

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО"

Кафедра математического анализа

Д.С. БАРАБАШ, В.Г. ГОРДИЕНКО, М.А. ОСИПЦЕВ,
Е.В. РАЗУМОВСКАЯ, В.Г. ТИМОФЕЕВ

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Учебное пособие

Саратов 2014

Пособие посвящено решению задач замены переменных в двойном интеграле. Рассмотрены задачи непосредственного вычисления двойных интегралов, а также приложения этих интегралов к геометрическим и механическим (физическим) задачам.

Пособие снабжено большим количеством подробно решенных задач, содержащих графические иллюстрации этапов решения.

Для студентов механико-математического и физического факультета университета, а также для студентов естественно - научных специальностей и представительств университета в регионе.

Рекомендует к печати:

кафедра математического анализа Саратовского государственного университета, доктор физико - математических наук, профессор С. И. Дудов.

Содержание

1	Введение	3
2	Замена переменных в двойном интеграле	6
2.1	Двойной интеграл в полярных координатах	6
2.2	Двойной интеграл в криволинейных координатах	6
3	Вычисление двойных интегралов	8
4	Геометрические приложения двойных интегралов	37
5	Вычисление площади поверхности	74
6	Физические и механические приложения двойных интег-	
	лов	89
7	Литература:	104

1 Введение

Математическая энциклопедия дает следующее понятие кратного интеграла. Кратный интеграл - определенный интеграл от функции нескольких переменных. Имеются различные понятия кратного интеграла (интеграл Римана, интеграл Лебега, интеграл Лебега-Стилтьеса и др.)

Кратный интеграл Римана вводится на основе меры Жордана μ . Пусть E - измеримое по Жордану множество двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2$, μ^2 есть двумерная мера Жордана и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^k$ — разбиение множества E , т.е. такая система измеримых по Жордану множеств E_i , что $\bigcup_{i=1}^k E_i = E$ и $\mu_2(E_i \cap E_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$. Величину $\delta_\tau = \max_{i=1,2,\dots,k} d(E_i)$, где $d(E_i)$ — диаметр множества E_i , называют мелкостью разбиения τ . Если функция $f(x_1, x_2)$ определена на множестве E , то всякую сумму вида $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}) = \sum_{i=1}^k f(\xi^{(i)}) \mu^2 E_i$, называют интегральной суммой Римана функции f . Если для функции f существует $\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau$, не зависящий от разбиения, то этот предел называют двукратным интегралом Римана и обозначают $\int_E f(x) dx$ или $\iint_E f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$. Саму функцию f называют в этом случае интегрируемой по Риману, короче R -интегрируемой.

В случае $n = 1$ в качестве множества E , по которому производится интегрирование, обычно берется отрезок, а в качестве его разбиений τ рассматриваются разбиения, состоящие также только из отрезков. Таким образом, в этом случае как множество, по которому производится интегрирование, так и элементы разбиения представляют собой измеримые по Жордану множества специального вида — отрезки. Поэтому не все свойства R -интегрируемых на отрезке функций справедливы для функций R -интегрируемых на произвольных измеримых по Жордану множествах. К примеру, из того что любая функция, определенная на множестве Жордановой меры нуль, R -интегрируема на нем, следует что R -интегрируемые функции могут быть

неограниченными, это невозможно для R -интегрируемых функций на отрезках. Чтобы из R -интегрируемости функции на некотором множестве следовала ограниченность функции, на рассматриваемое множество налагают дополнительные условия, например, чтобы у него существовали сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру Жордана. К таким множествам относятся все измеримые по Жордану открытые множества и их замыкания, в частности, измеримые по Жордану области и их замыкания.

Поскольку кратный интеграл Римана можно брать только по множествам измеримым по Жордану (они называются квадрируемыми), то двойной интеграл Римана рассматривают обычно на областях или их замыканиях, границы которых имеют площади в смысле Жордана, равные нулю.

Интеграл Римана от ограниченных функций двух и более переменных обладает обычными свойствами интеграла (линейность, аддитивность относительно множеств, по которым ведется интегрирование, сохранение при интегрировании нестрогих неравенств, интегрируемость произведения интегрируемых функций и т.п.)

Кратный интеграл Римана может быть сведен к повторному интегралу. Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, E -измеримое в $\mathbb{R}^2$ по Жордану множество, $E(x_1^0) = E \cap \{x_1 = x_1^0\}$ — сечение множества E гиперплоскостью $x_1 = x_1^0$, E_{x_2} — проекция E на гиперплоскость $R^1 = \{x : x_2 = 0\}$, причем $E(x_1)$ и E_{x_2} — измеримы в смысле меры Жордана. Тогда, если функция f R -интегрируема на множестве E и для всех $x_1 \in E_{x_2}$ существует одномерный интеграл от ее сужения на множество $E(x_1)$, то существует повторный интеграл

$$\int_{E_{x_2}} dx_1 \int_{E(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2$$

и при этом

$$\int_E f(x) dx = \iint_E f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{E_{x_2}} dx_1 \int_{E(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2.$$

В случае, когда G является измеримой по Жордану областью в пространстве $\mathbb{R}_t^2$, а $x = \varphi(t)$ — взаимно однозначное отображение G на измеримую область Γ пространства $\mathbb{R}_x^2$, причем φ непрерывно дифференцируема на замыкании $\overline{G}$ области G , для интегрируемой на $\Gamma = \varphi(G)$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменного в интеграле

$$\int_{\varphi(G)} f(x) dx = \int_G f(x(t)) |J(t)| dt,$$

где $J(t)$ — якобиан отображения φ .

Геометрический смысл двойного интеграла Римана связан с понятием трехмерной меры Жордана μ^3 : если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}_x^2$, $f(x) \geq 0$ на E и $A = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}_{xy}^3$, то

$$\int_E f(x) dx = \mu^3 A.$$

Для функций многих переменных существует также понятие несобственного кратного интеграла.

Целью данного пособия является обзорное изложение замены переменной в двойном интеграле с рассмотрением решения практических задач по этой теме.

2 Замена переменных в двойном интеграле

2.1 Двойной интеграл в полярных координатах

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам r, φ , связанным с прямоугольными координатами соотношением $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, осуществляется по формуле

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{r\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (2.1)$$

Если область интегрирования $D_{r\varphi}$ ограничена двумя лучами, выходящими из полюса, $\varphi = \alpha, \varphi = \beta, (\alpha \leq \beta)$, и двумя кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ — однозначные функции при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ и $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_{D_{r\varphi}} F(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi) r dr, \quad (2.2)$$

где

$$F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

2.2 Двойной интеграл в криволинейных координатах

Пусть двойной интеграл преобразуется от прямоугольных координат x, y к криволинейным координатам u, v , связанные с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = x(u, v), y = y(u, v),$$

где функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области $D'_{u,v}$ плоскости $uO'v$ и якобиан преобразования в области $D'_{u,v}$ не об-

ращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Считаем, что в этом случае установлено взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное отображение между областями $D_{x,y}$ и $D'_{u,v}$ соответственно плоскостей xOy и $uO'v$ (рис.1).

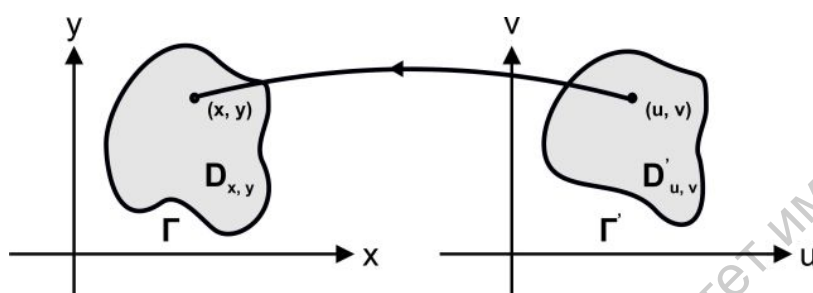


Рис. 1:

Формула преобразования двойного интеграла в этом случае имеет вид:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D'_{u,v}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (2.3)$$

Отметим, что в случае полярной системы координат якобиан преобразования легко вычисляется

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Перейдем к систематическому изложению решения разных типов задач с использованием систем координат, отличных от прямоугольной.

3 Вычисление двойных интегралов

В двойном интеграле

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$$

перейти к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, расставить пределы интегрирования.

Пример 1.1. $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, где $a \geq 0$.

Решение.

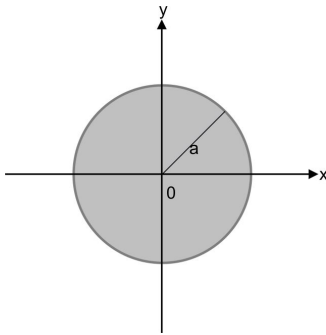


Рис. 2:

Область D_{xy} — круг с центром в начале координат системы xOy (рис.2) и радиусом $r = a$. При изменении φ от 0 до 2π — r меняется от 0 до a . По формуле (2.2) имеем:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

Пример 1.2. $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ax\}$, где $a > 0$.

Решение.

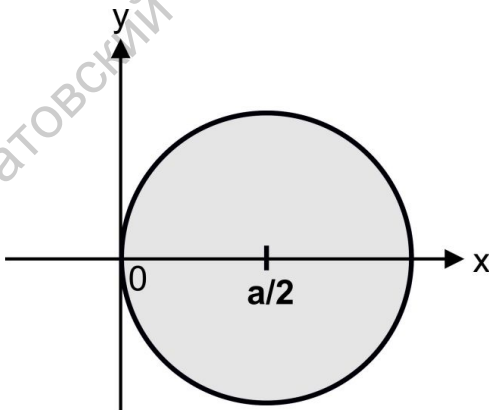


Рис. 3:

Преобразуем область D_{xy} (рис.3) к следующему виду

$$x^2 - ax + y^2 \leq 0$$

или

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}.$$

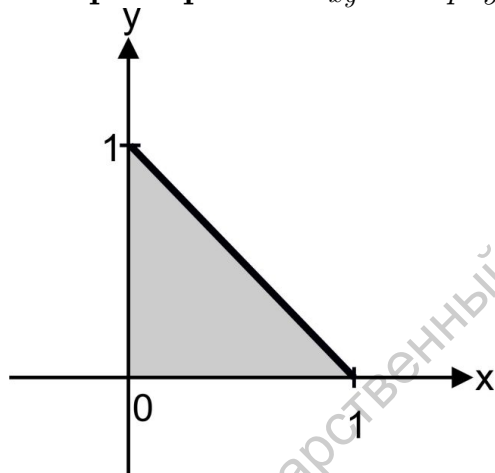
Очевидно, что рассматриваемая область имеет вид, указанный на рис.3. Это круг с центром в точке $(\frac{a}{2}; 0)$ и радиусом $R = \frac{a}{2}$. В силу этого при переходе к полярным координатам φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а r меняется от 0 до $a \cos \varphi$, поскольку, подставляя $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$ в уравнение границы области D_{xy} , мы получим:

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = a r \cos \varphi \Leftrightarrow r^2 = a r \cos \varphi \Leftrightarrow r = a \cos \varphi.$$

Тогда имеем

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

Пример 1.3. D_{xy} — треугольник, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$.



Решение.

Область D_{xy} расположена (рис.4) в первой четверти, поэтому $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; уравнение $y = 1 - x$ в полярной системе координат принимает вид

$$r \sin \varphi = 1 - r \cos \varphi,$$

Рис. 4:

т.е.

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

Таким образом

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

Пример 1.4. D_{xy} — параболический сегмент $-a \leq x \leq a$, $\frac{x^2}{a} \leq y \leq a$.

Решение.

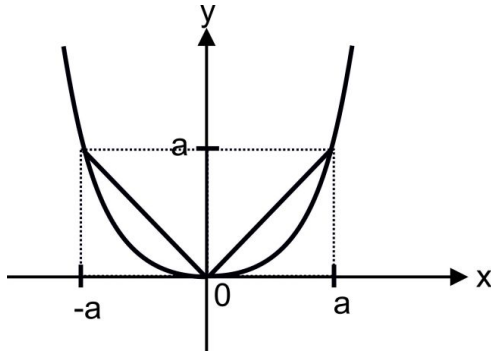


Рис. 5:

Область интегрирования (рис.5) разобьем с помощью отрезков лучей $y = x$ и $y = -x$ ($y \geq 0$) на три замкнутые области: два параболических сегмента

$$D_1 = \{0 \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq x\},$$

$$D_2 = \{-a \leq x \leq 0, \frac{x^2}{a} \leq y \leq -x\}$$

и треугольник

$$D_3 = \{-a \leq x \leq a, |x| \leq y \leq a\}.$$

В силу аддитивности двойного интеграла, имеем

$$I = \sum_{i=1}^3 \iint_{D_i} f(x, y) dx dy. \quad (3.1)$$

В D_1 φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а r меняется от 0 до $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ ($y = \frac{x^2}{a}$ при $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$). В D_2 соответственно: $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq r \leq \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, а в D_3 : $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leq r \leq \frac{a}{\sin \varphi}$.

Окончательно получаем, что

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

Перейти к полярным координатам r и φ и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

Пример 2.1.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

Решение.

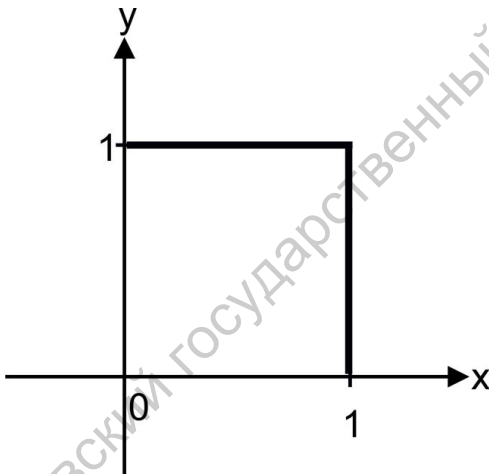


Рис. 6:

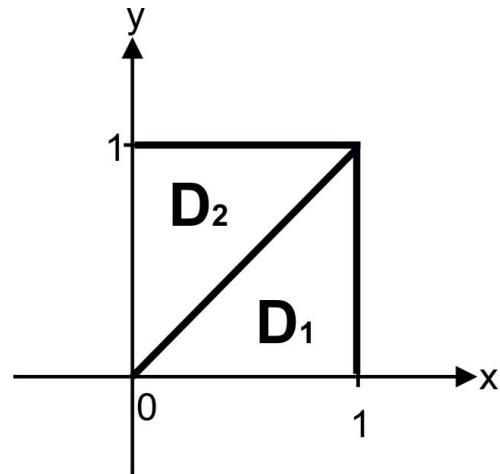


Рис. 7:

Областью интегрирования является квадрат $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (рис.6).

Разобьем его на две замкнутые области (рис.7)

$$D_1 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

$$D_2 = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

Преобразуем указанные области с помощью полярной замены переменных.

Получим соответственно

$$D_1 = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \varphi} \right\}.$$

Пользуясь свойством аддитивности интеграла получаем

$$I = \int_0^1 dx \left(\int_0^x f(x, y) dy + \int_x^1 f(x, y) dy \right)$$

и переходя к полярным координатам получаем

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

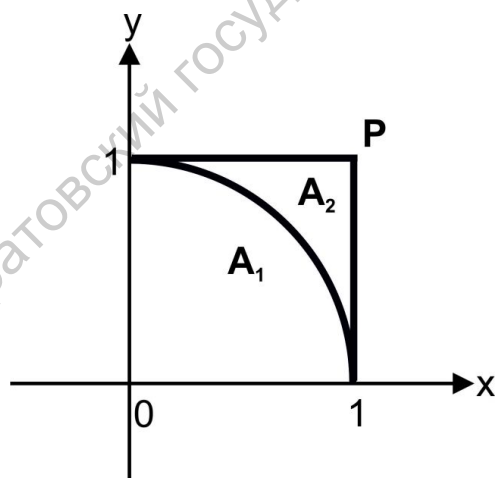


Рис. 8:

Поменяем теперь порядок интегрирования, сделав внешнее интегрирование по r , а внутреннее по φ . Для этого разобьем (рис.8) квадрат D на две замкнутые области A_1 и A_2

с общей частью границы:

$$A_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$A_2 = \{0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1\}.$$

В области A_1 и A_2 координаты r, φ меняются соответственно следующим образом:

$$A_1 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$A_2 : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \arccos \frac{1}{r} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{1}{r},$$

поскольку $OP = \sqrt{2}$. Уравнения прямых $x = 1$ и $y = 1$ соответственно становятся

$$r \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{r};$$

$$r \sin \varphi = 1 \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \varphi = \arcsin \frac{1}{r}.$$

Запишем исходный интеграл в следующем виде:

$$I = \int_0^1 dx \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy \right).$$

Перейдем к полярной системе координат r и φ , получим

$$I = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

Пример 2.2.

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

Решение

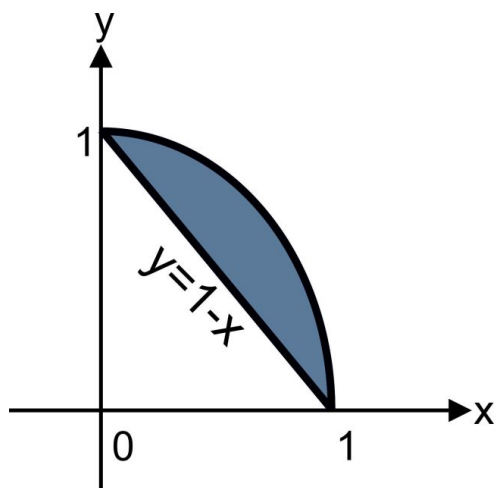


Рис. 9:

то получаем

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec}(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

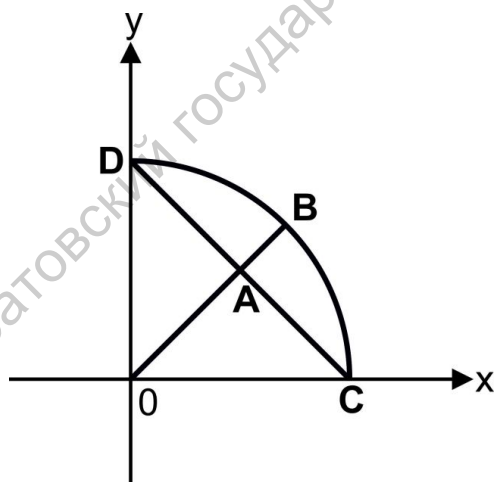


Рис. 10:

Функция f задана в круговом сегменте (рис.9). После замены переменных внешнее интегрирование проведем по φ . Поскольку область интегрирования записывается неравенствами

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} \leq r \leq 1,$$

Произведем теперь внешнее интегрирование по r (рис.10). Область интегрирования теперь записывается неравенствами

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

где $\varphi_1 = \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$.

После замены переменных получим:

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

Замечание. Рассматриваемая область была получена следующим образом.

$x^2 + y^2 = 1$ в полярной системе координат имеет вид $r = 1$, уравнение $y = 1 - x$ принимает вид

$$r \sin \varphi_1 = 1 - r \cos \varphi_1 \Rightarrow r \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow r \sqrt{2} \sin \left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \varphi_1 + \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}}.$$

Окончательно

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}.$$

$OA = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис.10), т.к. $OA = AC$, а $OC = 1$. Угол меняется от φ_1 до $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}}$.

Пример 2.3.

$$I = \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

Решение.

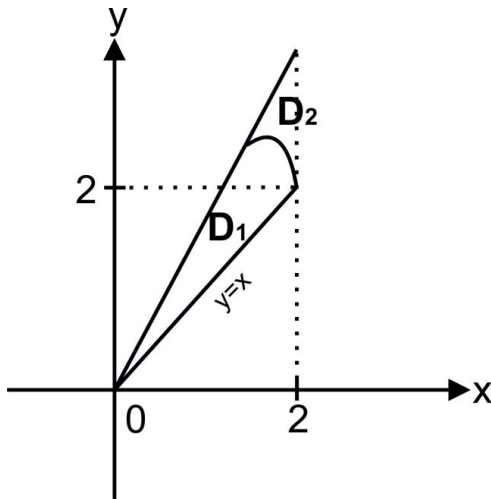


Рис. 11:

Выберем внешнее интегрирование после замены переменных по r . Для этого разобьем область интегрирования (рис.11) на две замкнутые области с общей частью границы:

$$D_1 = \{0 \leq r \leq 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}\},$$

$$D_2 = \{2\sqrt{2} \leq r \leq 2\sqrt{3}, \arccos \frac{2}{r} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}\}.$$

После замены переменных найдем:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} r f(r) dr \int_{\arccos \frac{2}{r}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi = \\ &= (\arctg \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \left(\arctg \sqrt{2} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

Выберем в качестве внешнего интегрирования интегрирование по φ . Область интегрирования после замены переменных определяется неравенствами:

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}; \quad 0 \leq r \leq \frac{2}{\cos \varphi}.$$

Тогда рассмотренный интеграл принимает вид:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} \sqrt{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} r f(r) dr.$$

Пример 2.4.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

Решение.

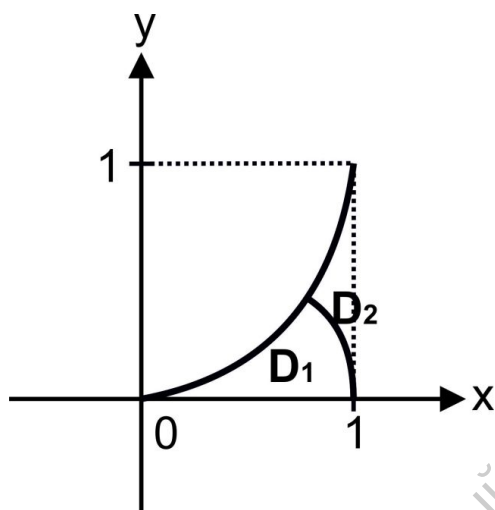


Рис. 12:

Область интегрирования $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ в полярной системе координат задается с помощью неравенств

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Тогда получаем, что

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

Чтобы расставить пределы интегрирования сначала по r , а потом по φ , разобьем с помощью дуги единичной окружности рассматриваемую область на две области D_1 и D_2 с общей частью границы (рис.12). В области D_1 r меняется от 0 до 1. Чтобы найти пределы изменения по φ , решим уравнение $r \sin \varphi = r^2 \cos^2 \varphi$ относительно φ . В области D_2 r меняется от 1 до $\sqrt{2}$, а для нахождения пределов изменения φ дополнительно надо решить уравнение

$r \cos \varphi = 1$. Решая эти уравнения, получим:

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{r}.$$

Таким образом,

$$D_1 = \left\{ 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad \arccos \frac{1}{r} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I = & \int_0^1 r \, dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, d\varphi + \\ & + \int_1^{\sqrt{2}} r \, dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

Пример 2.5.

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy,$$

где область D ограничена кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$).

Решение.

Положим $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Уравнение границы области в этом случае представляется в виде

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}; \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Проводя внешнее интегрирование по φ , имеем:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

Проводя внешнее интегрирование по r , запишем область в виде

$$0 \leq r \leq a, \quad -\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2} \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}.$$

В результате имеем:

$$I = \int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

Считая r и φ полярными координатами, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах.

Пример 2.6.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

Решение.

Функция f задана в круге

$$0 \leq r \leq a \cos \varphi, \quad (a > 0), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Запишем область интегрирования следующим образом:

$$0 \leq r \leq a, \quad -\arccos \frac{r}{a} \leq \varphi \leq \arccos \frac{r}{a}.$$

Изменяя порядок интегрирования, получим интеграл

$$I = \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi \quad (a > 0).$$

Пример 2.7. Дан интеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

Решение.

Зададим область интегрирования с помощью неравенств

$$0 \leq r \leq a, \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}.$$

Изменяя порядок интегрирования, получим следующий интеграл

$$I = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi \quad (a > 0).$$

Пример 2.8. Пусть дан интеграл

$$I = \int_0^a d\varphi \int_0^\varphi f(\varphi, r) dr \quad (0 < a < 2\pi).$$

Решение.

Поскольку $0 \leq r \leq a$, то переменная φ меняется от r до a . Поэтому после

замены порядка интегрирования получаем

$$I = \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi.$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Перейдя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными.

Пример 3.1. Дан интеграл

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$$

Решение.

Полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получаем

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r f(r) dr = 2\pi \int_0^1 r f(r) dr.$$

Пример 3.2. В области $D = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\}$ заменить двойной интеграл

$$I = \iint_D f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$$

однократным.

Решение.

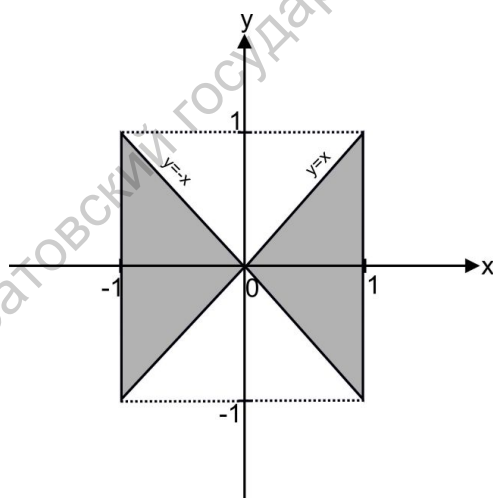


Рис. 13:

Область D (рис.13) - симметрична относительно осей координат и начала координат, поэтому рассмотрим область

$$D_1 = \{0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Подынтегральная функция является также симметричной, в силу чего

$$I = 4 \iint_{D_1} f(x^2 + y^2) dx dy.$$

Проведем внешнее интегрирование по r , поскольку внешнее интегрирование по φ не ведет к однократному интегрированию. Представим область D_1 в виде объединения двух замкнутых областей G_1 и G_2 с общей границей:

$$G_1 = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\},$$

$$G_2 = \{1 \leq r \leq \sqrt{2}, \arccos \frac{1}{r} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

В силу аддитивности интеграла относительно области интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} I &= 4 \left(\int_0^1 r f(r) dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r f(r) dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \right) = \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{4} \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr \right) = \\ &= \pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

Пример 3.3. Пусть дан

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

Решение.

Пусть $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тогда

$$I = \iint_D r f(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi dr,$$

где

$$D = \left\{ 0 \leq r \leq \cos \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Переходя от двойного интеграла к повторным, получаем:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(\operatorname{tg} \varphi) r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r dr = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg} \varphi) \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=\cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi f(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам.

Пример 4.1. а) Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D r \sin \varphi d\varphi,$$

если область

$$D = \{0 \leq r \leq a, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Решение.

Интегрируем вначале по φ , потом по r . Получим (Рис 14)

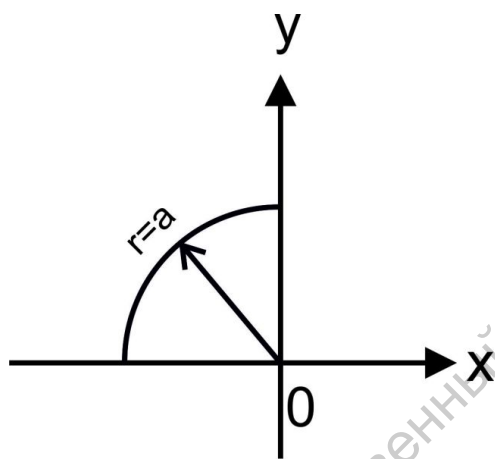


Рис. 14:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^a \sin \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

б) Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D r \sin \varphi dr,$$

если область

$$D = \{0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

— полукруг, расположенный в первой четверти.

Решение.

Проинтегрируем снова сперва по φ , потом по r (Рис 15).

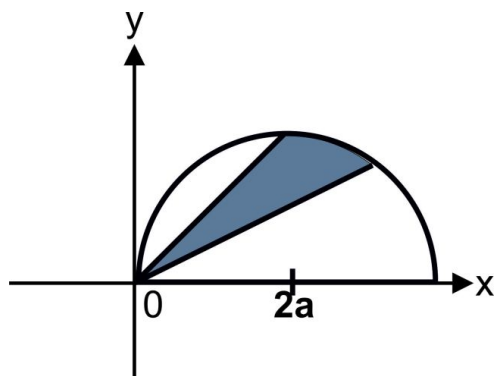


Рис. 15:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{2a \cos \varphi} \sin \varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi =$$

$$= -2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^2 d(\cos \varphi) = -\frac{2}{3} a^2 \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} a^2.$$

в) D — область заключенная между линиями $r = 2 + \cos \varphi$ и $r = 1$.

Решение.

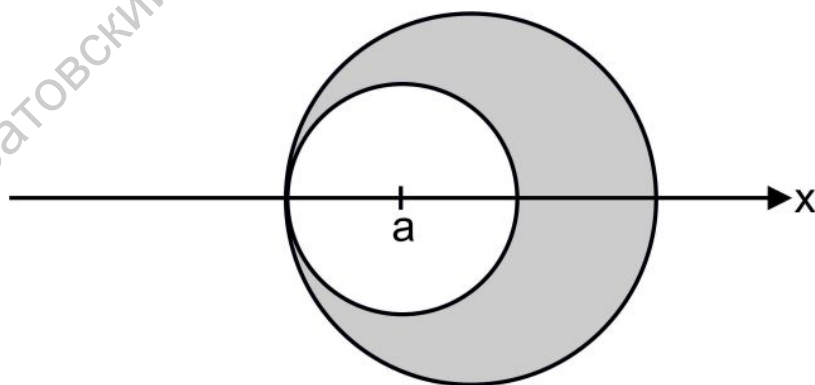


Рис. 16:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_1^{2+\cos \varphi} r \, dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_1^{2+\cos \varphi} \sin \varphi \, d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((2 + \cos \varphi)^2 - 1) \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 (3 + 4 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) = \\
 &= \frac{1}{2} (3 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi) \Big|_{2\pi}^0 = 0.
 \end{aligned}$$

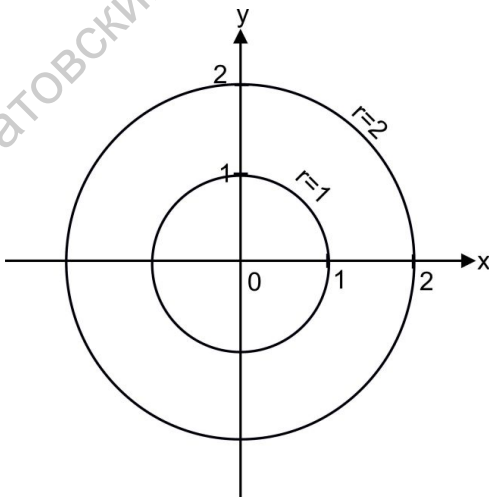
Пример 4.2. Преобразуя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

где

$$D = \{1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Решение.



Переходя к полярным координатам, получим (Рис 17):

$$I = \iint_{1 \leq r \leq 2} \frac{r \, d\varphi \, dr}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} = \iint_{1 \leq r \leq 2} d\varphi \, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 dr = 2\pi.$$

Пример 4.3. Переходя к полярным координатам, вычислить

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

если

$$D = \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Решение.

Пусть $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

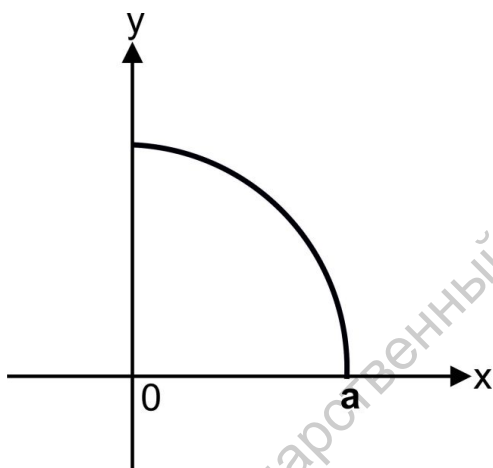


Рис. 18:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \, r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \, dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

Пример 4.4. Вычислить

$$I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy,$$

если D — кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = e^2$ и $x^2 + y^2 = e^4$.

Решение.

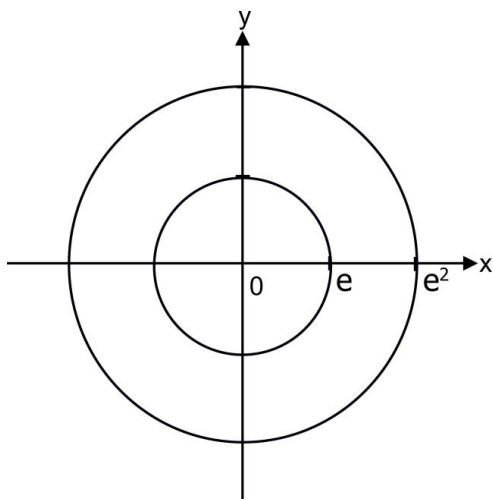


Рис. 19:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \iint_{D'} \ln(r^2) r dr d\varphi = \\ &= 2 \iint_{D'} r \ln(r) dr d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r \ln(r) dr. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последний интеграл, получаем

$$I = 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \ln(r) - \frac{1}{4} r^2 \right) \Big|_e^{e^2} d\varphi = \pi e^2 (3e^2 - 1).$$

Пример 4.5.

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Решение.

$$I = 2 \pi \int_0^a r^2 dr = \frac{2 \pi a^3}{3}.$$

Пример 4.6.

$$I = \iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \pi^2} \sin \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy.$$

Решение.

$$I = 2 \pi \int_{\pi}^{2 \pi} r \sin r dr = 2 \pi \left(r \cos r \Big|_{2 \pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{2 \pi} \cos r dr \right) = -6 \pi^2.$$

Рассмотрим системы координат, отличные от полярной. Изучим замены переменных, целесообразные в тех или иных случаях решения задач.

Пример 5.1. Вычислить

$$I = \iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy,$$

если область D — квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$.

Решение. Положим $x+y=u$, $x-y=v$, откуда $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$

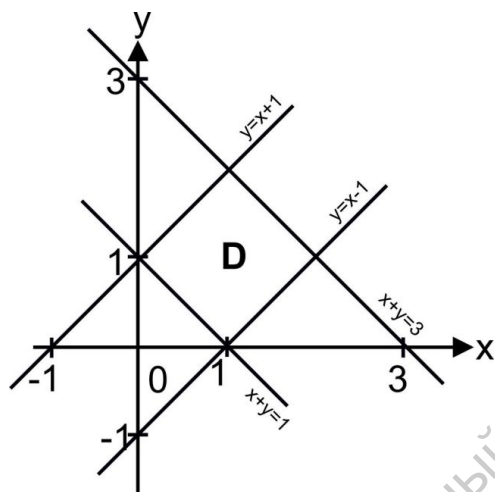


Рис. 20:

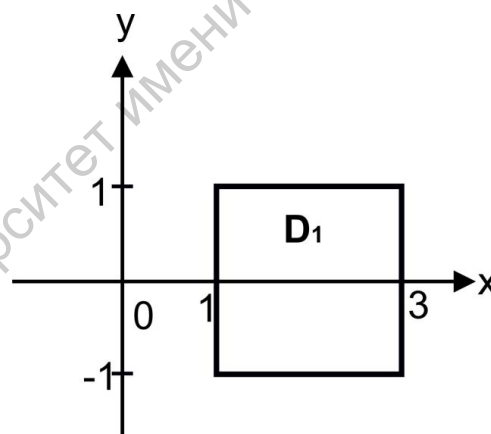


Рис. 21:

. Вычислим Якобиан преобразования (рис.20)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

т.е.

$$|J| = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_1} u^3 v^2 du dv.$$

Область D_1 — также квадрат (рис.21), то

$$\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 du \int_{-1}^1 v^2 dv = \frac{20}{3}.$$

Пример 5.2. Осуществить замену переменных x, y переменными u, v , если $x = u \cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$, в двойном интеграле

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

где D — область интегрирования, ограниченная кривыми $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$.

Решение.

Вычислим Якобиан введенного преобразования:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u \cos^3 v \sin v \\ \sin^4 v & 4u \sin^3 v \cos v \end{vmatrix} = 4u \sin^3 v \cos^3 v.$$

Тогда

$$I = 4 \iint_{D_1} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) |u| |\sin^3 v \cdot \cos^3 v| du dv,$$

где D_1 — замкнутая область в плоскости (u, v) , возникающая после преобразования $x = u \cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$.

Найдем пределы изменения u и v . Кривая $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ переходит в отрезок прямой $u = a$. Если $(0, y)$ — любая точка, принадлежащая отрезку $x = 0$, $0 \leq y \leq a$, то, очевидно, $v = \frac{\pi}{2}$; если $(x, 0)$ лежит на отрезке $y = 0$, $0 \leq x \leq a$, то $v = 0$. Началу координат и плоскости (x, y) соответствует множество точек $u = 0$. В результате, переходя к повторному интегралу, мы получаем:

$$I = 4 \int_0^a u \, du \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) \sin^3 v \cos^3 v \, dv.$$

Пример 5.3. Сделать замену переменных в интеграле:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax + by + c) \, dx \, dy,$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение.

Произведем замену переменных в интеграле:

$$x = \frac{a u}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b v}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad y = \frac{b u}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a v}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

Якобиан

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1,$$

$ax + by + c = \sqrt{a^2 + b^2} u + c, u^2 + v^2 \leq 1$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(\sqrt{a^2 + b^2} u + c) \, du \, dv = \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2 + b^2} u + c) \, dv = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2 + b^2} u + c) \, du. \end{aligned}$$

Пример 5.4. Интеграл

$$I = \iint_D f(xy) \, dx \, dy,$$

где D ограничена кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ ($x > 0$, $y > 0$), преобразовать с помощью соответствующей замены переменных к одномерному интегралу.

Решение.

Произведем замену переменных:

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Очевидно, что $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 4$, $x = u^{1/2} v^{-1/2}$, $y = u^{1/2} v^{1/2}$,

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{-1/2} & -\frac{1}{2} u^{1/2} v^{-3/2} \\ \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{1/2} & \frac{1}{2} u^{1/2} v^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

$$J = \iint_{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4} f(u) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{dv}{v} \int_1^2 f(u) du = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

Замечание.

Значение якобиана можно было бы вычислить, используя его замечательное свойство:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}}.$$

Пример 5.5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_{x^4 + y^4 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Решение.

Воспользовавшись полярной системой координат найдем уравнение границы рассматриваемой области:

$$r^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = 1,$$

следовательно,

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Заменяя двойной интеграл повторным, получим:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} r^3 dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}.$$

Вводя замену переменных $t = \operatorname{tg} \varphi$, получаем:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn}(t) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Пример 5.6.

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$$

Решение.

Снимая знак модуля на интегрируемой функции, мы приходим к следующему интегралу:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy + 2 \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{x+y}{\sqrt{2}}} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) dx dy.$$

Сделаем замену переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$; получаем:

$$x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = r \cos \varphi, \quad y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = r \sin \varphi$$

и

$$\begin{aligned} I &= \iint_{r^2 \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left(r^2 - \frac{r}{\sqrt{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \right) r \, dr \, d\varphi + \\ &+ 2 \iint_{r^2 \leq \frac{1}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left(\frac{1}{4} - r^2 \right) r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^3 - \frac{r^2}{\sqrt{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \right) dr + \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{4} - r^3 \right) dr = \frac{\pi}{2} + 4\pi \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64} \right) = \frac{9\pi}{16}. \end{aligned}$$

4 Геометрические приложения двойных интегралов

Начнем изложение с примеров на вычисление площадей плоских криволинейных областей.

Пример 6.1. Найти площадь области, ограниченной линией:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy.$$

Решение.

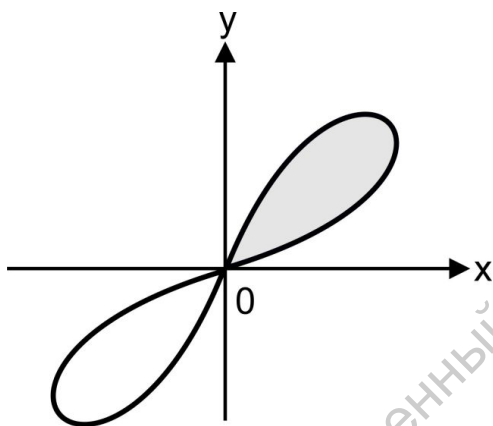


Рис. 22:

Для простоты вычисления следует перейти к полярным координатам.

Полагая в данном уравнении $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, после упрощения получим уравнение этой кривой (рис. 22)

$$r^2 = a^2 \sin 2\varphi.$$

Эта кривая симметрична относительно полюса. При изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ текущая точка (φ, r) опишет половину кривой, расположенной выше полярной оси. В результате имеем:

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Пример 6.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией:

$$x^3 + y^3 = axy.$$

Решение.

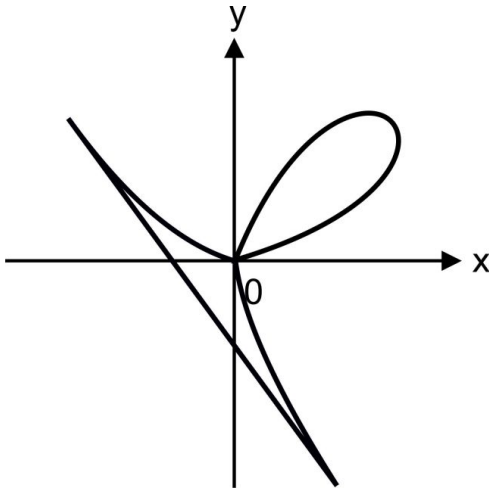


Рис. 23:

На рис.23 изображена фигура, площадь которой мы вычисляем. Перейдем к полярным координатам. В полярной системе координат уравнение имеет вид:

$$r^3 (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) = a r^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

т.е.

$$r = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}.$$

Осью симметрии петли является луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_D r dr d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \cos^4 \varphi}{\cos^6 \varphi (1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d\varphi = \frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 \varphi d(\operatorname{tg} \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \\ &= -\frac{a^2}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{6}. \end{aligned}$$

Пример 6.3.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (x^2 + y^2 \geq a^2, a \geq 0).$$

Решение.

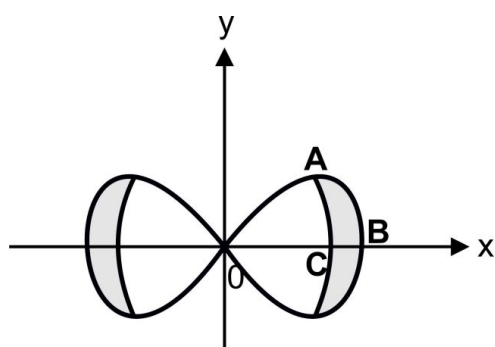


Рис. 24:

В полярной системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ уравнения границы области примут вид: $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ и $r^2 = a^2$. Область ограничена лемниской Бернулли $r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$ и частью окружности $r = a$ (рис. 24). Для нахождения искомой площади достаточно вычислить площадь криволинейного треугольника

ABC , а затем ее увеличить в 4-ре раза. Координаты точки $A(\frac{\pi}{6}, a)$ и поэтому криволинейный $\triangle ABC$ определяется уравнениями $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, $a \leq r \leq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} r dr = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi = \\ &= 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \end{aligned}$$

Пример 6.4.

$$(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Решение.

Из постановки задачи следует, что искомая область лежит в первом квадранте. Переходя к полярным координатам, находим, что:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}}} r \, dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2 + 2(1 - \sin \varphi \cos \varphi)}{(\sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi \cos \varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin \varphi - \cos \varphi)}{1 + (\sin \varphi - \cos \varphi)^2} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \\ &= \left(\frac{2}{3} \operatorname{arctg}(\sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

то

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

В результате имеем:

$$S = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Пример 6.5.

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= 8a^2xy; \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ (a > 0, (x-a)^2 + (y-a)^2 &\leq a^2). \end{aligned}$$

Решение.

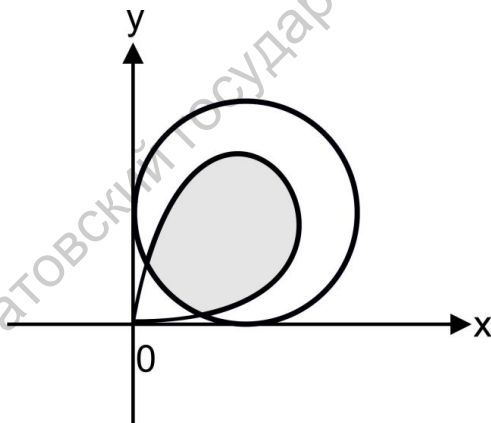


Рис. 25:

Множество точек, ограниченное окружностью $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, лежит в первом квадранте, а множество точек, ограниченное кривой $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$, лежит в первом и третьем. Введем полярные координаты. Фигура симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, поэтому достаточно вычислить площадь S_1 обла-

СТИ:

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad a \left((\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{\sin 2 \varphi} \right) \leq r \leq 2 a \sqrt{\sin 2 \varphi}$$

и взять $2S_1$.

$$\begin{aligned} S &= 2S_1 = 2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{a((\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{\sin 2 \varphi})}^{2 a \sqrt{\sin 2 \varphi}} r dr = \\ &= a^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \sin 2 \varphi + 2 (\sin \varphi + \cos \varphi) \sqrt{\sin 2 \varphi} - 1 \right) d\varphi = \\ &= a^2 \left(\cos \left(\arcsin \frac{1}{8} \right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin 2 \varphi} d\varphi \right) = \\ &= a^2 \left(\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} + 2\sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin 2 \varphi} d\varphi \right). \end{aligned}$$

Вычислим отдельно интеграл:

$$I = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\sin 2 \varphi} d\varphi.$$

Положим $\varphi + \frac{\pi}{4} = y$. Тогда

$$I = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \sqrt{-\cos 2y} dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{8})} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \cos y)^2} d(\sqrt{2} \cos y).$$

Положим теперь $\sqrt{2} \cos y = t$, получим

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \sqrt{1 - t^2} dt$$

и, наконец, положив $t = \sin \sigma$, получим

$$I = \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \cos^2 \sigma d\sigma = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8} \right).$$

В результате

$$S = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right).$$

Обозначим

$$\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Окончательно имеем:

$$S = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right).$$

Особое внимание следует уделить решению следующих задач, в которых приводится применение обобщенной полярной системы координат r и φ по формулам $x = ar \cos^\alpha \varphi$, $y = br \sin^\alpha \varphi$ ($r \geq 0$), где a и b , а также α - постоянные, которые каждый раз следует подбирать специально. Нетрудно

понять, что

$$I = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha a b r \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi.$$

Пример 6.6.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой. Все параметры считаются положительными.

Решение.

Выделим в уравнении границы области полные квадраты по x и y .

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{b}{2k}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}.$$

Введем обобщенные полярные координаты по формулам

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} = r \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} - \frac{b}{2k} = r \sin \varphi.$$

Поскольку

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = a b r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}},$$

то получим

$$S = a b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}}} r dr = \frac{\pi a b}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).$$

Пример 6.7.

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Решение.

Введем обобщенные полярные координаты $x = a r \cos^{\frac{2}{3}} \varphi$, $y = b r \sin^{\frac{2}{3}} \varphi$.

Тогда уравнение кривой:

$$r = \frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Якобиан преобразования

$$J = \frac{2}{3} a b r \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi.$$

В результате

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi d\varphi \int_0^{\frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi} r dr = \\ &= \frac{a b}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi \right)^2 d\varphi = \\ &= \frac{a b}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \frac{b^4}{k^4} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi + \frac{2 a^2 b^2}{h^2 k^2} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{a b}{3} \left(\frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \frac{b^4}{k^4} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \right) d\varphi \right). \end{aligned}$$

Если сделать подстановку $\frac{\pi}{2} - \varphi = t$, то можно доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi d\varphi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \frac{b^4}{k^4} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \right) d\varphi = \\ &= \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(5/3)}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Более подробно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^m x dx = \frac{1}{2} B \left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2} \right),$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. Окончательно получим:

$$S = \frac{a b}{3} \left(\frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \right).$$

Пример 6.8.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}, \quad (x > 0, y > 0).$$

Решение.

Введем замену переменных $x = a r \cos^2 \varphi$, $y = b r \sin^2 \varphi$. Уравнение кривой в этом случае станет таким:

$$r = \sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = 2 a b r \cos \varphi \sin \varphi.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} S &= 2 a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}} r dr = \\ &= a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 \cos^5 \varphi \sin \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^5 \varphi \cos \varphi}{k^2} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a b}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^6 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a b}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Пример 6.9.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}, \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Решение.

Пусть $x = a r \cos^2 \varphi$, $y = b r \sin^2 \varphi$. В этом случае уравнение границы

имеет вид:

$$r = \sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}.$$

Определим пределы изменения φ из условия, что

$$\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2} \geq 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\operatorname{tg}^4 \varphi \leq \frac{a^2 k^2}{b^2 h^2} \quad \text{или} \quad |\operatorname{tg} \varphi| \leq \sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

Из условия задачи $x \geq 0$, $y \geq 0$ окончательно для φ получаем:

$$0 \leq \operatorname{tg} \varphi \leq \sqrt{\frac{ak}{bh}},$$

следовательно,

$$0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
S &= 2ab \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}} r dr = \\
&= ab \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^5 \varphi \sin \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^5 \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^6 \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \varphi \right) \Big|_{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}}^0 = \\
&= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \left(1 - \cos^6 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}} \right) \right) - \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$, а $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$, то

$$S = \frac{a^4 b k (a k + 2 b h)}{6 h^2 (a k + b h)^2}.$$

Пример 6.10.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}.$$

Решение.

Пусть $x = a r \cos \varphi$, $y = b r \sin \varphi$. Уравнение кривой имеет вид:

$$r = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{c^4 (\sin \varphi + \cos \varphi)^5}.$$

Это представление показывает, что кривая пересекает себя в начале координат, поэтому вычисляемая площадь ограничена кривой, целиком лежащей в первом квадранте. В силу этих замечаний в интеграле

$$S = \iint_D dx dy$$

следует произвести замену $x = a r \cos^2 \varphi$, $y = b r \sin^2 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Подобная замена была проведена в задачах 6.7 и 6.8. В результате можем записать сразу:

$$\begin{aligned} S &= 2 a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{a^2 b^2 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi}{c^4}} r dr = \\ &= \frac{(a b)^5}{c^8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 \varphi \cos^9 \varphi d\varphi = \frac{(a b)^5}{2 c^8} B(5, 5) = \\ &= \frac{(a b)^5}{2 c^8} \frac{\Gamma^2(5)}{\Gamma(10)} = \frac{(a b)^5}{1260 c^8}. \end{aligned}$$

Пример 6.11.

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1; \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Решение.

Из постановки задачи следует, что область, площадь которой требуется

вычислить, ограничена кривой

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$$

и отрезками

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Сделаем замену $x = a r \cos^8 \varphi$, $y = b r \sin^8 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. При этом

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = 8 a b r \sin^7 \varphi \cos^7 \varphi.$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} S &= 8 a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \varphi \cos^7 \varphi d\varphi \int_0^1 r dr = 4 a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \varphi \cos^7 \varphi d\varphi = \\ &= 2 a b B(4, 4) = \frac{2 a b \Gamma^2(4)}{\Gamma(8)} = \frac{a b}{70}. \end{aligned}$$

Пример 6.12.

$$x^2 = a y, \quad x^2 = b y, \quad x^3 = c y^2, \quad x^3 = d y^2 \quad (0 < a < b, \quad 0 < c < d).$$

Решение.

Введем замену переменных

$$\frac{x^2}{y} = u, \quad \frac{x^3}{y^2} = v,$$

которая криволинейный четырехугольник отображает в прямоугольник

$$a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d,$$

а переменные x и y выражаются формулами:

$$x = \frac{u^2}{v}, \quad y = \frac{u^3}{v^{-2}}.$$

Отсюда

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{u^4}{v^4}.$$

В результате

$$S = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv = \frac{1}{15} (b^5 - a^5) \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3} \right).$$

Пример 6.13.

$$y = a x^p, \quad y = b x^p, \quad y = c x^q, \quad y = d x^q \quad (0 < p < q, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d).$$

Решение.

В результате замены переменных

$$u = \frac{y}{x^p}, \quad v = \frac{y}{x^q},$$

отображающей криволинейный замкнутый четырехугольник в прямоугольник

$$a \leq u \leq b, \quad d^{-1/q} \leq v \leq c^{-1/q},$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -\frac{q}{q-p} u^{\frac{p+1}{q-p}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \frac{q}{q-p} \int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}} du \int_{d^{-1/q}}^{c^{-1/q}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}} dv = \frac{q-p}{(p+1)(q+1)} u^{\frac{q+1}{q-p}} v^{\frac{q(p+1)}{q-p}} \Big|_a^b \Big|_{d^{-1/q}}^{c^{-1/q}} = \\ &= \frac{q-p}{(p+1)(q+1)} \left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}} \right) \left(c^{\frac{p+1}{q-p}} - d^{\frac{p+1}{q-p}} \right). \end{aligned}$$

Пример 6.14.

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 4 \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Решение.

Обозначим

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \quad \frac{y}{b} = v \frac{x}{a}.$$

Такая замена приводит к интегралу

$$S = 2ab \int_1^2 u^3 du \int_1^4 \frac{dv}{(1 + \sqrt{v})^4} = \frac{15}{2} ab \int_1^4 \frac{dv}{(1 + \sqrt{v})^4}.$$

Положив в нем $\sqrt{v} = t$, получим

$$\begin{aligned} S &= 15ab \int_1^2 \frac{t dt}{(1+t)^4} = 15ab \int_1^2 \left(\frac{1}{(1+t)^3} - \frac{1}{(1+t)^4} \right) dt = \\ &= 15ab \left(\frac{1}{2(1+t)^2} - \frac{1}{3(1+t)^3} \right) \Big|_1^2 = \frac{65ab}{108}. \end{aligned}$$

Пример 6.15.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 4,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0, y > 0).$$

Решение.

Следуя предыдущему примеру, вводим замену переменных

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}, \quad \frac{y}{b} = v \frac{x}{a}.$$

Вычислив Якобиан преобразования, получаем:

$$S = \frac{3ab}{2} \int_1^4 u^2 du \int_1^8 \frac{dv}{(1 + v^{2/3})^3} = \frac{63}{2} ab \int_1^8 \frac{dv}{(1 + v^{2/3})^3}.$$

Заменяя в интеграле $\sqrt[3]{v} = y$, получаем

$$S = \frac{189}{2} a b \int_1^2 \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^3} = \frac{189}{8} a b \left(\frac{y}{(1+y^2)^2} \Big|_2^1 + \int_1^2 \frac{dy}{(1+y^2)^2} \right) =$$

$$= \frac{189}{8} a b \left(0,17 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t \right) \Big|_1^2 \right) = \frac{189}{16} a b \left(\frac{6}{25} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right).$$

Пример 6.16*. Найти площадь области, ограниченной эллипсами

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_1} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_1} = c^2, \quad \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_2} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_2} = c^2$$

и гиперболами

$$\frac{x^2}{\cos^2 v_1} - \frac{y^2}{\sin^2 v_1} = c^2, \quad \frac{x^2}{\cos^2 v_2} - \frac{y^2}{\sin^2 v_2} = c^2,$$

$$(0 < u_1 < u_2, \quad 0 < v_1 < v_2, \quad x > 0, \quad y > 0).$$

Решение.

Введем замену переменных:

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v,$$

которая приведет к интегралу

$$S = \iint_{u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv,$$

где

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = c^2 (\operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v) = \frac{c^2}{2} (\operatorname{ch} 2u - \cos 2v).$$

Таким образом находим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^2}{2} \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} (\operatorname{ch} 2u - \cos 2v) dv = \\ &= \frac{c^2}{2} \int_{u_1}^{u_2} \left((v_2 - v_1) \operatorname{ch} 2u - \frac{1}{2} (\sin 2v_2 - \sin 2v_1) \right) du = \\ &= \frac{c^2}{4} \left((v_2 - v_1) (\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - (u_2 - u_1) (\sin 2v_2 - \sin 2v_1) \right). \end{aligned}$$

Пример 6.17. Найти площадь области D , ограниченной эллипсом

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

где

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Решение.

Введем замену переменных

$$u = a_1x + b_1y + c_1, \quad v = a_2x + b_2y + c_2.$$

В результате замены область станет:

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Используя свойство Якобиана

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{|\Delta|}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{|\Delta|} \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv = \frac{\pi}{|\Delta|}.$$

Если цилиндрический брус ограничен сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу — $z = 0$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz . Если эта поверхность вырезает на плоскости xOy замкнутую область D , то объем бруса вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Пример 7.1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad y = x, \quad y = x\sqrt{3}, \quad z = 0$$

и расположенного в I -ом октанте.

Решение.

Тело ограничено сверху параболоидом $z = 1 - x^2 - y^2$. Область, по которой ведется интегрирование, это круговой сектор, ограниченный дугой $x^2 + y^2 = 1$, которая является линией пересечения параболоида с плоскостью $z = 0$ и прямыми $y = x$ и $y = x\sqrt{3}$.

Объем можно вычислить по формуле

$$V = \iint_{\Omega} (1 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим

$$V = \iint_{\Omega} (1 - r^2) r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 (r - r^3) dr.$$

Пределы интегрирования по φ найдены из уравнений прямых: $y = x$ — здесь угловой коэффициент $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = 1$, т.е. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $y = x\sqrt{3}$ — здесь $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом, имеем

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{48}.$$

Пример 7.2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z^2 = xy, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Решение.

Сверху и снизу тело ограничено конической поверхностью $z^2 = xy$. С боков ограничено цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$. Поскольку тело симметрично относительно плоскостей $z = 0$ и $x + y = 0$, можем вычислить четверть объема V , а затем умножить его на 4. Очевидно, что в этом случае область интегрирования — четверть круга, ограниченная отрезками осей координат и дугой окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Таким образом, имеем:

$$V = 4 \iint_D \sqrt{xy} \, dx \, dy.$$

Перейдем к полярным координатам, получим:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1/2} \varphi \cos^{1/2} \varphi \, d\varphi \int_0^a r^2 \, dr = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1/2} \varphi \cos^{1/2} \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} a^3 B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2 a^3 \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{3 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4 a^3 \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{3 \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Пример 7.3.

$$z = x + y, \quad (x^2 + y^2)^2 = 2xy, \quad z = 0 \quad (x > 0, y > 0).$$

Решение.

Тело ограничено сверху плоскостью $z = x + y$, снизу — $z = 0$, с боков цилиндрической поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ ($x > 0, y > 0$).

Переходя к полярным координатам в интеграле

$$V = \iint_{\Omega} (x + y) \, dx \, dy$$

получим, что область интегрирования Ω ограничена кривой $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$). В итоге

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \, d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 \, dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} 2\varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - (\sin \varphi - \cos \varphi)^2\right)^{3/2} d(\sin \varphi - \cos \varphi) = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{3/2} dz = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - z^2)^{3/2} dz. \end{aligned}$$

Полагая, наконец, $z = \sin t$, получим:

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{2}{3} \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Пример 7.4.

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Решение.

Тело ограничено сверху параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, снизу — $z = 0$, с внешней стороны — цилиндрической поверхностью $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, а внутри — цилиндрической поверхностью $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Эти цилиндры вырезают на плоскости Oxy замкнутую область Ω , имеющую в полярной системе координат:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi \leq r \leq 2 \cos \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r^3 \, dr = \\ &= \frac{15}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{45}{32} \pi. \end{aligned}$$

Пример 7.5.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 \geq a|x| \quad (a > 0).$$

Решение.

Нетрудно понять, что тело, объем которого требуется найти, получается из замкнутого шара удалением из него множества точек

$$M = \left\{ x^2 + y^2 \leq a|x|, \quad -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Тело симметрично относительно координатных плоскостей, поэтому вычислим $\frac{1}{8}$ объема и затем вычисленный объем умножим на 8.

Область интегрирования определяется неравенствами:

$$0 \leq x \leq a, \quad \sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}.$$

В интеграле

$$V = 8 \iint_{\Omega} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

перейдем к полярным координатам:

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_a^{a \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi = \frac{16}{9} a^3.$$

Пример 7.6.

$$x^2 + y^2 - az = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), \quad z = 0 \quad (a > 0).$$

Решение.

Тело ограничено сверху параболоидом $z = \frac{x^2+y^2}{a}$, снизу — плоскостью Oxy , с боков — цилиндрической поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$, которая вырезает в плоскости Oxy область, ограниченную лемнискатой Бернулли. Область симметрична относительно осей координат Ox , Oy и плоскостей Oxz , Oyz . Перейдем к полярным координатам в интеграле:

$$V = \frac{1}{a} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy,$$

получим:

$$V = \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^2 \, dr = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}.$$

Пример 7.7.

$$z = x^2 + y^2, \quad z = x + y.$$

Решение.

Нетрудно понять, что параболоид вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскость $z = x + y$ пересекаются по кривой, уравнение которой при проекции на плоскость Oxy имеет вид

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$V = \iint_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} (x + y - x^2 - y^2) dx dy.$$

Введем полярную систему координат

$$x - \frac{1}{2} = r \cos \varphi, \quad y - \frac{1}{2} = r \sin \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \iint_{0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi} r \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{r}{2} - r^3 \right) dr = \frac{\pi}{2} (r^2 - r^4) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Пример 7.8.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \end{cases} \quad (z > 0)$$

Решение.

Тело ограничено частью конической поверхности и частью эллипсоида. Их линия пересечения в проекции на плоскость Oxy имеет следующее уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

Пусть

$$z_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$z_2 = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Тогда искомый объем может быть вычислен с помощью интеграла

$$V = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{1}{2}} (z_1 - z_2) dx dy.$$

Положим $x = a r \cos \varphi$, $y = b r \sin \varphi$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} V &= a b c \iint_{0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left(\sqrt{1 - r^2} - r \right) r dr = a b c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(r \sqrt{1 - r^2} - r^2 \right) dr = \\ &= \frac{2}{3} \pi a b c \left((1 - r^2)^{3/2} + r^3 \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 = \frac{\pi}{3} a b c (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Пример 7.9.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Решение.

Тело ограничено куском поверхности $z = c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2}$ и координатными плоскостями. Оно лежит в I -ом октанте. Линия пересечения проецируется

на плоскость Oxy в замкнутый треугольник:

$$\Omega = \left\{ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\}.$$

Рассмотрим интеграл

$$V = c \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2} dx dy.$$

Введем замену переменных $x = a r \cos^2 \varphi$, $y = b r \sin^2 \varphi$. Поскольку $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = 2 a b r \sin \varphi \cos \varphi$, а пределы интегрирования:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Получим

$$V = 2 a b c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{a b c}{3} (1 - r^2)^{3/2} \Big|_1^0 = \frac{a b c}{3}.$$

Пример 7.10.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Решение.

Тело ограничено частью поверхности эллипсоида и частью цилиндра, который на плоскости Oxy вырезает область, ограниченную замкнутой кривой:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad z = 0.$$

Область симметрична относительно координатных плоскостей, осей Ox и

0y. Пусть $D = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ Поэтому объем тела вычислим по формуле

$$V = 8c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Пусть $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} V &= 8abc \iint_{0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}} r \sqrt{1 - r^2} dr d\varphi = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r \sqrt{1 - r^2} dr = \\ &= \frac{8}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 - r^2)^{3/2} \Big|_{\sqrt{\cos 2\varphi}}^0 \right) d\varphi = \frac{8}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sqrt{2} \sin^3 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} abc \left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \varphi - 1) d(\cos \varphi) \right) = \\ &= \frac{8}{3} abc \left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \left(\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{2}{9} abc (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Рассмотрим другие замены переменных.

Пример 7.11.

$$z = x^2 + y^2, \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x, \quad z = 0.$$

Решение.

Сверху тело ограничено параболоидом $z = x^2 + y^2$, снизу — плоскостью Oxy , с боков — цилиндрическими поверхностями $xy = a^2$, $xy = 2a^2$ и плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$. Тело симметрично относительно плоскости $x + y = 0$. Рассмотрим поэтому одну его половину, лежащую в первом октанте. Проекция рассматриваемой области на Oxy — криволинейный четырехугольник, который ограничен частями кривых

$$xy = a^2, \quad xy = 2a^2$$

и отрезками кривых

$$y = \frac{x}{2}, \quad y = 2x \quad (z = 0).$$

Введем замену переменных

$$xy = u, \quad \frac{y}{x} = v.$$

Криволинейный треугольник с помощью этой замены переходит в прямоугольник:

$$a^2 \leq u \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 2, \quad \text{Якобиан } J = \frac{1}{2v}.$$

Тогда

$$V = 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{a^2}^{2a^2} u du \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) dv = \frac{9}{2} a^2.$$

Пример 7.12.

$$z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Решение.

Сверху тело ограничивает гиперболический параболоид $z = xy$, снизу — плоскость Oxy . Тело проецируется на эту плоскость в криволинейный четырехугольник. Пусть

$$\frac{x^2}{y} = u, \quad \frac{y^2}{x} = v.$$

Вычислив Якобиан, получаем

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$V = \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \frac{1}{3} \int_1^2 u \, du \int_1^2 v \, dv = \frac{3}{4}.$$

Пример 7.13.

$$z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, \quad z = 0, \quad xy = a^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < \alpha < \beta, \quad x > 0).$$

Решение.

Плоскость OXY пересекает поверхность $z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}$ по кривой $xy = a^2$; объем, который мы вычисляем, проецируется на плоскость OXY в криволинейный треугольник, ограниченный отрезками лучей $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($x > 0$) и частью кривой $xy = a^2$. Тогда

$$V = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} \, dx \, dy.$$

Перейдем к полярным координатам, получим:

$$\begin{aligned}
V &= c \int_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}} r \sin \frac{\pi r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a^2} dr = \\
&= \frac{a^2 c}{2\pi} \int_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} \left(\cos \frac{\pi r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a^2} \Big|_{r=\frac{a}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}}^0 \right) \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \\
&= \frac{a^2 c}{\pi} \int_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} \frac{d(2\varphi)}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln |\operatorname{tg} \varphi| \Big|_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Пример 7.14.

$$z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y \geq 0.$$

Решение.

Так как $y \geq 0$, то $x > 0$. Это означает, что сверху тело ограничено поверхностью $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, снизу — плоскостью OXY . С боков тело ограничивает поверхность $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, которая является цилиндром. Цилиндрическая поверхность пересекается плоскостью OXY по части кривой: $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, что в полярной системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ имеет вид: $r = a \varphi$ — это спираль Архимеда. Поэтому пределы изменения внутри области интегрирования будут такими:

$$0 \leq r \leq a \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

В результате мы имеем:

$$V = c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi \int_0^{a\varphi} r dr = \frac{a^2 c}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{a^2 c \pi^4}{128}.$$

Пример 7.15.

$$z = y e^{-\frac{xy}{a^2}}, \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = m, \quad y = n, \quad z = 0, \quad 0 < m < n$$

Решение.

Область интегрирования Ω в плоскости OXY ограничена отрезками прямых $y = m$, $y = n$ и частями кривых $xy = a^2$, $xy = 2a^2$. Введем замену переменных по формулам:

$$xy = u, \quad y = v.$$

Тогда получим:

$$V = \int_{a^2}^{2a^2} e^{-\frac{u}{a^2}} du \int_m^n dv = (n - m) a^2 e^{-\frac{u}{a^2}} \Big|_{2a^2}^{a^2} = a^2 (n - m) \left(\frac{e - 1}{e^2} \right).$$

Пример 7.16.

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (n > 0).$$

Решение.

Часть поверхности $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, лежащая в первом октанте, ограничивает рассматриваемое тело. Оно ограничено также и частями координатных

плоскостей. Тело проецируется на плоскость OXY в замкнутую область:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}}.$$

В декартовой системе координат объем вычисляется по формуле:

$$V = c \iint_{\substack{0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}}}} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} dx dy.$$

Рассмотрим обобщенную полярную систему координат:

$$x = a r \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, \quad y = b r \sin^{\frac{2}{n}} \varphi,$$

тогда якобиан

$$J = \frac{2}{n} a b r \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{n} a b c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 r \sqrt[n]{1 - r^n} dr = \\ &= \frac{1}{n} a b c B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a b c}{3 n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Пример 7.17.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (n > 0, m > 0).$$

Решение.

Части координатных плоскостей вместе с поверхностью $z = c \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}$ ограничивают тело. Поскольку

$$V = c \iint_{\substack{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n} dx dy,$$

то вводя обобщенную полярную систему координат по формулам: $x = a r \cos^2 \varphi$, $y = b r \sin^2 \varphi$, получим

$$\begin{aligned} V &= 2 a b c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r \sqrt[n]{1 - r^n} dr = a b c \int_0^1 r \sqrt[n]{1 - r^n} dr = \\ &= \frac{a b c}{n} B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{a b c}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{m}\right)} = \frac{a b c}{2 m + n} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{m}\right)}. \end{aligned}$$

5 Вычисление площади поверхности

1. Если гладкая однозначная поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то площадь поверхности выражается формулой

$$S = \iint_{\Omega_z} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где Ω_z — проекция данной поверхности на плоскость OXY . Так же, если $x = f(y, z)$ или $y = f(x, z)$, где $(y, z) \in \Omega_x$ ($(x, z) \in \Omega_y$), Ω_x — проекция поверхности на плоскость OYZ , а Ω_y — проекция поверхности на плоскость OXZ , тогда

$$S = \iint_{\Omega_x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz,$$

$$S = \iint_{\Omega_y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz.$$

2. Если уравнение поверхности или ее куска задано параметрически:

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in T,$$

где T — ограниченная замкнутая измеримая область, а функции x, y, z — непрерывно дифференцируемы в T , тогда

$$S = \iint_T \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где E, G, F — гауссовы коэффициенты данной поверхности:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Пример 8.1. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ay$.

Решение.

Поскольку уравнение сферы для I -ого октанта $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, то

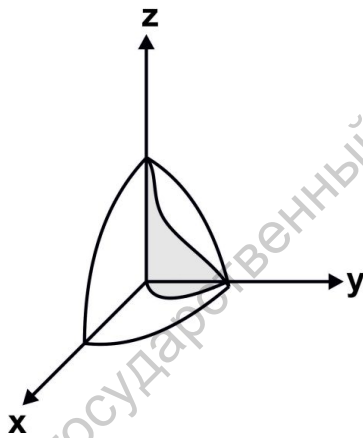


Рис. 26:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Проекцией поверхности на плоскость OXY будет кривая $x^2 + y^2 = ay$,

ограниченная осью OY . Этот полукруг является областью интегрирования Ω (рис. 26). Поверхность расположена в четырех октантах, а потому искомая площадь

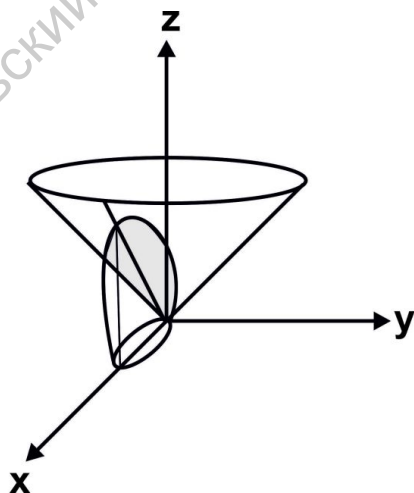
$$S = 4a \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Пусть $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тогда уравнение окружности примет вид:
 $r = a \sin \varphi$.

$$\begin{aligned} S &= 4a \iint_{\Omega} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \\ &= -4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a \sin \varphi} d\varphi = -4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi - 1) d\varphi = \\ &= -4a^2 (\sin \varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Пример 8.2. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$ (рис. 27).

Решение.



Из уравнения конуса:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

Областью интегрирования Ω является круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$. В полярной системе координат $r = 2 \cos \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_{\Omega} dx dy = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr = 2\sqrt{2} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Пример 8.3. Вычислить площадь поверхности параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

Решение.

Область интегрирования — окружность $y^2 + z^2 = 1$. Из уравнения параболоида следует:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -2z.$$

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2} dy dz = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} dy dz.$$

Пусть $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$, тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1+4r^2} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \frac{2}{3} \frac{1}{8} (1+4r^2)^{3/2} \right|_0^1 = \\
 &= \frac{5\sqrt{5}-1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} \pi.
 \end{aligned}$$

Пример 8.4. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

Поскольку

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

то подставив

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{a}$$

под знак интеграла, получим:

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}} dx dy.$$

Положим $x = ar \cos \varphi$, $y = ar \sin \varphi$. Найдем:

$$S = a^2 \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r \sqrt{1+r^2} dr d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} dr =$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^2 (1+r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi a^2 (2\sqrt{2} - 1).$$

Пример 8.5. Вычислить площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$.

Решение.

Рассматриваемая поверхность состоит из двух симметричных относительно плоскости $z = 0$ частей и разрезается плоскостью OZY на четыре равные части. В силу этого вычислим $\frac{1}{8}$ часть площади поверхности, а потом увеличим результат в 8 раз. Часть поверхности, находящаяся в I -ом октанте, проецируется на OXY в замкнутую область $\Omega : 0 \leq x \leq a, \sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$. Поскольку

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2},$$

то получаем

$$S = 8a \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдя в интеграле к полярным координатам, находим:

$$\begin{aligned}
S &= 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_a^{a \cos \varphi} \right) d\varphi = \\
&= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = 8a^2.
\end{aligned}$$

Пример 8.6. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Решение.

Цилиндр вырезает из поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ симметричные относительно плоскости OZY , равные между собой, куски. Будем считать $\frac{1}{4}$ часть поверхности, площадь которой надо вычислить. Она проецируется на OXY в замкнутую область

$$\Omega = \left\{ (x^2 + y^2)^2 \leq a^2 (x^2 - y^2), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \right\}.$$

Поскольку

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

то

$$S = 4\sqrt{2} \iint_{\Omega} \frac{x dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

В полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ получаем:

$$\begin{aligned}
S &= 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr = 2\sqrt{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi = \\
&= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \sin \varphi)^2} d(\sqrt{2} \sin \varphi) = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi a^2}{2},
\end{aligned}$$

где $t = \sqrt{2} \sin \varphi$.

Пример 8.7. Найти площадь части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезаемую плоскостями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

Решение.

Рассмотрим $\frac{1}{4}$ часть поверхности, площадь которой требуется найти. Ее проекция на плоскость OXY — замкнутый треугольник $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Поскольку

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

то

$$S = 4 \iint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Введем полярную систему координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}} r \sqrt{1+r^2} dr = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+r^2)^{3/2} \Big|_0^{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} \right)^{3/2} - 1 \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{3/2} d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + \operatorname{ctg}^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{3/2} d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{(3+t^2)^{3/2}}{1+t^2} dt = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} I_1$$

(после замены $\operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = t$). Вычислим I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^1 \frac{(3+t^2)^{3/2}}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2}{1+t^2}\right) \sqrt{3+t^2} dt = \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{3+t^2} dt + 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3+t^2}}{1+t^2} dt = \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{3+t^2} dt + 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}} = \\
&= \left(\frac{1}{2} \sqrt{3+t^2} + \frac{7}{2} \ln \left(t + \sqrt{3+t^2} \right) \right) \Big|_{-1}^1 + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}} = \\
&= 2 + \frac{7}{2} \ln 3 + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}} = 2 + \frac{7}{2} \ln 3 + 4 I_2.
\end{aligned}$$

Вычислим I_2 . В нем сделаем замену переменных $t = \sqrt{3} \operatorname{tg} z$, получим:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z dz}{\cos^2 z + 3 \sin^2 z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sqrt{2} \sin z)}{1 + (\sqrt{2} \sin z)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \sin z \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Окончательно:

$$S = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3 \right) + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 8.8. Найти площадь части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Решение.

Поверхность симметрична относительно оси OZ (т.к. ее сечение $z = \text{const}$ есть окружности с центрами, лежащими на OZ и $z \geq 0$). Цилиндрическая поверхность симметрична относительно плоскости $y = x$ и пересекает плоскость OXY по кривой, имеющей в полярных координатах уравнение $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. Четвертая часть поверхности проецируется на плоскость OXY в замкнутую область Ω , ограниченную отрезком луча $y = x$ ($x \geq 0$) и частью кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. Так как

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a},$$

то

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{4}{a} \iint_{\Omega} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \, dx \, dy = \frac{4}{a} \iint_{\substack{0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}}} r \sqrt{a^2 + r^2} \, dr \, d\varphi = \\
 &= \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r \sqrt{a^2 + r^2} \, dr = \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((a^2 + r^2)^{3/2} \Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 + \sin 2\varphi)^{3/2} - 1 \right) d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \varphi + \cos \varphi)^3 d\varphi - \frac{\pi}{4} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} a^2 \left(2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) d\varphi - \frac{\pi}{4} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} a^2 \left(2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right) d \left(\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} a^2 \left(2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi).
 \end{aligned}$$

Пример 8.9. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение.

Поверхность состоит из конической поверхности, вырезаемой цилиндрической поверхностью. Пересечение цилиндра с плоскостью OXY по окружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ($z=0$). Она является границей области интегрирова-

ния. Для функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем:

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2.$$

Поэтому

$$S = \sqrt{2} \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = 2\pi\sqrt{2} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 = \pi\sqrt{2},$$

где

$$x = 1 + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r.$$

Пример 8.10. Найти телесный угол ω , под которым виден из начала координат прямоугольник $x = a > 0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

Вывести приближенную формулу для ω , если a велико.

Решение.

Определение. Телесным углом называют часть пространства, ограниченную конической поверхностью. Вершина угла совпадает с вершиной конуса. Мерой телесного угла служит площадь куска единичной сферы с центром в вершине телесного угла, вырезаемого из нее конической поверхностью.

Решение.

Из условия следует, что коническая поверхность состоит из частей плоскостей $z = \frac{c}{a}x, y = 0, z = 0, y = \frac{b}{a}x$, причем вершина конуса находится в начале координат.

Рассмотрим грань конической поверхности $y = 0, z = \frac{c}{a}x, z = 0$. Единичная сфера пересекается с этой гранью по кривой, проецирующейся на плоскость OXY в отрезок луча $x \geq 0 (y = 0)$. Грань $z = \frac{c}{a}x, y = \frac{b}{a}x, z = 0$ пе-

ресекается с единичной сферой по кривой, которая имеет проекцию на плоскость OXY в отрезок луча $y = \frac{b}{a}x$ ($x \geq 0$). С гранью $y = 0, z = 0, y = \frac{b}{a}x$ единичная сфера пересекается по кривой $x^2 + y^2 = 1$, лежащей внутри угла, образованного лучами $y = \frac{b}{a}x, x \geq 0$, и на его границах, а с гранью $y = 0, z = \frac{c}{a}x, y = \frac{b}{a}x$ — по кривой, уравнение проекции которой на плоскость OXY имеет вид

$$x^2 \left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = 1,$$

причем эта проекция также лежит внутри упомянутого угла и на его границах.

Таким образом, кусок единичной сферы, вырезаемый заданной конической поверхностью, проецируется на плоскость OXY в замкнутую область Ω , ограниченную частями кривых $x^2 + y^2 = 1, x^2 \left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = 1$ и отрезками лучей $x \geq 0$ ($y = 0$), $y = \frac{b}{a}x$ ($x \geq 0$).

Для нахождения телесного угла вычислим

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдем в интеграле

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

к полярным координатам. Тогда

$$0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi}} \leq r \leq 1.$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi}}}^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{c}{a} \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi}} = \\
&= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{a}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}-\left(\frac{c}{a}\sin\varphi\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{\frac{c}{a}\sin\varphi}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}}\right) \Bigg|_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \\
&= \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \text{ кв.ед.}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\omega = \frac{S \text{ кв.ед.}}{1 \text{ кв.ед.}} = \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}.$$

Если a велика, то

$$\omega \approx \frac{bc}{a^2 \sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)}} \approx \frac{bc}{a^2}.$$

6 Физические и механические приложения двойных интегралов

1. Центр тяжести плоской пластинки

Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки D , лежащей в плоскости OXY и $\rho = \rho(x, y)$ — плотность вещества пластинки, то x_0 и y_0 находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy,$$

где $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$ — масса пластинки. Считаем, что если пластинка однородна, то $\rho(x, y) = \text{const} = 1$.

2. Моменты инерции

Если J_x и J_y — моменты инерции пластинки D , лежащей в плоскости OXY , относительно координатных осей OX и OY , то их можно найти по формулам:

$$J_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

где $\rho(x, y)$ — плотность вещества пластинки. Центробежный момент инерции J_{xy} находится по формуле

$$J_{xy} = \iint_{\Omega} x y \rho(x, y) dx dy.$$

Если $\rho(x, y) = 1$, то соответствующие моменты инерции называются *геометрическими моментами инерции плоской фигуры D* .

Пример 9.1. Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату ее расстоя-

ния до центра кольца.

Решение.

Обозначим радиусы окружностей кольца через r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). Пусть полюс полярной системы координат расположен в центре кольца. Уравнение окружностей в этом случае $r = r_1$ и $r = r_2$, а поверхностная плотность в точке $M(\varphi, \rho)$ кольца $\rho(M) = \frac{k}{r^2}$. Массу всего кольца найдем по формуле, переходя к полярным координатам.

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho r d\varphi dr = \iint_{r_1 \leq r \leq r_2} \frac{k}{r} d\varphi dr = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \\ &= k \int_0^{2\pi} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} d\varphi = k \ln \frac{r_2}{r_1} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2k\pi \ln \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned}$$

Пример 9.2. Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$, относительно оси OX .

Решение.

Момент инерции относительно оси OX равен

$$J_x = \iint_D y^2 dx dy.$$

Пусть $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned}
J_x &= \iint_D r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^3 dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi = \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = \\
&= \frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + 4 \cos \varphi + 6 \cos^2 \varphi + 4 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{21}{32} \pi a^4.
\end{aligned}$$

Пример 9.3. Найти массу квадратной пластинки со стороной a , если плотность вещества пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

Решение.

Предположим, что стороны пластинки являются отрезками осей координат $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$. Из условия задачи следует, что плотность вещества пластинки меняется по формуле

$$\rho(x, y) = c\sqrt{x^2 + y^2},$$

где $c = \text{const}$, которую надо, вообще говоря, определить. Из условия $\rho(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = \rho_0$ находим, что $c = \frac{\sqrt{2}}{a} \rho_0$. Значение массы

$$M = \frac{\sqrt{2}}{a} \rho_0 \int_0^a dx \int_0^a \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\sqrt{2}}{a} \rho_0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos \varphi}} r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} r^2 dr \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \rho_0 a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{2} \rho_0 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \rho_0 a^2 \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\rho_0}{3} a^2 \left(2 + \sqrt{2} \ln (1 + \sqrt{2}) \right).
\end{aligned}$$

Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривой.

Пример 9.4.

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Решение.

Пластинка ограничена отрезками осей координат $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ и частью кривой, называемой астроидой. Вычислим интеграл

$$M = \iint_{\substack{x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3} \\ x \geq 0, y \geq 0}} dx dy = \int_0^a dx \int_0^y dy = \int_0^a y dx.$$

Проведем замену переменных $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^a y \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \, (-3 a \cos^2 t \sin t) \, dt = \\
 &= 3 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = 3 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) \, dt = \\
 &= \frac{3}{2} \pi a^2 \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} \right) = \frac{3}{32} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 2n!! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n), \\
 (2n+1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1).
 \end{aligned}$$

Знак минус перед интегралом берется потому, что возрастанию параметра от 0 до $\frac{\pi}{2}$ соответствует убывание переменных от a до 0. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{32}{3\pi a^2} \int_0^a x dx \int_0^y dy = \frac{32}{3\pi a^2} \int_0^a x y dx = \\
&= \frac{32a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin^4 t dt = \frac{16}{\pi} a B\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{256a}{315\pi}; \\
y_0 &= \frac{32}{3\pi a^2} \int_0^a dx \int_0^y y dy = \frac{16}{3\pi a^2} \int_0^a y^2 dx = \\
&= \frac{16}{\pi} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = \frac{8}{\pi} a B\left(4, \frac{3}{2}\right) = \frac{256a}{315\pi}.
\end{aligned}$$

Пример 9.5.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2} \quad (\text{петля}).$$

Решение.

Все точки области, ограниченной петлей, лежат в первом квадранте. Проведем замену переменных $x = ar \cos^2 \varphi$, $y = br \sin^2 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Уравнение границы области преобразуется к виду

$$r = \frac{ab}{c^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Получаем:

$$M = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{ab}{c^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} r dr = \frac{a^3 b^3}{c^4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^3 b^3}{2c^4} B(3, 3) = \frac{2a^3 b^3}{5! c^4} = \frac{a^3 b^3}{60 c^4}.$$

После замены переменных находим:

$$x_0 = \frac{120c^4}{ab^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{ab}{c^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{40}{c^2} a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \varphi \cos^9 \varphi d\varphi = \frac{20}{c^2} a^2 b B(4, 5) = \frac{20}{c^2} a^2 b \frac{3! 4!}{8!} = \frac{a^2 b}{14 c^2};$$

$$y_0 = \frac{120c^4}{a^2 b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{ab}{c^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{40}{c^2} a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 \varphi \cos^7 \varphi d\varphi = \frac{20}{c^2} a b^2 B(5, 4) = \frac{a b^2}{14 c^2}.$$

Пример 9.6.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Решение.

Однородная пластинка представляет собой область, лежащую в первой четверти. Найдем уравнение границы этой области в полярной системе координат. Оно имеет вид

$$r = a\sqrt{\sin 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Масса пластинки

$$M = \iint_{\substack{(x^2+y^2)^2 \leq 2a^2 xy \\ x \geq 0, y \geq 0}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Тогда

$$x_0 = \frac{2}{a^2} \iint_{(x^2+y^2)^2 \leq 2a^2 xy} x \, dx \, dy = \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 \, dr =$$

$$= \frac{2}{3} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\varphi)^{3/2} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \sqrt{2} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} \varphi \cos^{5/2} \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2} a B\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{\pi}{8} a.$$

$$y_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\sqrt{a \sin 2\varphi}} r^2 \, dr = \frac{4}{3} \sqrt{2} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5/2} \varphi \cos^{3/2} \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2} a B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\pi}{8} a.$$

Пример 9.7.

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Решение.

Обозначим через Ω множество точек пластинки и ее границы. Тогда

$$M = \iint_{\Omega} dx dy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4} \pi a^2.$$

$$x_0 = \frac{4}{3 \pi a^2} \iint_{\Omega} x dx dy = \frac{4}{3 \pi a^2} \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 dr =$$

$$= \frac{4 a}{9 \pi} \int_0^{\pi} \cos \varphi (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{4 a}{9 \pi} \int_0^{\pi} (3 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{8 a}{9 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{5}{6} a,$$

$$y_0 = \frac{4}{3 \pi a^2} \iint_{\Omega} y dx dy = \frac{4}{3 \pi a^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 dr =$$

$$= \frac{4 a}{9 \pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{4 a}{9 \pi} \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^3 d(\cos \varphi) = \frac{16 a}{9 \pi}.$$

Пример 9.8. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $x^2 + y^2 \leq a^2$, если плотность ее вещества в точке $M(x, y)$ пропорциональна расстоянию от точки M до точки $A(a, 0)$.

Решение.

Из условия задачи следует, что плотность вещества пластинки

$$\rho(x, y) = c\sqrt{(x - a)^2 + y^2},$$

где $c > 0$ — постоянное.

Имеем:

$$M = c \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \rho(x, y) dx dy,$$

$$x_0 = \frac{c}{M} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x \rho(x, y) dx dy,$$

$$y_0 = \frac{c}{M} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} y \rho(x, y) dx dy.$$

Положим $x - a = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Получим:

$$M = c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{8}{3} c a^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} c a^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{32}{9} c a^3,$$

$$x_0 = \frac{9}{32 a^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} (a + r \cos \varphi) r^2 dr =$$

$$= \frac{9}{32 a^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-\frac{8}{3} a^4 \cos^3 \varphi + 4 a^4 \cos^5 \varphi \right) d\varphi =$$

$$= \frac{3 a}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3 \cos^5 \varphi - 2 \cos^3 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{3 a}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 4 \sin^2 \varphi + 3 \sin^4 \varphi) d(\sin \varphi) = -\frac{a}{5},$$

$$y_0 = \frac{9}{32 a^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} r^3 dr = \frac{9 a}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Пример 9.9.

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

Решение.

Полагая $\rho(x, y) = 1$ и переходя к полярным координатам r и φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi)$), получаем:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^3 dr = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = \\ &= 16 a^4 \int_0^{2\pi} \cos^{10} \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = 32 a^4 \int_0^{\pi} \cos^{10} t \sin^2 t dt = \\ &= 64 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t \sin^2 t dt = 64 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{10} t - \cos^{12} t) dt = \\ &= 64 a^4 \left(\frac{9!!}{10!!} - \frac{11!!}{12!!} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{21}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_x + I_y &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^3 dr = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^4 d\varphi = \\
&= 4a^4 \int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a^4 \int_0^{\pi} \cos^8 t dt = \\
&= 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt = 16a^4 \frac{7!!}{8!!} \frac{\pi}{2} = \frac{35}{16} \pi a^4.
\end{aligned}$$

$$I_y = \frac{35}{16} \pi a^4 - I_x = \frac{49}{32} \pi a^4.$$

Пример 9.10. Луг, имеющий форму прямоугольника со сторонами a и b , равномерно покрытый скошенной травой с плотностью $\rho = p \frac{\kappa^2}{\text{м}^2}$. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центр луга, если работа по перевозке груза в p килограмм на расстояние r метров равна kpr ($0 < k < 1$)?

Решение.

Поместим начало координатной системы OXY в центр данного прямоугольника так, чтобы оси OX и OY были параллельны соответственно его сторонам a и b . Рассмотрим элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy , содержащий точку $m(x, y)$ исходного прямоугольника. Тогда минимальная работа, затраченная на перемещение в центр луга сена, убранного с площади $dx dy$, будет равна $p k r dx dy$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда вся работа, затраченная на доставку сена в центр луга, выразится интегралом

$$A = \iint_{\Omega} p k r \, dx \, dy,$$

где Ω — прямоугольник: $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$.

Область интегрирования симметрична так же как и подынтегральная функция, поэтому:

$$A = 4 p k \iint_{\substack{0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{b}{2}}} r \, dx \, dy.$$

Перейдем к полярным координатам, получим:

$$\begin{aligned} A &= 4 p k \left(\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2 \cos \varphi}} r^2 \, dr + \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{b}{2 \sin \varphi}} r^2 \, dr \right) = \\ &= \frac{p k}{6} \left(a^3 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + b^3 \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = \\ &= \frac{p k}{12} \left(a^3 \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} + \right. \\ &\quad \left. + b^3 \left(-\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right) \Big|_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \frac{p k}{12} \left(2 a b \sqrt{a^2 + b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right). \end{aligned}$$

7 Литература:

1. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: ООО изд-во Астрель: ООО изд-во АСТ, 2005 - 558, [2]с.:ил.
2. Г.И. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: изд-во Высшая школа, 1996 - 460с..
3. П.Е. Данко, А.Г. Попов. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II. Изд. 2-е. Учеб.пособие для втузов. М.: изд-во Высшая школа, 1974. 464с.
4. Лешко И.И., Боярчук А.И., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу, ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Киев, изд. объединение Высшая школа, головное изд-во, 1979, 736с.
5. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин, под.ред. В.Ф.Бутузова. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. Учебное пособие для студентов вузов / - М.: Высш.шк., 1988 - 288 с.: ил.