Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

В.А. Иванов

МАТЕМАТИКА

Понятие о комплексных числах

Учебное пособие для студентов
биологического факультета

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014

Содержание

Данное пособие предназначено для студентов биологического факультета, осваивающих курс «Математика» в процессе обучения по специальности 020501 «Биоинженерия и биоинформатика» и направлению подготовки 020400 «Биология». Комплексные числа находят применение в таких разделах курса как интегральное исчисление, дифференциальные уравнения.

1. Определение комплексных чисел

Понятие комплексных чисел возникло из необходимости решать уравнения вида

Очевидно, что не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Корнями данного и подобных уравнений являются так называемые комплексные числа.

Под комплексным числом будем понимать выражение где x и y – действительные числа, i – мнимая единица,

Числа отождествляются с действительными числами; в частности, Из этого свойства следует, что множество комплексных чисел содержит в себе как часть множество всех действительных чисел. Числа вида называются чисто мнимыми. Очевидно, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел.

Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями числа z. Их принято обозначать следующим образом:

Под модулем комплексного числа z понимается неотрицательное число Сопряженным числом к числу z называется комплексное число

Два комплексных числа и равны тогда и только тогда, когда равны соответственно действительные и мнимые части

2. Арифметические действия с комплексными числами

Арифметические действия над комплексными числами определяются следующим образом:

1. Сложение и вычитание

2. Умножение

В частности, действительное число.

Например,

3. Деление

Можно сказать, что с комплексными числами можно оперировать в точности так же, как мы привыкли оперировать с буквенными выражениями в алгебре, но при этом операции упрощаются тем, что

3. Геометрическое изображение комплексных чисел

Пусть *xOy* прямоугольная система координат на плоскости. Каждому комплексному числу можно поставить в соответствие пару действительных чисел , а каждой такой паре действительных чисел соответствует одна точка плоскости такая, что

И, наоборот, каждую точку координатной плоскости можно принять за изображение комплексного числа Такая плоскость называется комплексной плоскостью, а – точкой этой плоскости.

Ось *Ox* называется действительной осью, так как на ней расположены действительные числа Ось *Oy* называется мнимой осью, на ней расположены чисто мнимые числа .

Очевидно, что представляет собой расстояние от начала координат до точки *z*.

Следует отметить, что

т.е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Так, например, равенство определяет на комплексной плоскости множество точек , находящихся на расстоянии в 2 единицы от точки т.е. окружность с центром в точке и радиусом 2.

Положение точки на плоскости также может быть определено с помощью полярных координат Между полярными координатами и прямоугольными координатами существуют зависимости

Число называется аргументом комплексного числа . Аргумент считается положительным, если его отсчет ведется от положительного направления действительной оси против часовой стрелки. В противном случае аргумент считается отрицательным. Для точки аргумент не определен. Если модуль комплексного числа определяется единственным образом, то аргумент – с точностью до слагаемого

4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Во многих практических задачах наиболее удобной является тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Определим формулы умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

Пусть заданы два комплексных числа

Тогда их произведение примет вид

или после преобразований по формулам тригонометрии

Частное от деления двух комплексных чисел имеет вид

Таким образом, справедливы следующие правила:

при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются;

при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

5. Возведение в степень и извлечение корня

Возведение в степень n (n – натуральное число) комплексного числа представляет собой операцию последовательного умножения комплексного числа на себя n раз:

Пример. Найти

Комплексное число представим в тригонометрической форме :

Имеем

Теперь решим задачу нахождения корня n–ой степени из комплексного числа z. Воспользуемся тригонометрическим представлением комплексных чисел:

В этих соотношениях неизвестными (подлежащими нахождению) величинами являются

Возведем в n–ю степень искомый корень

Сравнение правых частей для комплексного числа z дает следующие равенства

Окончательно имеем

или в общем виде

Здесь и выше *k* принимает только значения , так как при прочих значениях *k* получаются повторения уже найденных значений корня.

Пример.

Найти

Так как то

Теперь на основании формулы корня *n*–ой степени из комплексного числа имеем:

В результате находим два решения

Пример.

Найти

Комплексное число представим в тригонометрической форме:

Поэтому

Из этой формулы получаем три значения корня:

при

при

при

6. Формула Муавра. Формула Эйлера, выражение тригонометрических функций через показательную функцию

Воспользуемся формулой для n–ой степени комплексного числа

Если в этой формуле положить , то получим формулу Муавра

Леонард Эйлер получил следующую формулу

С помощью формулы Эйлера комплексное число можно записать в показательной форме (модуль комплексного числа),

Пример.

Комплексные числа и представить в показательной форме.

В предыдущем примере было получено, что

.

Следовательно, по формуле Эйлера имеем

Для второго задания вначале найдем тригонометрическую форму комплексного числа

Следовательно, показательная форма комплексного числа будет иметь вид

7. Понятие функции комплексной переменной

Пусть даны две комплексные плоскости *xOy и u* . Если каждой точке по некоторому закону *f* ставится в соответствие единственная точка , то говорят, что *w* есть функция от *z:* с областью определения *E,* значения которой принадлежат множеству .

Пример. Пусть задан сектор *E,*на плоскости *xOy*:

Возьмем функцию . Так как то Т.о., множество *E* плоскости *xOy* переходит во множество , представляющее собой полукруг на плоскости *u*

8. Контрольные вопросы по теме «Понятие о комплексных числах»

8.1 Приведите конкретные примеры уравнений, не имеющих решений во множестве действительных чисел.

8.2 Какие из следующих чисел равны:

8.3 Что можно сказать о знаках действительной и мнимой частей комплексного числа, которое лежит:

а) в 1-й четверти; б) во 2-й четверти; в) в 3-й четверти; г) в 4-й четверти координатной плоскости.

8.4 Дана точка Что можно сказать о расположении точки: а) б) – в)

8.5 Что можно сказать о комплексных числах, для которых соответствующие точки расположены на окружности с центром в начале координат?

8.6 Чему равен модуль следующих чисел: -2; 4; 0 ?

8.7 При каких условиях точка, изображающее комплексное число , будет лежать на прямой: а) б) ?

8.8 Приведите пример двух комплексных чисел, разность которых есть: а) действительное число; б) чисто мнимое число.

8.9 Чему равен

а) б) в) г)

8.10 Чему равен

8.11 Какие знаки имеют числа a и b, если аргумент комплексного числа удовлетворяет условию:

а) б) в) г) ; д) е)

8.12 Чему равен ?

8.13 Укажите модуль и аргумент комплексного числа:

а) ; б) ; в) 3 ; г) 4

8.14 Какие из следующих выражений представляют собой показательную форму комплексного числа:

; -3 ; ; ; ; 3 .

8.15 Известно, что . Запишите в показательной форме число:

а) ; б) в) г) .

9. Задания для самостоятельной работы

В качестве исходных данных для выполнения заданий самостоятельной работы следует брать последние две цифры номера студенческого билета:

a= предпоследняя цифра;

b = последняя цифра.

9.1 Даны комплексные числа:

А) Изобразите числа геометрически на плоскости xOy.

Б) Найдите

В) Представьте числа в тригонометрической и показательной формах.

Г) Найдите .

Д) Представьте число в тригонометрической форме.

9.2 Изобразите на плоскости множество точек если:

А) Б) В) Г) Д)

10. Список использованных источников

10.1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.– 432с.

10.2 Баврин И.И. Курс высшей математики : Учебник для студентов пед. ин-тов по спец. «Физика». – М.: Просвещение, 1992. – 400с.