \approx 210 \text{ м}$
$f=25 \text{ гц}$				
$V=3000 \text{ м/с}$				
$H=1500 \text{ м}$				
$R_F=?$				

3.7 Принцип Ферма

Пусть, в общем случае, имеется неоднородная изотропная среда, в каждой точке которой определена скорость $V = V(\vec{r})$. Рассчитаем время, необходимое для того, чтобы точка, двигаясь с указанной скоростью, описала некоторую линию S . Элемент пути dS будет пройден за время dS/V , а для прохождения всей линии S потребуется промежуток времени, выражаемый интегралом:

$$\tau(\vec{r}) = \int_s \frac{dS}{V(\vec{r})}. \quad (58)$$

Одним из основных принципов геометрической сейсмологии является принцип Ферма, согласно которому время, определенное интегралом (58), должно быть минимальным. Точнее надо говорить не о минимальном, а об экстремальном или, как еще говорят, стационарном значении интеграла (58), поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать только необходимое условие существования локального экстремума. Методами вариационного исчисления можно показать, что интеграл (58) примет экстремальное значение, если точка будет двигаться вдоль луча $\vec{r} = \vec{r}(S)$, определенного из уравнения

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{dS} \right) = \nabla \left(\frac{1}{V} \right). \quad (59)$$

Уравнение (59) называется дифференциальным уравнением лучей в форме Эйлера. Доступный вывод этого уравнения есть в приложении к работе [4]. Вариационное исчисление представляет собой раздел высшей математики, предметом которого является поиск экстремумов функционалов. По определению функционалом называется функция, определенная на функциональном множестве. Подробно этот вопрос будет рассматриваться в курсе теоретических основ обработки геофизической информации.

Пусть мы имеем некоторую функцию $y=f(x)$. Из математического анализа мы знаем, что для нахождения ее экстремумов надо решить дифференциальное уравнение $\frac{df}{dx} = 0$. В данном случае мы имеем дело с функционалом $\tau = \tau[\vec{r}(s)]$. Область его определения – множество функций $\vec{r} = \vec{r}(S)$, которые представляют собой параметрические уравнения лучей (S - параметр). Итак, для нахождения экстремума функционала (58) нужно решить уравнение (59).

Рассмотрим случай однородной среды, тогда $V=const$ и уравнение (59) примет вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = 0. \quad (60)$$

Решение уравнения (60) получается двукратным интегрированием

$$\vec{r}(S) = C_1 S + C_2.$$

Это общее решение дифференциального уравнения второго порядка (60) содержит две произвольные постоянные, для определения которых требуется задание начальных условий (задача Коши). Полученное выражение представляет собой уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Отсюда следует следующий важный вывод: в однородной среде лучи представляют собой прямые линии.

3.8 Дифференциальные уравнения лучей

Рассмотрим волновое уравнение $\nabla^2 u - \frac{1}{V^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Если $V = const$, то мы знаем, что лучи являются прямыми линиями. Если $V = V(\vec{r})$, тогда луч - сложная кривая. Уравнение эйконала является уравнением характеристик для волнового уравнения

$$|\nabla \tau|^2 = \frac{1}{V^2}. \quad (61)$$

Запишем его так

$$\nabla \tau = \frac{1}{V} \vec{n} \quad (61')$$

Здесь $\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dS}$, $dS = |d\vec{r}|$ - длина дуги вдоль луча. С учетом этих обозначений

$$\nabla \tau = \frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{dS}. \quad (61'')$$

Продифференцируем обе части по S .

$$\frac{d\nabla \tau}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{dS} \right) \quad (62)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения. Для этого поменяем местами операторы $\frac{d}{dS}$ и ∇ , получим $\frac{d\nabla \tau}{dS} = \nabla \left(\frac{d\tau}{dS} \right) = \nabla \left(\frac{1}{V} \right)$. Подставим результат в (62), и тогда будем иметь

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{dS} \right) = \nabla \left(\frac{1}{V} \right). \quad (59)$$

Получили уравнение лучей в форме Эйлера. Как мы знаем, уравнение Эйлера доставляет необходимое условие существования экстремума функционала (58), выражающего принцип Ферма. Решения уравнения (59) представляют собой параметрические уравнения лучей вида $\vec{r} = \vec{r}(S)$, где S является параметром. Найдем

теперь уравнения, содержащие время t в качестве параметра. Для этого произведем замену оператора $\frac{d}{dS} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt}$ (*) в (61'').

$$\nabla \tau = \frac{1}{V} \frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ или } \frac{d\vec{r}}{dt} = V^2 \nabla \tau \quad (63)$$

Нашли первое искомое уравнение. Для получения второго уравнения вычислим градиент степенной функции

$$\nabla \left(\frac{1}{V} \right) = \nabla V^{-1} = -1 \cdot V^{-1-1} \cdot \nabla V = -\frac{\nabla V}{V^2} \quad (64)$$

Используя уравнения (62) и (59), можем записать:

$$\frac{d\nabla \tau}{dS} \stackrel{no (62)}{=} \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{dS} \right) \stackrel{no (59)}{=} \nabla \left(\frac{1}{V} \right) \stackrel{no (64)}{=} -\frac{\nabla V}{V^2},$$

$$\frac{d\nabla \tau}{dS} \stackrel{no (*)}{=} \frac{1}{V} \frac{d\nabla \tau}{dt} = -\frac{\nabla V}{V^2}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на V , окончательно запишем

$$\frac{d\nabla \tau}{dt} = -\frac{\nabla V}{V} \quad (65).$$

Нашли второе уравнение. Таким образом, имеем систему (63) и (65):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= V^2 \nabla \tau, \\ \frac{d\nabla \tau}{dt} &= -\frac{\nabla V}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Система (66) представляет собой систему дифференциальных уравнений характеристик для уравнения эйконала, или бихарактеристик волнового уравнения. С точки зрения вариационного исчисления, эти уравнения являются уравнениями Гамильтона (каноническая система Гамильтона) для задачи (58). Таким образом, теория характеристик приводит к задаче на экстремум функционала. Решение (66) дает параметрические уравнения лучей в виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Два векторных уравнения (66) могут быть заменены на 4 скалярных уравнения для плоской задачи или на 6 скалярных уравнений для пространственной задачи. Система решается численно методами Рунге-Кутты. Задача Коши для (66) – есть прямая кинематическая задача сейсморазведки. Для решения задачи (66) часто используются термины – трассировка или трассирование лучей. Альтернативным подходом к решению задачи лучевого трассирования является решение уравнения эйконала с последующим построением лучей ($\nabla \tau$).

3.9 Лучевой метод решения прямой динамической задачи сейсморазведки

Пусть упругая волна удовлетворяет волновому уравнению $\nabla^2 u - \frac{1}{V^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

Если $V = \text{const}$, то методы решения волнового уравнения давно известны, возникает вопрос, как решить волновое уравнение, если $V = V(\vec{r})$?

Для решения задач квантовой механики был предложен метод ВКБ (Венцель, Крамер, Брюллен). Это один из так называемых асимптотических (приближенных) методов в теории волновых процессов. Асимптотический метод означает, что длина волны исчезающе мала ($\lambda \rightarrow 0$), при этом частота $f \rightarrow \infty$. По этому говорят о высокочастотном приближении в теории волновых процессов. В сейсморазведке метод ВКБ чаще всего называют лучевым методом. Сущность лучевого метода заключается в следующем. Решение волнового уравнения $u = u(\vec{r}, t)$ ищется для малой окрестности фронта волны в виде лучевого ряда

$$u(\vec{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\vec{r}) F_k[t - \tau(\vec{r})] \quad (67)$$

В лучевом ряде (67) функции $\tau(\vec{r})$, $a_k(\vec{r})$ и $F_k[t - \tau(\vec{r})]$ определяются с помощью уравнений:

$$|\nabla \tau|^2 - \frac{1}{V^2} = 0 \text{ - уравнение эйконала;}$$

$$a_k \nabla^2 \tau + 2 \nabla \tau \cdot \nabla a_k = a_{k-1}, \quad (68)$$

$$\frac{dF_k}{dt} = F_{k-1}. \quad (69)$$

Формула (69) показывает, что (67) представляет собой рекуррентное соотношение. Уравнение переноса в нулевом лучевом приближении имеет вид

$$a_0 \nabla^2 \tau + 2 \nabla \tau \cdot \nabla a_0 = 0. \quad (70)$$

Совпадет с уравнением (55), которое было получено при выводе уравнения эйконала из волнового уравнения. Если решить, то получим $a_0 = \frac{1}{r}$. Эйконал $\tau = \frac{r}{V}$,

подставляя a_0 и τ в лучевой ряд (67), получим $u(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} F(x - Vt)$. Таким образом, можно доказать, что в нулевом лучевом приближении лучевой ряд (67) вырождается в обычное уравнение сферической волны (34).

3.10 Методы решения прямых динамических задач сейсморазведки

Существует три различных подхода к решению задач о нахождении вектора смещений. Первый подход заключается в непосредственном определении вектора смещений из уравнения Ламэ (22) при заданных начальных и граничных условиях. Он обладает большой физической наглядностью, но в математическом плане он не всегда прост и удобен.

Второй подход предполагает использование некоторых вспомогательных функций – упругих потенциалов, связанных с искомым вектором смещения посредством теоремы Гельмгольца (27). В этом случае, имеем задачу решения классических волновых уравнений (29) для потенциалов продольных и поперечных волн. Этот прием нахождения поля вектора смещений хотя и менее нагляден, но во многих случаях позволяет относительно просто получить искомое решение.

Третий подход состоит в том, что для волнового уравнения ищется приближенное решение для высокочастотных колебаний. Этот способ, составляющий сущность лучевого метода, позволяет заменить точное волновое уравнение двумя приближенными уравнениями (54) и (55). Этот метод, несмотря на его упрощенность, позволяет сравнительно легко решать широкий класс важных прикладных задач теории сейсморазведки.

Во всех случаях, для решения дифференциальных уравнений, описывающих распространение упругих волн в среде, необходимо задание краевых и начальных условий.

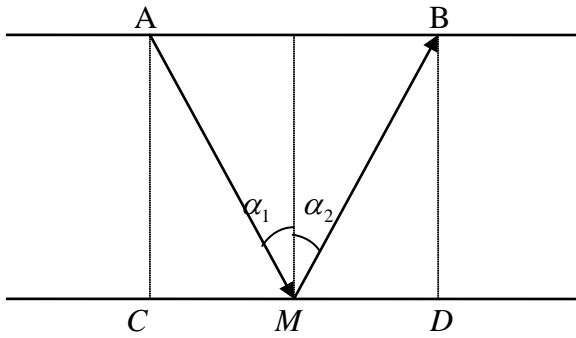
В настоящее время для решения прямых задач сейсморазведки создано разнообразное программное обеспечение. Наибольшую известность получил комплекс программ моделирования волновых полей Tesseral-2D, разработанный канадской компанией Tesseral Technologies Inc. Демонстрационную версию этой программы можно загрузить по ссылке <http://www.tesseral-geo.com/download.en.php>. В Tesseral-2D реализован второй подход к решению прямой задачи. Третий подход на основе лучевого трассирования доступен в коммерческой версии программы Tesseral Pro.

ГЛАВА 4. ОТРАЖЕНИЕ, ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ

4.1 Законы отражения и преломления

Законы отражения и преломления сейсмических волн являются следствием принципа Ферма.

Закон отражения



$$\begin{aligned} CD &= d \\ CM &= x \\ MD &= d-x \end{aligned}$$

Рис. 11. Закон отражения

Рассчитаем время, необходимое для того, чтобы точка прошла путь АМВ

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}{V_1}.$$

Существует бесчисленное множество возможных траекторий движения АМВ. Не обязательно прямые линии. В соответствии с принципом Ферма время должно быть минимальным. Дифференцируем, приравниваем к нулю:

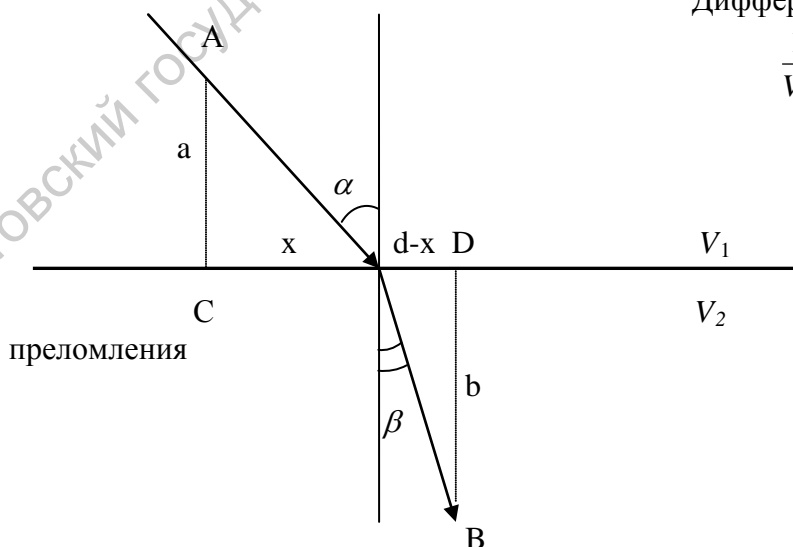
$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2V_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{V_1\sqrt{(d-x)^2 + a^2}} = 0,$$

$$\frac{1}{V_1} \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_{\sin \alpha_1}} = \frac{1}{V_1} \frac{d-x}{\underbrace{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}_{\sin \alpha_2}},$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2,$$

$\alpha_1 = \alpha_2$. Угол падения равен углу отражения.

Закон преломления



Дифференцируем, приравниваем к нулю.

$$\frac{1}{V_1} \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_{\sin \alpha}} = \frac{1}{V_2} \frac{d-x}{\underbrace{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}_{\sin \beta}},$$

$$\frac{\sin \alpha}{V_1} = \frac{\sin \beta}{V_2}.$$

Получили закон

или закон Снеллиуса.

Рис. 12. Закон преломления

Принцип взаимности

Время распространения волны сохраняется независимо от направления распространения волны. Применительно к сейсморазведке – если поменять местами источник и приемник упругих колебаний, то время не изменится.

4.2 Монотипные и обменные волны

Рассмотрим явления, которые возникают при падении плоской продольной волны на горизонтальную границу раздела двух однородных и изотропных сред.

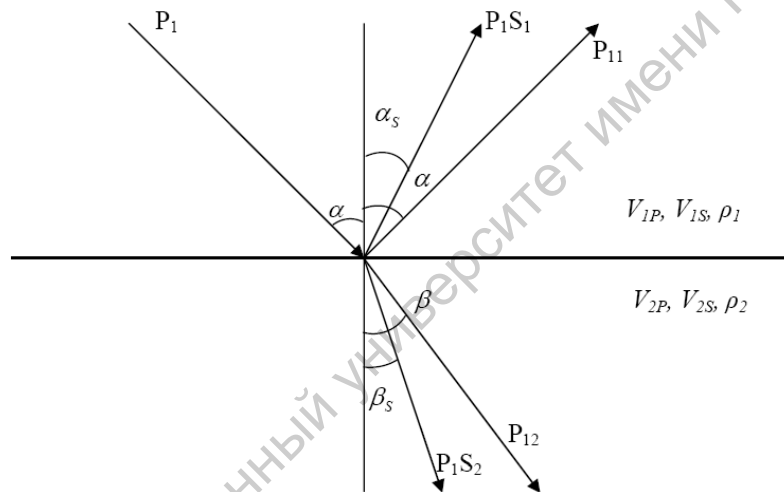


Рис. 13. Монотипные и обменные волны

При наклонном падении продольной волны P_1 на границе, в соответствии с принципом Гюйгенса, образуются четыре вторичные волны: две отраженные (продольная P_{11} и поперечная P_{1S_1}) и две проходящие (продольная P_{12} и поперечная P_{1S_2}). Проходящая и преломленная волна – одно и то же. Если образовавшиеся волны того же типа, что и падающая, то они называются монотипными. Если падает на границу продольная волна, а отражается от нее или проходит во вторую среду поперечная волна, то такие волны называются обменными. Для всех типов волн справедлив обобщенный закон Снеллиуса

$$\frac{V_{1P}}{\sin \alpha} = \frac{V_{1S}}{\sin \alpha_s} = \frac{V_{1P}}{\sin \alpha_p} = \frac{V_{2P}}{\sin \beta_p} = \frac{V_{2S}}{\sin \beta_s} = p, \text{ где } p - \text{ параметр луча.}$$

4.3 Уравнения Нотта-Цеппритца

Пусть падающая, отраженные и проходящие волны лежат в одной плоскости. Тогда компоненты вектора смещений зависят только от координат x и z . Так принято в сейсморазведке: x – расстояние вдоль профиля наблюдения, z – глубина. Ось z направлена вниз. Согласно формуле (27) $\vec{U} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}$, компоненты смещения $\vec{U} = \vec{U}\{u, v, w\}$,

$$\text{тогда } u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}.$$

Смещения в продольной волне происходят по направлению распространения, а в поперечной – перпендикулярно. В рассматриваемом случае смещения в поперечной волне происходят в плоскости xOz . Такую поперечную волну обозначают символом SV . Существуют также поперечные волны, смещения в которых происходят в плоскости xOy . Такие волны обозначают символом SH . Эти два вида представляют собой крайние случаи. В общем случае, поперечная волна содержит как компоненту SV , так и компоненту SH .

Обычно в сейсморазведке используют только P волны. Сейсморазведка, использующая все три компоненты (P , SV и SH), называется многоволновой или трехкомпонентной сейсморазведкой (англ. – 3C).

Запишем потенциал плоской падающей продольной волны в виде

$$\varphi_{P_1} = A_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{V_{1P}} \right) \right] = A_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha}{V_{1P}} \right) \right].$$

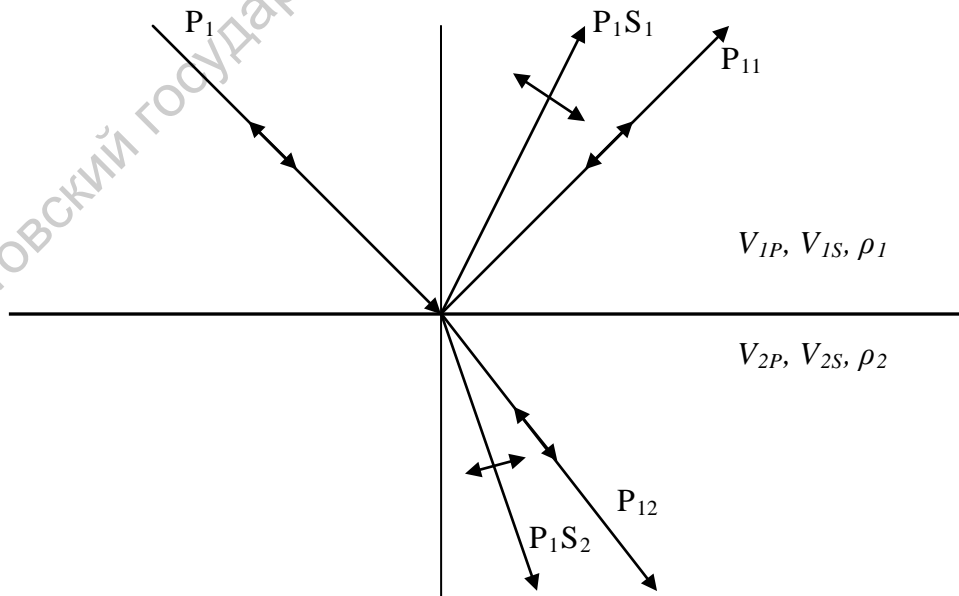


Рис. 14. Направления движения частиц в продольных и поперечных волнах

Выразим потенциалы четырех возникающих на границе волн.

- 1) продольной отраженной: $\varphi_{P_{11}} = A_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha - z \cdot \cos \alpha}{V_{1P}} \right) \right];$
- 2) обменной отраженной: $\psi_{P_{S_1}} = B_1 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_S - z \cdot \cos \alpha_S}{V_{1S}} \right) \right];$
- 3) продольной проходящей: $\varphi_{P_{12}} = A_2 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \beta + z \cdot \cos \beta}{V_{2P}} \right) \right];$
- 4) обменной проходящей: $\psi_{P_{S_2}} = B_2 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \beta_S + z \cdot \cos \beta_S}{V_{2S}} \right) \right].$

Обратим внимание, что продольные волны определяются через скалярный потенциал φ , а поперечные - через векторный $\vec{\psi}$, то есть вихревую часть общего поля смещений \vec{U} . Отношения $A_1/A_0 = k_{P_{11}}$ и $B_1/A_0 = k_{P_{S_1}}$ называются коэффициентами отражения, $A_2/A_0 = k_{P_{12}}$ и $B_2/A_0 = k_{P_{S_2}}$ - коэффициентами прохождения. Нахождение коэффициентов осуществляется на основе выполнения граничных условий непрерывности компонент вектора смещений и нормальных к границе компонент тензора напряжений. Система уравнений для определения коэффициентов была получена Ноттом и Цёппритцем. Подробный вывод системы уравнений Нотта-Цёппритца приводится во многих учебниках по сейсморазведке, например [5], [8]. Запишем без вывода

$$\begin{aligned} k_{P_{11}} \sin \alpha + k_{P_{S_1}} \cos \alpha_S - k_{P_{12}} \sin \beta + k_{P_{S_2}} \cos \beta_S &= -\sin \alpha, \\ k_{P_{11}} \cos \alpha - k_{P_{S_1}} \sin \alpha_S + k_{P_{12}} \cos \beta + k_{P_{S_2}} \sin \beta_S &= \cos \alpha, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} k_{P_{11}} \sin 2\alpha + k_{P_{S_1}} \frac{V_{1P}}{V_{1S}} \cos 2\alpha_S - k_{P_{12}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_{2S}^2}{V_{1S}^2} \cdot \frac{V_{1P}}{V_{2S}} \sin 2\beta - k_{P_{S_2}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_{1P} V_{2S}}{V_{1S}^2} \cos 2\beta_S &= \sin 2\alpha, \\ k_{P_{11}} \cos 2\alpha - k_{P_{S_1}} \frac{V_{1S}}{V_{2S}} \sin 2\alpha_S - k_{P_{12}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_{2P}}{V_{1P}} \cos 2\beta - k_{P_{S_2}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_{2S}}{V_{1P}} \sin 2\beta_S &= -\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. В общем виде решать и анализировать сложно. В последние годы в практике сейсморазведки все более широко используется метод количественного анализа зависимости коэффициентов отражения от величины угла падения волны. Эта технология получила название AVO-анализа. (AVO – Amplitude Variation with Offset). В основе метода лежит линейная аппроксимация системы (70), полученная Шуем в 1985г.

$$k_{P_1} = G \cdot \cos \alpha + R_0. \quad (71)$$

По результатам АВО-анализа прогнозируют значения параметров ρ, λ, μ и γ . То есть это метод решения обратной динамической задачи сейсморазведки. По вопросам этого вида динамического анализа сейсмозаписей существует обширная литература, наиболее общие вопросы можно найти в современных учебниках по сейсморазведке [2,3], а базовую теорию метода – в фундаментальной монографии [1].

4.4 Коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении

Выражения для коэффициентов отражения и прохождения принимают простой вид в случае нормального падения продольной волны, то есть когда $\alpha = 0$. В этом случае существенное упрощение задачи связано с тем, что при нормальном падении обменные волны не возникают. Имеют место следующие формулы:

$$k_{P_1} = \frac{V_2 \rho_2 - V_1 \rho_1}{V_2 \rho_2 + V_1 \rho_1}, \quad (72) \quad k_{P_2} = \frac{2V_1 \rho_1}{V_2 \rho_2 + V_1 \rho_1}. \quad (73)$$

Можно показать, что $k_{P_2} = 1 - k_{P_1}$, то есть если амплитуда падающей волны равна A_0 , то амплитуда отраженной волны будет $A_1 = k_{P_1} \cdot A_0$, проходящей волны $A_2 = k_{P_2} \cdot A_0$. Проверим $A_0 = A_1 + A_2 = k_{P_1} A_0 + k_{P_2} A_0 = A_0 (k_{P_1} + k_{P_2}) = A_0$, поскольку $(k_{P_1} + k_{P_2}) = 1$.

Произведение плотности на скорость называется волновым сопротивлением или акустической жесткостью или акустическим импедансом среды $W = V\rho$. С учетом этого обозначения формулы (72) и (73) примут вид:

$$k_{P_1} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}, \quad (72') \quad k_{P_2} = \frac{2W_1}{W_2 + W_1}. \quad (73')$$

По сейсмическим данным скорость определить проще, чем плотность. Иногда используют зависимости различного вида $V = f(\rho)$. Часто используют приближенную формулу для коэффициента отражения (72) $k \approx \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}$.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \frac{V_1 = 2000 \text{ м/с}}{V_2 = 4000 \text{ м/с}} \quad k &= \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = \frac{4000 - 2000}{4000 + 2000} = \frac{1}{3} \approx 0.33 \end{aligned}$$

Если амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, то амплитуда отраженной волны $A_1 = 0.33$, амплитуда проходящей волны $A_2 = 1 - A_1 = 0.67$

Пример 2.

$$\frac{V_1 = 2000 \text{ м/с}}{V_2 = 2000 \text{ м/с}} \quad k = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = \frac{2000 - 2000}{2000 + 2000} = 0$$

Амплитуда отраженной волны равна нулю, то есть отраженные волны образуются только на акустически жестких границах, то есть таких, на которых скорость или акустическая жесткость изменяется скачком.

Пример 3 (Инверсия скоростей).

$$\frac{V_1 = 4000 \text{ м/с}}{V_2 = 2000 \text{ м/с}} \quad k = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = \frac{2000 - 4000}{2000 + 4000} = -\frac{1}{3} \approx -0.33$$

Отрицательный коэффициент отражения. В этом случае, если волна достигла границы в фазе сжатия, то отраженная волна будет в фазе расширения. Фаза изменяется на 180° . Инверсия фазы.

Пример 4 (Зеркальное отражение).

$V_2 \gg V_1$ ($V_2 \ll V_1$), тогда $k \approx 1(-1)$. В этом случае амплитуда проходящей волны равна нулю, амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей волны.

Границы на которых коэффициенты отражения по абсолютной величине составляют 0.2-0.5 и более, называются сильными отражающими границами. $k < 0.2$ – слабыми.

Выше была рассмотрена теория отражения и преломления плоских волн. Теория отражения сферических волн может быть построена на базе интеграла Вейля. То есть сферическую волну можно представить в виде суммы плоских волн, а для каждой плоской волны применима теория плоских волн.

4.5 Понятие о преломленных (головных) волнах

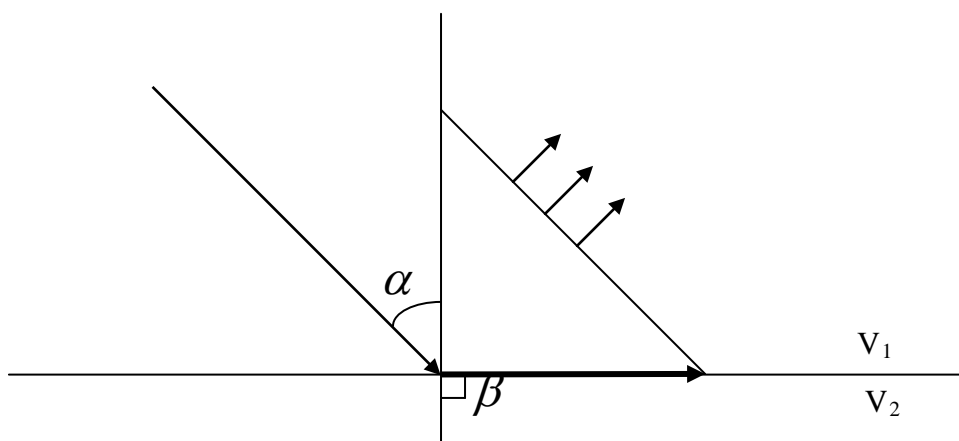


Рис. 15. Образование головной волны

Как следует из закона Снеллиуса, существует такой угол падения α_k , при котором угол преломления $\beta = 90^\circ$.

$$\frac{\sin \alpha_k}{V_1} = \frac{\sin 90^\circ}{V_2}; \quad \frac{\sin \alpha_k}{V_1} = \frac{1}{V_2}; \quad \sin \alpha_k = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{или} \quad \alpha_k = \arcsin \frac{V_1}{V_2}. \quad \text{Этот угол}$$

называется критическим углом падения. За точкой критического отражения волна начинает скользить вдоль границы раздела. При этом, согласно принципу Гюйгенса, возникает вторичная волна с коническим фронтом. Лучи ортогональны фронту. Эта волна называется преломленной или головной волной. Если угол падения $\alpha > \alpha_k$, то коэффициент отражения становится комплексной величиной, поскольку в области действительных чисел $|\sin \alpha| \leq 1$. Граница, на которой могут образовываться головные волны, называется преломляющей границей. Если имеет место инверсия скорости, то на таких границах головные волны не возникают.

4.6 Рефрагированные волны

Рефрагированная волна – прямая волна в градиентной среде. В сейсморазведке прямой волной называют падающую волну. Среду называют градиентной, если $V = V(\vec{r})$. То есть скорость является функцией координат. В самом общем случае, лучи являются криволинейными и удовлетворяют дифференциальным уравнениям (59) или (66). За исключением самых простых случаев, эти уравнения могут быть решены только численными методами. В случае однородной среды $V = const$, лучи являются прямыми линиями и удовлетворяют уравнению (60). Если скорость является линейной функцией глубины $V(z) = V_0 + \beta z$, то путем решения дифференциальных уравнений лучей можно строго показать, что лучи будут кривыми постоянной кривизны, то есть дугами окружностей. V_0 - скорость на глубине $z = 0$, β - градиент скорости, то есть коэффициент, характеризующий изменение скорости в зависимости от глубины. Иногда используют более сложные законы изменения скорости в зависимости от глубины.



Рис. 15. Образование рефрагированной волны

Для практики важно, что в случае нарастания скорости с глубиной, лучи имеют обратный ход, то есть возвращаются к дневной поверхности, следовательно, могут быть зарегистрированы сейсморазведочной аппаратурой, и использоваться для получения сведений о геологическом строении изучаемой территории.

4.7 Дифрагированные волны

Дифракция – фундаментальное свойство волновых процессов. Дифракцией называется явление попадания волны в область геометрической тени или по-другому – явление огибания волной препятствия. Возникает в том случае, если волна на пути своего распространения встречает препятствие сравнимое с длиной волны. Рассмотрим в качестве примера дизъюнктивное нарушение – сброс.

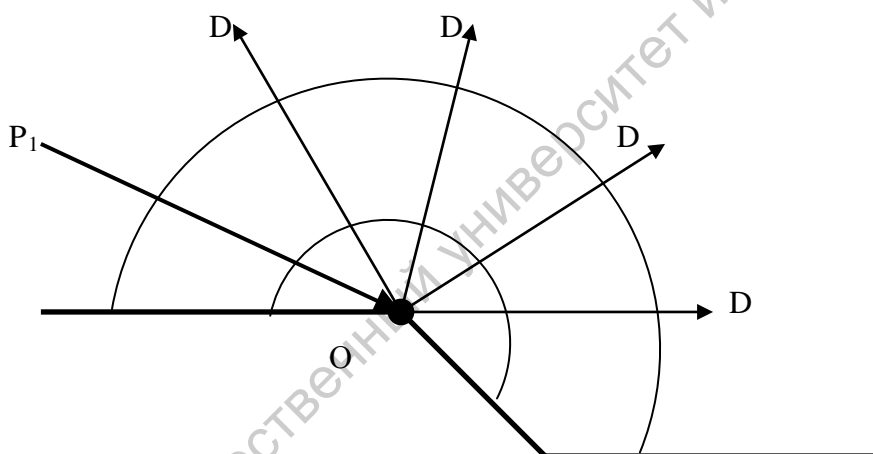


Рис. 16. Дифракция сейсмической волны от разрывного нарушения

O – точка дифракции, в соответствии с принципом Гюйгенса является источником вторичных волн. От точки O идут лучи дифрагированной волны D. Дифрагированные волны являются важным признаком для выявления разрывных нарушений по данным сейсморазведки. Подробно этот вопрос будет рассматриваться при изучении геологической интерпретации данных сейсморазведки.

Важный случай образования дифрагированных волн связан с отражением от незеркальных, то есть геометрически неровных, или, как их еще называют в сейсморазведке – шероховатых границ. Причинами шероховатости границ является фациальная изменчивость горных пород, стратиграфические несогласия и т.д. В

результате сложения волн, дифрагированных различными шероховатостями границы, образуются суммарные волны, которые называются незеркально отраженными или суммарно-дифрагированными.

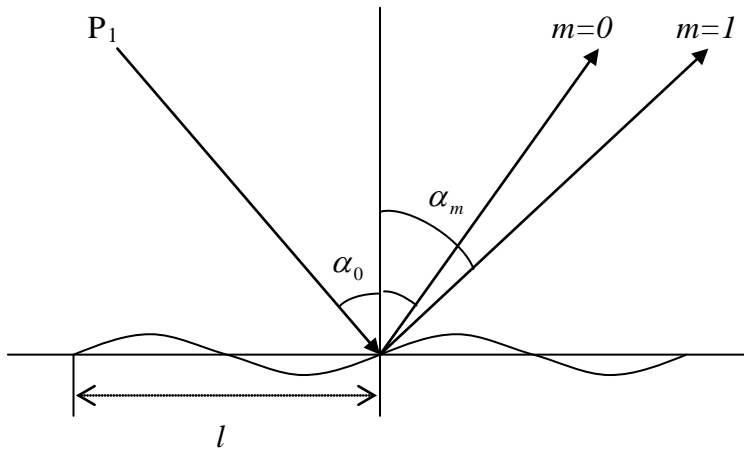


Рис. 16. Отражение волны от незеркальной границы

$\sin \alpha_m = \sin \alpha_0 + m \frac{\lambda}{l}$, где λ -длина волны, l – пространственный период

синусоиды.

На рисунке показаны лучи зеркально отраженной (угол падения равен углу отражения) и незеркально отраженной $m = 1$ волн от границы синусоидальной формы. В этом случае, угол падения не равен углу отражения, а связан с ним уравнением Брегга-Вульфа.

4.8 Поверхностные волны

В однородной безграничной среде могут существовать три типа объемных сейсмических волн: одна продольная P и две поперечных SV и SH. При появлении в среде сейсмических границ, любая из этих волн в результате явлений отражения и преломления порождает класс вторичных объемных волн – отраженных и преломленных. Существование свободной сейсмической границы – верхнего полупространства, обуславливает появление еще одного класса волн – класса поверхностных волн.

Существование одного из типов поверхностных волн теоретически было предсказано английским физиком Дж. У. Рэлеем. Рэлей рассмотрел случай гармонических колебаний, для которых потенциалы продольных и поперечных смещений можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\varphi &= A(z)\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)\right], \\ \vec{\psi} &= B(z)\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)\right].\end{aligned}\quad (74)$$

где V_R - скорость поверхностной волны, $A(z)$, $B(z)$ - амплитуда, которая убывает по экспоненциальному закону

$$A(z) = A_0 e^{-k_1 z}, \quad B(z) = B_0 e^{-k_2 z}. \quad (75)$$

Потенциалы φ и $\vec{\psi}$ должны удовлетворять волновым уравнениям (29):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi - \frac{1}{V_P^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \vec{\psi} - \frac{1}{V_S^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}$$

Компоненты смещений в поверхностной волне:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}. \quad (76)$$

Можно показать, что траектории смещения частиц в волне Рэлея представляют собой эллипсы. Для этого нужно подставить (74) в (29), а потом в (76). В результате получим $\frac{u^2}{k_1^2} + \frac{w^2}{k_2^2} = 1$ - каноническое уравнение эллипса. Если $k_1 = k_2$, то эллипс вырождается в окружность. Другими типами поверхностных волн являются волны Лява. Если волна Рэлея вызывает одновременно деформацию объема и сдвига, то волна Лява это SH волна. Вдоль границы раздела двух упругих полупространств, как и на свободной поверхности, может распространяться граничная волна, экспоненциально затухающая с удалением в обе стороны от границы. Это волна Стоунли. Однако, в отличие от волн Рэлея и Лява, волна Стоунли образуется только при определенных соотношениях упругих и плотностных свойств на границе раздела. Скорости поверхностных волн всегда меньше чем скорости объемных волн: $V_R < V_S < V_P$.

При землетрясениях именно поверхностные волны оказывают разрушительное действие из-за объемно-сдвигового характера деформаций грунта. В сейсморазведке поверхностные волны обычно являются помехами и изучаются с целью их подавления. Иногда поверхностные волны используют при малоглубинных исследованиях верхней части геологического разреза.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИ СЕЙСМИЧЕСКИХ СРЕД

5.1 Модели сейсмических сред

Реальные геологические среды характеризуются сложным распределением физических свойств. Поэтому при решении многих задач их представляют моделями сред с некоторым схематизированным распределением параметров.

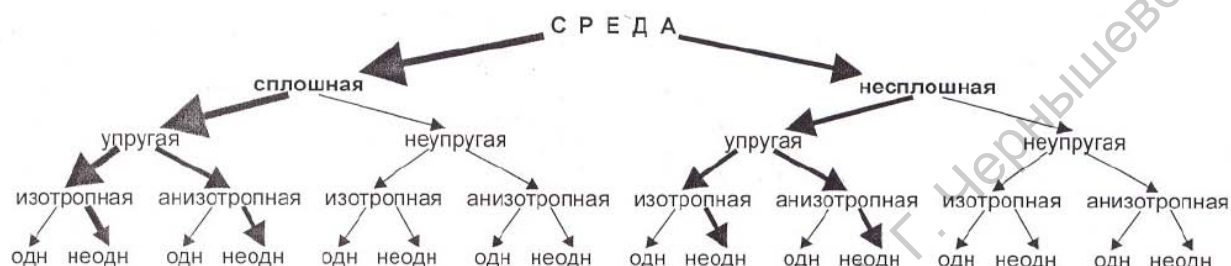


Рис. 17. Иерархическая схема моделей среды по Е.А. Козлову [7]

Модель сплошной среды не учитывает дискретного строения вещества. Упругая среда описывается законом Гука. Изотропной называется среда, свойства которой не зависят от направления исследования. Свойства однородной среды не изменяются в пространстве, то есть не зависят от координат. В современной сейсморазведке используются все модели. Наиболее часто применяется модель неоднородной среды.

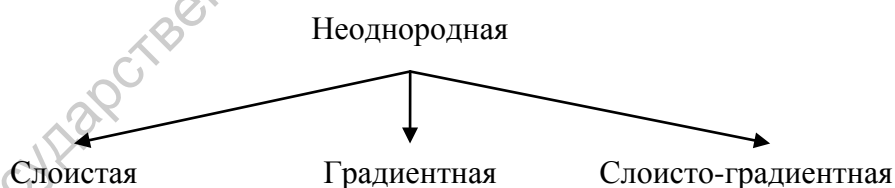


Рис. 18. Виды неоднородных моделей среды

С непрерывной средой мы уже познакомились, когда рассматривали рефрагированные волны. Основным параметр, изучаемый в сейсморазведке – это скорость, его проще всего определить по данным сейсморазведки. Это кинематическая задача. Определение других параметров - ρ, W, λ, μ и т.д. – динамическая задача. Значительно сложнее. Слоистая среда – самая интересная.

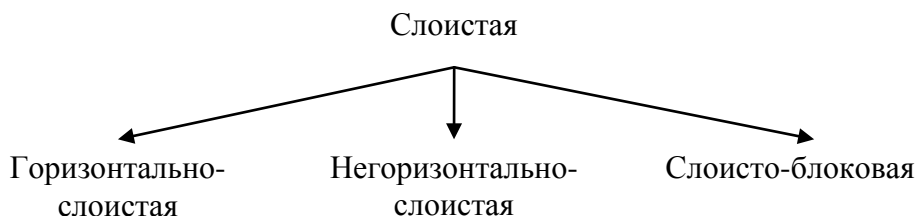


Рис. 19. Виды слоистых моделей среды

5.2 Горизонтально слоистая среда. Среднескоростная аппроксимация разреза

Реальная геологическая среда в условиях платформенного залегания горных пород имеет четко выраженное слоистое строение. Слои образуются в результате изменяющихся условий осадконакопления, связанных с регрессией и трансгрессией морей и т.д. При рассмотрении многих вопросов сейсморазведки ограничиваются моделями среды, состоящими из однородных слоев, разделенных плоско параллельными горизонтальными границами раздела. Такая модель среды называется горизонтально слоистой. Скорость, определяемая по нормали к напластованию, называется пластовой или интервальной скоростью. Важнейшей характеристикой горизонтально слоистой среды является средняя скорость.

$$\bar{V}_n = \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{\frac{h_1}{V_1} + \frac{h_2}{V_2} + \dots + \frac{h_n}{V_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{V_i}}. \quad (77)$$

Рис. 20. Горизонтально-слоистая модель среды

Пласт называется тонким, если $h \leq \lambda$, толстым, если $h > \lambda$.

Для непрерывной среды выражение (77) приобретает следующий вид:

$$\bar{V} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{V_i}} = \frac{H}{\int_0^H \frac{dz}{V(z)}}. \quad (78)$$

5.3 Слоисто-непрерывная среда

В этом случае среда разбивается на несколько слоев, в каждом из которых скорость изменяется по определенному закону. Такое представление о среде наиболее

близко к действительности. Однако, его применение затруднительно, так как требуется сведения о законах изменения скоростей в каждом слое.

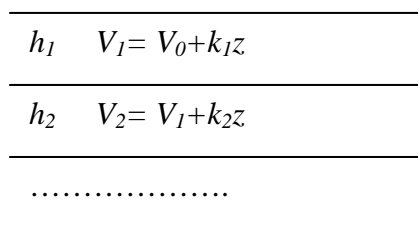


Рис. 20. Слоисто-непрерывная модель среды

5.4 Анизотропная среда

Анизотропной называется среда, свойства которой зависят от направления исследования. Анизотропия упругих свойств, в частности скоростей распространения сейсмических волн, объясняется определенной упорядоченностью строения среды. Согласно теории упругости, в самом общем случае, при отсутствии элементов симметрии в упругих свойствах однородной среды, они характеризуются 21 независимой упругой постоянной. Справедлив закон Гука в форме (7). В выражении (7) в тензоре упругих постоянных 36 элементов. Учитывая, что $C_{nm} = C_{mn}$, только 21 элемент оказывается независимым. По мере упрощения свойств среды, их количество сокращается до 9, 6 и 3 при ромбической, гексагональной и кубической симметриях соответственно. Наконец, в изотропной среде, свойства которой одинаковы по всем направлениям, остаются только два независимых упругих параметра λ и μ .

В сейсморазведочной практике наиболее часто используется модель среды, у которой свойства не зависят от направления в одной плоскости, называемой плоскостью изотропии. Перпендикуляр к этой плоскости является осью симметрии. Такую среду называют поперечно-изотропной или трансверсально-изотропной. Она характеризуется 5 независимыми упругими константами. Пятиконстантную теорию упругости используют в качестве модели осадочной толщи с плоско параллельной горизонтальной слоистостью (горизонтальная ТИС) и модели изотропного массива с плоскопараллельной вертикальной трещиноватостью (вертикальная ТИС).

В 1986 г. Л.Томсен предложил представлять трансверсально-изотропные среды не через элементы тензора упругости C , а через введенные им коэффициенты анизотропии.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \\ \delta &= \frac{(C_{13} + C_{55})^2 - (C_{13} - C_{55})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{55})}, \\ \gamma &= \frac{C_{66} - C_{55}}{2C_{55}}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Скорости сейсмических волн V_p и V_s в анизотропных средах сложным образом выражаются через коэффициенты C_{nm} (5 коэффициентов) или 3 коэффициента Томсена

$$\begin{aligned} V_p &= V_p(\varepsilon, \delta, \gamma, \rho), \\ V_s &= V_s(\varepsilon, \delta, \gamma, \rho). \end{aligned}$$

В случае изотропной среды, как мы знаем, справедливы соотношения $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Геометрический смысл параметров анизотропии.

Эллиптической называется такая анизотропия, при которой поверхность, описываемая в пространстве вектором скорости, имеет форму трехосного эллипсоида вращения. Оси эллипсоида - $\varepsilon, \delta, \gamma$.

В 1995 году Алхалифа и Цванкин предложили свой параметр анизотропии – параметр неэллиптичности:

$$\eta = \frac{\delta - \varepsilon}{1 + 2\delta}. \quad (80)$$

Если трансверсально изотропная среда имеет тонкослоистый характер, то есть состоит из слоев, мощности которых малы относительно длины волны, то ее можно рассматривать как квазианизотропную среду. В такой среде лучи практически прямолинейны как в однородной среде, но сейсмические скорости зависят от направления, как в анизотропной среде. Существенной особенностью распространения упругих колебаний в квазианизотропных средах является неортогональность фронтов и лучей.

Когда мы свели закон Гука к двум константам, мы перешли к изотропной модели. Вся последующая теория – волновые уравнения, геометрическая сейсмика, уравнения фронтов и лучей была развита в рамках изотропной модели среды. На практике изучение анизотропии обычно заключается в нахождении и анализе параметра η .

На этом заканчивается первый большой раздел курса сейсморазведки – физические основы сейсморазведки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Физические основы сейсморазведки – важнейший базовый элемент образования геофизика сейсморазведчика. Теоретические основы распространения упругих волн являются необходимым звеном между представлениями о геологической среде и пониманием закономерностей образования и распространения в них упругих волновых полей. Ограниченный объем учебного пособия не позволяет достаточно подробно осветить все вопросы теории сейсмических волн. Однако, при изложении материала автор стремился максимально реализовать принципы достаточности и компактности, что позволяет студентам сконцентрироваться на основных положениях теории волн, принципиально необходимых для успешного освоения курса сейсморазведки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М. Мир. 1983. т.1, 880 с., т 2., 519 с.
2. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. Сейсморазведка. Тверь. АИС. 2006. 744 с.
3. Бондарев В.И. Сейсморазведка. Екатеринбург. 2007. 703 с.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М. Наука. 1973. 721 с.
5. Знаменский В.В. Общий курс полевой геофизики. М. Недра. 1989. 520 с.
6. Кауфман А.А., Левшин А.Л. Введение в теорию геофизических методов. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. Ч. 3. М. Недра. 2001. 518 с.
7. Козлов Е.А. Модели среды в разведочной сейсмологии. Тверь. ГЕРС. 2006. 480 с.
8. Рябинкин Л.А. Теория упругих волн. М. Недра. 1987. 182 с.
9. Саваренский Е.Ф. Сейсмические волны. 1972. М. Недра. 293 с.
10. Яновская Т.Б. Основы сейсмологии. Санкт-Петербург. 2008. 222 с.