Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

В.А. Иванов, Д.В. Иванов

МАТЕМАТИКА

Основы линейной алгебры и аналитической геометрии

Учебное пособие для студентов
биологического факультета

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014

Глава 1. МЕТОД КООРДИНАТ

Рассмотрим способ, который позволяет определять положение точек на плоскости с помощью чисел и называется *методом координат.*

НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ

Определение 1.1. Упорядоченная пара точек A и B называется *направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$. Первая точка A называется началом направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, а вторая точка B – его концом (рис. 1.1).

В обозначении направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ порядок точек определяется порядком их записи: A – первая точка, B – вторая. Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*, а если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым.*

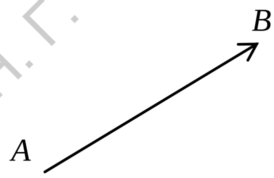


Рис. 1.1

Определение 1.2. *Осью* l называется прямая линия, на которой фиксировано положительное направление стрелкой и выбран масштабный отрезок.

Определение 1.3. *Координатой* ненулевого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, лежащего на оси l, называется число x, модуль которого равен длине направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, измеренной масштабным отрезком оси l; оно положительно, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и ось l имеют одинаковое направление, и отрицательно в противном случае.

Определение 1.4. *Осью координат* называется ось, на которой фиксирована точка O, называемая началом координат.

Определение 1.5. *Координатой* x_1 точки M, лежащей на оси координат, называется координата направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1.2, а, б).

а б

Рис. 1.2

ТЕОРЕМА 1.1. Координата x направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси координат, вычисляется по формуле

$$x = x_2 - x_1.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из определений.

ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат: горизонтальную – x и вертикальную – y, имеющие началом точку пересечения O и равные единицы масштаба для измерения длин. Положительные направления осей выбираются так, что поворот оси Ox на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении, т.е. в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, совмещает полуось положительных значений x с полуосью положительных значений y. Горизонтальная ось называется осью Ox или осью абсцисс, вертикальная – осью Oy или осью ординат. Построенная таким образом система координат называется *декартовой прямоугольной системой координат* на плоскости.

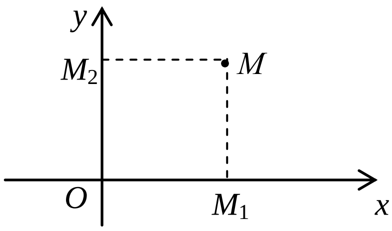


Рис. 1.3

Пусть M – произвольная точка плоскости, не лежащая ни на одной оси координат. Опустим из точки M перпендикуляры на оси координат. Обозначим точки пересечения с осью Ox – M_1, а с осью Oy – M_2 (рис. 1.3). Точки M_1 и M_2 – *ортогональные проекции* точки M на оси координат. Пусть x – координата точки M_1 на оси Ox, а y – координата точки M_2 на оси Oy.

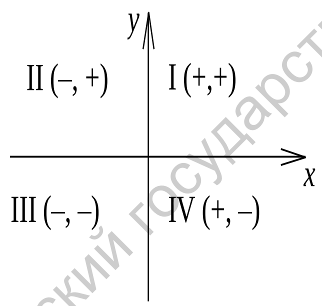


Рис. 1.4

Числа x и y называются *декартовыми координатами* точки M. Первая координата x – абсцисса точки M, вторая координата y – ордината точки M.

Точка M с координатами x, y обозначается $M(x; y)$. При помощи декартовой системы координат на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех упорядоченных пар чисел. Координатные оси разделяют всю плоскость на четыре части (рис. 1.4), называемые *четвертями*. Четверти нумеруются по определенному правилу. Точки, лежащие в каждой из них, характеризуются знаком своих координат. Ординаты точек, лежащих на оси Ox, равны нулю (y=0). Абсциссы точек, лежащих на оси Oy, равны нулю (x=0).

Расстояние между двумя точками на плоскости

ТЕОРЕМА 1.2. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси координат, вычисляется по формуле

$$d = |x_2 - x_1|.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Для любых точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Под расстоянием между двумя точками на плоскости понимаем длину отрезка $M_1 M_2$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника MM_1M_2 имеем (рис. 1.5)

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1M^2 + M_2M^2};$$

$$M_1M = |x_2 - x_1|,\ M_2M = |y_2 - y_1|.$$

Таким образом, расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле (1.1).

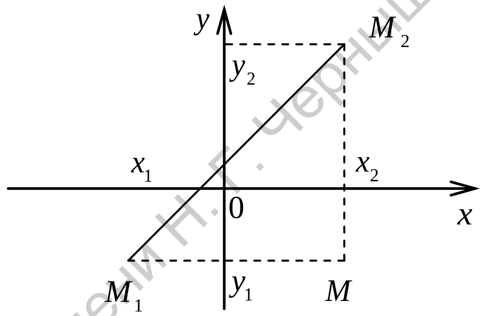


Рис. 1.5

Пример. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-5;14)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1.1), получим

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть задан отрезок MN, то есть заданы координаты начальной и конечной его точек: $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$. Возьмем точку C на MN. Будем говорить, что точка C делит отрезок MN в отношении λ $(\lambda > 0)$, если $\frac{MC}{CN} = \lambda$. Найдем координаты точки C. Проведем через т. M и т. C отрезки, параллельные оси Ox, а через т. C и т. N – отрезки, параллельные оси Oy. Очевидно, что треугольник MCC_1 подобен треугольнику CN_1N и, следовательно, справедлива пропорция $\frac{MC}{CN} = \frac{MC_1}{CN_1}$.

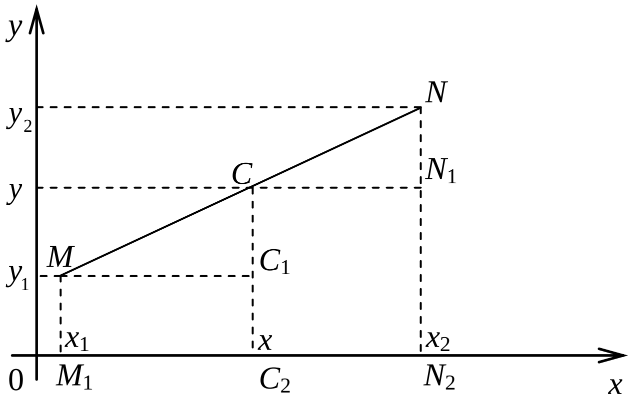


Рис. 1.6

Так как $MC_1 = M_1C_2 = x - x_1$, а $CN_1 = C_2N_2 = x_2 - x$, то $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$.
Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \qquad (1.2)$$

Аналогично выводится формула для ординаты точки C

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (1.3)$$

Вывод формул (1.2) и (1.3) осуществлен для случая $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. В других вариантах вывод формул для координаты точки C получается аналогично.

Вычисление площади треугольника

Пусть даны вершины треугольника $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ (рис. 1.7). Пусть $CA = d_1$, $CB = d_2$ и ψ – угол между отрезками CA и CB. Площадь треугольника равна половине произведения длин двух сторон на синус угла между ними, следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\psi\right|.$$

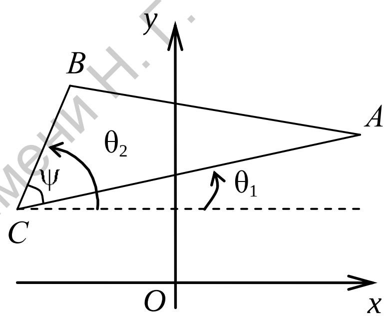


Рис. 1.7

Пусть θ_1 – угол между CA и осью Ox, θ_2 – угол между CB и осью Ox. Так как $\psi=\theta_2 - \theta_1$, то

$$\frac{1}{2}\cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\psi = \frac{1}{2}\cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(d_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot d_2 \cdot \sin\theta_2 - d_2 \cdot \cos\theta_2 \cdot d_1 \sin\theta_1).$$

Учитывая, что $x_2 - x_1 = d\cdot\cos\theta$, $y_2 - y_1 = d\cdot\sin\theta$ (эти формулы выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и угол между отрезком и осью Ox), получим, что

$$d_1\cdot\cos\theta_1 = x_1 - x_3,\ d_1\cdot\sin\theta_1 = y_1 - y_3,$$
$$d_2\cdot\cos\theta_2 = x_2 - x_3,\ d_2\cdot\sin\theta_2 = y_2 - y_3.$$

Таким образом, выражение для площади треугольника имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|(x_1 - x_3)\cdot(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)\cdot(y_1 - y_3)\right|. \qquad (1.4)$$

В частном случае, если вершина C лежит в начале координат (т.е. $x_3 = y_3 = 0$),

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot y_2 - x_2\cdot y_1\right|.$$

П р и м е р. Определить площадь треугольника с вершинами $A(2;8)$, $B(10;2)$ и $C(-2;-4)$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (1.4), получим

$$S = \frac{1}{2}\left|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)\right| = \frac{1}{2}\left|24 - 144\right| = 60 \text{ (кв.ед.)}.$$

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Точку в пространстве можно задать с помощью чисел, если введена прямоугольная система координат, состоящая из трех взаимно перпендикулярных осей, которые пересекаются в одной точке, имеют равные единицы масштаба для измерения длин и занумерованы в определенном порядке.

К осям абсцисс Ox и ординат Oy плоскости добавляется ось аппликат – Oz. При этом положительное направление оси Oz выбирается таким образом, чтобы поворот от оси Ox к оси Oy на угол, меньший π, совершался в направлении против часовой стрелки, если смотреть из какой-нибудь точки положительной полуоси Oz.

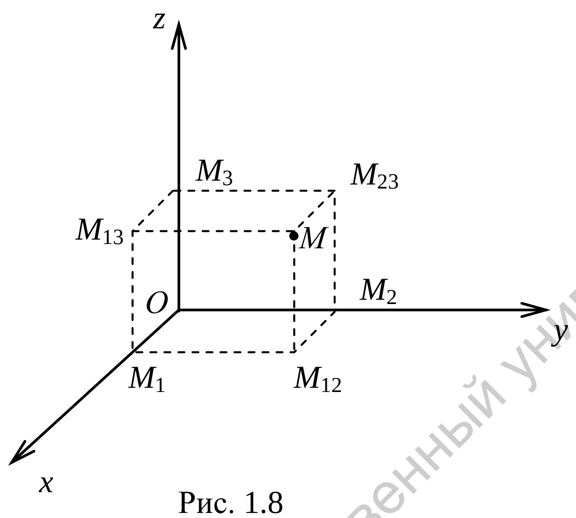


Рис. 1.8

Пусть M – произвольная точка пространства, а точки M_1, M_2, M_3 – ортогональные проекции точки M на оси координат (рис. 1.8). Числа $x=OM_1$, $y=OM_2$ и $z=OM_3$ – координаты точки M в заданной системе прямоугольных координат. Таким образом, точка в пространстве задается тремя координатами x, y, z и записывается $M(x;y;z)$.

Три координатные плоскости xOy, xOz и yOz разделяют пространство на восемь частей, называемых *координатными октантами*.

Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка пространства. Знаки координат точки определяют ее местоположение в координатном октанте:

$x>0, y>0, z>0$ – точка M расположена в I октанте;

$x<0, y>0, z>0$ – точка M расположена во II октанте;

$x<0, y<0, z>0$ – точка M расположена в III октанте;

$x>0, y<0, z>0$ – точка M расположена в IVоктанте;

$x>0, y>0, z<0$ – точка M расположена в Vоктанте;

$x<0, y>0, z<0$ – точка M расположена в VI октанте;

$x<0, y<0, z<0$ – точка M расположена в VII октанте;

$x>0, y<0, z<0$ – точка M расположена в VIII октанте.

Переход от одной прямоугольной системы координат к другой

При переходе от системы координат Oxy к новой системе $O_1x'y'$, у которой направление осей координат прежнее, а началом является точка $O_1(a; b)$ (рис. 1.9), связь между старыми и новыми координатами для некоторой точки M плоскости определяется формулами

$$x = x' + a,\ y = y' + b \tag{1.5}$$

или

$$x' = x - a,\ y' = y - b. \tag{1.6}$$

С помощью формул (1.5) старые координаты выражаются через новые, а с помощью формул (1.6) – новые через старые.

При повороте осей координат на угол α (начало координат прежнее, причем α отсчитывается против часовой стрелки; рис. 1.10) зависимость между старыми координатами x, y и новыми x', y' определяется следующими формулами:

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,\quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \tag{1.7}$$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{1.8}$$

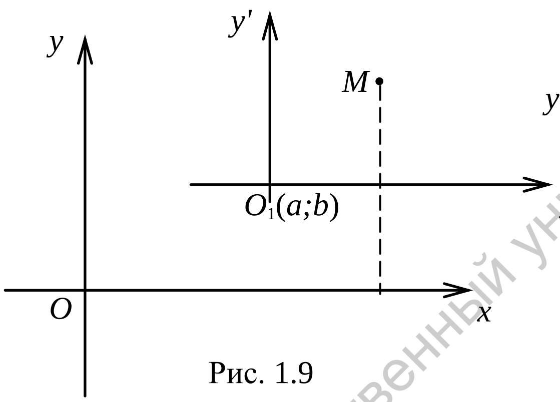


Рис. 1.9

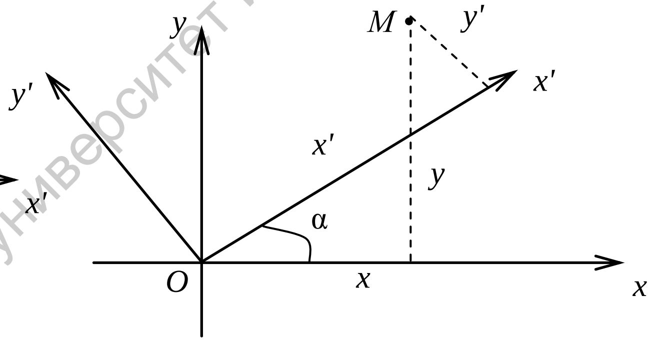


Рис. 1.10

В случае пространства формулы перехода при параллельном переносе осей будут иметь следующий вид:

$$x = x' + a,\ y = y' + b,\ z = z' + c \tag{1.9}$$

или

$$x' = x - a,\ y' = y - b,\ z' = z - c. \tag{1.10}$$

При повороте координатных осей

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\}, \tag{1.11}$$

где α_1, α_2, α_3 – углы, образуемые осью Ox соответственно с новыми осями Ox', Oy', Oz'; β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 – углы, образуемые соответственно осью Oy и осью Oz с новыми осями (или α_1, β_1, γ_1 – образуемые новой осью Ox' соответственно со старыми осями Ox, Oy, Oz и т. д.).

Полярная система координат

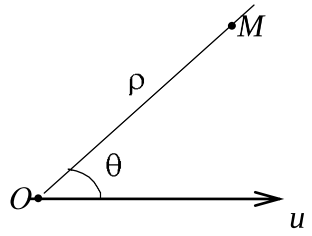


Рис. 1.11

Для определения положения точки на плоскости иногда удобно пользоваться полярной системой координат.

Полярная система координат (рис. 1.11) определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из этой точки луча, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме задания полярной системы координат должно быть указано положительное направление вращения вокруг точки O (от полярной оси к лучу OM против часовой стрелки). Число $\rho=|OM|$ называется *полярным радиусом* и является первой координатой точки, а число θ – *полярным углом* и является второй координатой точки.

<u>Определение 1.6.</u> Полярный радиус и полярный угол точки называются *полярными координатами*.

Полярные координаты ρ и θ записываются в скобках после буквы, обозначающей точку: $M(\rho, \theta)$.

Если точка M имеет полярные координаты $\rho>0$ и $0 \le \theta < 2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho, \theta+2k\pi)$, где $k \in \mathrm{Z}$. Полюсу O соответствует одно число $\rho=0$.

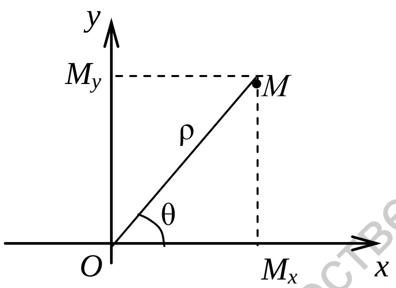


Рис. 1.12

Выведем формулу перехода от полярных координат к прямоугольным и обратно. Для простоты рассуждений рассмотрим частный случай, когда полюс полярной системы координат совпадает с началом прямоугольных координат, а полярная ось – с положительной полуосью абсцисс (рис. 1.12).

Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим через x и y прямоугольные координаты точки M, через ρ и θ – ее полярные координаты. Как известно, $x = OM_x$, $y = OM_y$. С другой стороны, $OM_x = \rho \cdot \cos\theta$, $OM_y = \rho \cdot \sin\theta$. Поэтому

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\theta, \\ y &= \rho \cdot \sin\theta. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Обратно, зная прямоугольные координаты точки, можно определить ее полярные координаты по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\theta = {y}/{x}. \qquad (1.13)$$

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем предполагать, что полюс совпадает с началом координат, а полярная ось – с положительным направлением оси абсцисс.

Примеры.

1. Найти полярные координаты точки $M(1; -\sqrt{3})$.

Решение. На основании равенств (1.13) находим

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2,\ \operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}.$$

Очевидно, что точка M лежит в IV четверти и, следовательно, $\theta = {}^{5\pi}\!/_{3}$. Таким образом, полярные координаты точки $M(2;\ {}^{5\pi}\!/_{3})$.

2. Найти прямоугольные координаты точки $A(2\sqrt{2}\,;{}^{3\pi}\!/_{4})$.

Решение. На основании равенств (1.12) имеем $x = 2\sqrt{2}\cos({}^{3\pi}\!/_{4}) = -2,\quad y = 2\sqrt{2}\sin({}^{3\pi}\!/_{4}) = 2.$

Таким образом, прямоугольные координаты точки $A(-2; 2)$.

Цилиндрические координаты

Пусть точка M имеет декартовы координаты $(x; y; z)$. Если Q – ортогональная проекция точки M на плоскость XOY, тогда *цилиндрическими координатами* точки M называются три числа $(\rho; \theta; z)$, где $(\rho; \theta)$ – полярные координаты точки $Q(x, y)$ в плоскости XOY.

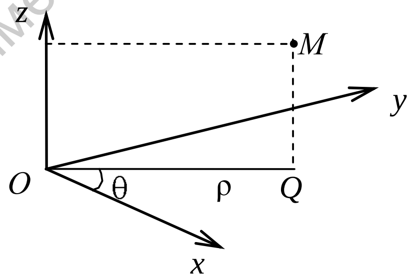


Рис. 1.13

Заметим, что $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть расстояние от точки $(0; 0; z)$ до $M(x; y; z)$, т.е. расстояние от точки M до оси z (рис. 1.13). Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми координатами одной и той же точки определяется формулами

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho},\ \sin\theta = \frac{y}{\rho},\ z = z, \tag{1.14}$$

$$x = \rho\cdot\cos\theta,\ y = \rho\cdot\sin\theta,\ z = z. \tag{1.15}$$

Сферические координаты

Пусть M – точка пространства, имеющая декартовы координаты $(x; y; z)$.

Сферическими координатами точки M является тройка чисел ρ, θ и φ (рис. 1.14), определяемые следующим образом:

ρ – расстояние точки M от начала координат O;

θ – полярный угол, а φ – угол между положительным направлением оси z и лучом OM.

Таким образом, формулы, связывающие сферические координаты с декартовыми, имеют следующий вид:

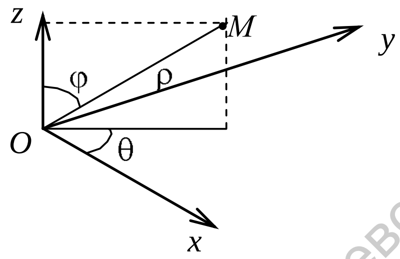


Рис. 1.14

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1.16}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho},\ \ \sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho}$$

и

$$x = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ \ y = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ \ z = \rho\cdot\cos\varphi. \tag{1.17}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 1

1. Опишите систему координат на прямой, на плоскости.
2. Выведите формулу расстояния между двумя точками.
3. Выведите формулу деления отрезка в данном отношении.
4. Выведите формулу площади треугольника по известным координатам трех его вершин.
5. Опишите систему координат в пространстве.
6. Опишите полярную систему координат. Выведите формулы, выражающие полярные координаты через ее прямоугольные координаты и формулы, выражающие прямоугольные координаты точки через ее полярные координаты.
7. Опишите цилиндрические координаты.
8. Опишите сферические координаты.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Даны прямоугольные координаты точек: $A(3; -1)$, $B(6; 0)$, $C(0; 3)$, $D(2; 2)$. Найдите их полярные координаты.

2. Даны полярные координаты точек $M\left(1;\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $N\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $P(2;\ 0)$, $Q\left(3;\ \frac{5\pi}{3}\right)$. Найдите их прямоугольные координаты.
3. Даны координаты вершин треугольника $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Найдите площадь треугольника ABC.
4. Даны точки начала и конца отрезка $A(-2;-5)$, $B(5;1)$. Известно, что точка С делит отрезок AB в отношении $AC:CB=2:3$. Найдите координаты точки C.
5. Вычислите расстояние между двумя точками на плоскости $A(-4;8)$, $B(8;-2)$.

Глава 2. ВЕКТОРЫ

Физические величины, которые характеризуются только числовым значением при выбранной системе единиц измерения, называются скалярными (масса, теплопроводность, электрическое сопротивление и т.д.) Величины, характеризующиеся не только числом, но и направлением в пространстве, называются векторными. Это такие величины механики и физики, как сила, ускорение, скорость, напряжённость электрического и магнитного полей.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 2.1. *Связанным вектором* называется упорядоченная пара точек (A, B). Первая точка A называется *началом* вектора, вторая точка B – *концом* вектора. Обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Если начало и конец связанного вектора совпадают, то вектор называется *нулевым*. Начало связанных векторов не может изменять своего положения, например, вектор скорости при движении газа.

Определение 2.2. *Направлением* ненулевого связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется направление луча, вершина которого совпадает с началом A и содержит его конец B. Направление нулевого связанного вектора считается произвольным.

Определение 2.3. *Модулем* (длиной) или абсолютной величиной ненулевого связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ ($\left|\overrightarrow{AB}\right|$) называется расстояние между его началом и концом.

Определение 2.4. Два ненулевых связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными* ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), если прямые AB и CD параллельны или совпадают. Нулевой связанный вектор считается коллинеарным любому связанному вектору.

Коллинеарные связанные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющие одинаковое направление, обозначают $\overrightarrow{AB} \downarrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (и называют сонаправленными), противоположное – $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (противоположно направленные).

Определение 2.5. Два связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными* ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|, \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}. \end{cases}$

Определение 2.6. *Свободным вектором* $\vec{a}$ называется множество всех равных между собой связанных векторов. Нулевым вектором – множество всех нулевых связанных векторов.

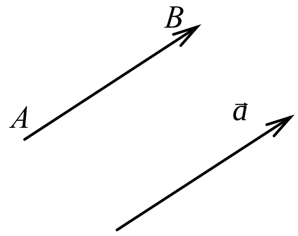


Рис. 2.1

Свободный вектор $\vec{a}$ часто обозначается и изображается любым из связанных векторов $\overrightarrow{AB}$ того множества связанных векторов, которым является вектор $\vec{a}$ (рис. 2.1). Построить свободный вектор $\vec{a}$ от точки A – значит построить связанный вектор $\overrightarrow{AB}$, входящий в множество связанных векторов, образующих вектор $\vec{a}$.

Длиной и направлением свободного вектора являются длина и направление любого его представителя. Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, т.е. начало вектора может быть в любой точке пространства, но направление и длина фиксированы.

В дальнейшем, под словом “вектор” будем понимать “свободный вектор”.

Определение 2.7. Два или большее число векторов называется *коллинеарными*, если их представители с общим началом лежат на одной прямой.

Определение 2.8. Три или большее число векторов называется *компланарными*, если их представители с общим началом лежат в одной плоскости.

Определение 2.9. *Противоположным* для вектора $\bar{a}$ называется вектор той же длины, но противоположного направления $(-\vec{a})$: $-\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{-a}\right| = \left|\vec{a}\right|, \\ \overrightarrow{-a} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases}$

Определение 2.10. *Единичным вектором* (ортом) вектора $\vec{a}$, ($\vec{a}^{\,0}$) называется такой вектор, который имеет то же направление, что и $\vec{a}$, и единичную длину: $\vec{a}^{\,0} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1, \\ \vec{a}^{\,0} \uparrow\uparrow \vec{a}. \end{cases}$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Сложение векторов

Результат суммы двух векторов – вектор. Данная операция имеет в своей основе правило сложения сил и скоростей.

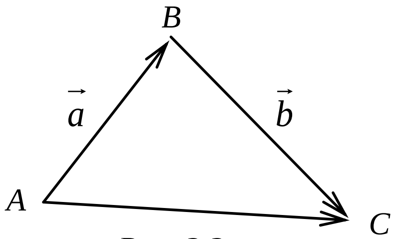


Рис. 2.2

Суммой двух неколлинеарных векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{BC}$ (рис. 2.2) является вектор, идущий из начала $\overline{a}$ в конец $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ ($\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$).

Это правило сложения двух векторов называется *правилом треугольника*.

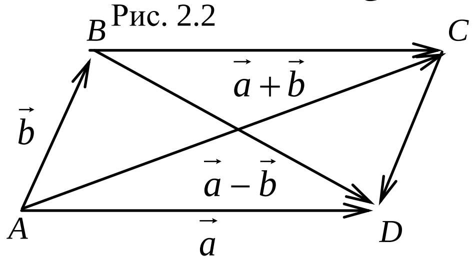


Рис. 2.3

Пусть даны неколлинеарные векторы $\overline{a} = \overline{AD}$ и $\overline{b} = \overline{AB}$ (рис. 2.3). Их суммой будет являться вектор $\overline{AC}$, определяемый диагональю AC параллелограмма $ABCD$, построенного на представителях слагаемых как на сторонах.

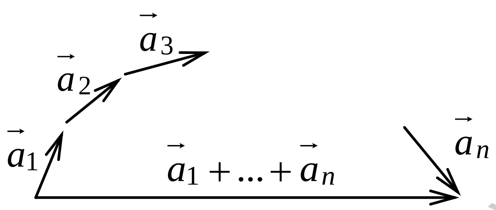


Рис. 2.4

Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма*.

Чтобы найти сумму $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n$ данных векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, надо от произвольной точки пространства отложить первый вектор $\overline{a}_1$, затем от его конца отложить второй вектор $\overline{a}_2$, от конца второго вектора отложить третий вектор $\overline{a}_3$ и т.д. Вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом последнего, называется суммой данных векторов (рис. 2.4).

Это правило сложения n векторов называется *правилом многоугольника*.

Свойства операции сложения векторов.

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (коммутативность сложения).
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (ассоциативность сложения).
3. $\overline{a} + (-\overline{a}) = 0$ (сложение с противоположным вектором).
4. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ (сложение с нуль-вектором).

Вычитание векторов

Определение 2.11. *Разностью* $\bar{a}-\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{x}$, который при сложении с вычитаемым вектором $\bar{b}$ дает уменьшаемый вектор $\bar{a}$: $\bar{x}+\bar{b}=\bar{a}$.

Разность векторов $\bar{a}-\bar{b}$ совпадает с суммой $\bar{a}+(-\bar{b})$.

Геометрически разность $\bar{a}-\bar{b}$ неколлинеарных векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD}$ представляет собой вектор $\overline{BD}$, определяемый диагональю BD параллелограмма $ABCD$: $\bar{a}-\bar{b}=\overline{BD}$ (см. рис. 2.3).

Чтобы построить разность $\bar{a}-\bar{b}$ геометрически, надо отложить векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ от общего начала, концы соединить отрезком и направить вектор разности в сторону уменьшаемого.

Умножение вектора на число

Определение 2.12. *Произведением* $\lambda\bar{a}$ (или $\bar{a}\lambda$) ненулевого вектора $\bar{a}$ на число $\lambda\neq 0$ называется новый вектор $\bar{c}$ такой, что:

1) длина вектора $\bar{c}$ равна произведению длины вектора $\bar{a}$ на абсолютную величину числа λ:
$$|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\lambda|;$$
2) направление вектора $\bar{c}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если λ – положительное число, или противоположно ему, если λ – число отрицательное.

Если $\bar{a}=0$ или $\lambda=0$, то полагают по определению $\lambda\bar{a}=0$.

Свойства операции умножения.

1. $\lambda\bar{a}=\bar{a}\lambda$.
2. $\mu(\lambda\bar{a})=(\mu\lambda)\bar{a}$.
3. $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.
4. $\bar{a}(\lambda+\mu)=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$.
5. Если $\lambda\bar{a}=\bar{0}$, то $\bar{a}=\bar{0}$ или $\lambda=0$.
6. Если $\bar{a}$ имеет единичный вектор $\bar{a}^0$, то $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{a}^0$.
7. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$; $(-1)\bar{a}=-\bar{a}$.

Отношение коллинеарных векторов

Определение 2.13. Отношением коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ называется действительное число λ, равное по модулю отношению длин этих векторов; положительное, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направленные, и отрицательное, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные: $\vec{a}:\vec{b}=\dfrac{\vec{a}}{\vec{b}}=\begin{cases}|\vec{a}|:|\vec{b}|, & \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b},\\ -|\vec{a}|:|\vec{b}|, & \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}.\end{cases}$

По определению равенство $\dfrac{\vec{a}}{\vec{b}} = \lambda$ эквивалентно равенству $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ для любых коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$.

ТЕОРЕМА 2.1 (первый признак коллинеарности векторов). Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. $\lambda\overline{a} = \overline{b}$ (или $\overline{a} = \mu\overline{b}$). Доказательство состоит в применении определений.

<u>Определение 2.14.</u> *Частным* от деления вектора $\overline{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\overline{x}$, произведение которого на делитель λ дает делимый вектор $\vec{a}$: $\lambda\vec{x} = \vec{a}$. Частное $\dfrac{\vec{a}}{\lambda}$ совпадает с произведением $\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\vec{a}$.

Длина частного $\dfrac{\overline{a}}{\lambda}$ равна частному от деления длины вектора $\overline{a}$ на абсолютную величину числа λ: $\left|\dfrac{\overline{a}}{\lambda}\right| = \dfrac{|\overline{a}|}{|\lambda|}$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, а если λ – положительное число, и противоположно ему, если λ – число отрицательное.

Свойства операции деления вектора на число:

1) $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{\lambda} = \dfrac{\overline{a}}{\lambda} + \dfrac{\overline{b}}{\lambda}$;   2) $\alpha\cdot\dfrac{\overline{a}}{\lambda} = \dfrac{\alpha\cdot\overline{a}}{\lambda}$;   3) $\dfrac{\overline{a}}{\mu} : \alpha = \dfrac{\overline{a}}{\alpha\cdot\mu}$.

П р и м е р. Пусть AA_1 – медиана треугольника *ABC*. Доказать, что

$$\overline{AA}_1 = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}.$$

Р е ш е н и е. По правилу сложения векторов имеем $\overline{AA}_1 = \overline{AB} + \overline{BA}_1$, а с другой стороны, $\overline{AA}_1 = \overline{AC} + \overline{CA}_1$.

Складывая эти выражения, получим $2\overline{AA}_1 = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BA}_1 + \overline{CA}_1$. Но векторы $\overline{BA}_1$ и $\overline{CA}_1$ равны по модулю и противоположны по направлению, значит, их сумма равна нулю.

Тогда $\overline{AA}_1 = \dfrac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$.

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Применяя линейные операции, можно составлять суммы векторов, умноженных на числа.

Определение 2.15. Вектор $\vec{u}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, если его можно представить следующим образом: $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – действительные числа, которые называются коэффициентами линейной комбинации.

В этом случае говорят, что вектор $\bar{u}$ разложен по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называют коэффициентами разложения.

Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ называется системой векторов.

Определение 2.16. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одновременно не равные нулю и такие, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю:

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}. \qquad (2.1)$$

В противном случае, векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются *линейно независимыми*, т.е. векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство (2.1) выполняется только с нулевыми коэффициентами

$$\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

Свойства линейной зависимости.

1. Если среди векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ имеется нуль-вектор, то эта система линейно зависима.
2. Система двух или более векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных.
3. Если в системе векторов имеется два равных вектора, то она линейно зависима.
4. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора $\vec{a}_i = \lambda \vec{a}_j$, то она линейно зависима.

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПРЯМУЮ

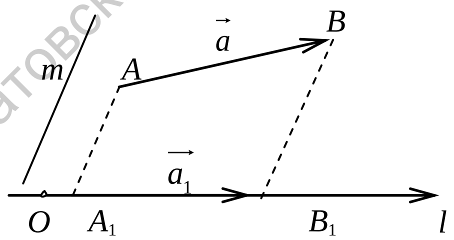


Рис. 2.5

Пусть на плоскости заданы прямые *l*, *m*, вектор $\vec{a}$. Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на прямую *l* параллельно *m* называется вектор $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, началом которого служит проекция A_1 начала *A*, а концом – проекция B_1 конца *B* вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2.5). При этом $AA_1 \parallel m$, $BB_1 \parallel m$. Если прямая *m* перпендикулярна прямой *l*, то проекция называется ортогональной.

Свойства проекции вектора на прямую.

1. Проекции равных векторов на одну и ту же прямую равны между собой.
2. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число.
3. Проекция суммы векторов на какую–либо прямую равна сумме проекций на эту же прямую слагаемых векторов.
4. Длина ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую l равна произведению длины вектора $\overrightarrow{AB}$ на косинус угла наклона вектора $\overrightarrow{AB}$ к прямой l:

$$|np_l \overrightarrow{AB}| = ||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi|.$$

Базис на плоскости

Определение 2.17. Базисом на плоскости называется два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Пусть на плоскости даны три вектора $\vec{a}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, причем $\overrightarrow{e_1}$ не коллинеарен $\overrightarrow{e_2}$. Разложить вектор $\vec{a}$ по двум векторам $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ означает представить $\vec{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$, где x_1, x_2 – числа.

ТЕОРЕМА 2.2. (о разложении вектора по базису на плоскости). Любой вектор $\vec{a}$, принадлежащий плоскости, может быть разложен по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ на этой плоскости, то есть представлен в виде $\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$, где числа x_1, x_2 определяются однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть на плоскости задан базис $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$. Построим прямые l_1, l_2, содержащие базисные векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, соответственно. Эти прямые пересекаются в точке O, так как базисные векторы неколлинеарны. Строим в точке O векторы $\vec{a}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, равные заданным в условии теоремы векторам. Построим проекции вектора $\vec{a}$ на прямую l_1 параллельно l_2 и на прямую l_2 параллельно l_1. Получим вектора $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$, соответственно (рис. 2.6). По правилу сложения векторов $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$.

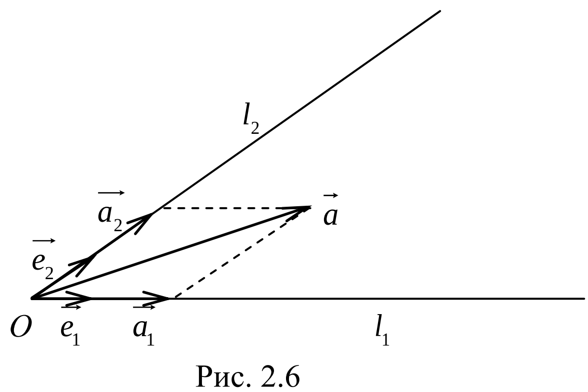


Рис. 2.6

Вектор $\overrightarrow{a_1}$ принадлежит прямой l_1, как и $\overrightarrow{e_1}$, следовательно, он коллинеарен $\overrightarrow{e_1}$. По первому признаку коллинеарности векторов существует число x_1 такое, что $\overrightarrow{a_1} = x_1\overrightarrow{e_1}$. Аналогично, существует число x_2 такое, что $\overrightarrow{a_2} = x_2\overrightarrow{e_2}$. Подставляя эти соотношения в равенство $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, получаем $\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$.

Числа x_1, x_2 называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$. Таким образом, каждому вектору на плоскости взаимнооднозначно соответствует упорядоченная пара чисел (x_1, x_2).

Базис на плоскости называется правым, если кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму происходит против часовой стрелки. Если кратчайший поворот от $\overrightarrow{e_1}$ к $\overrightarrow{e_2}$ происходит по часовой стрелке, то базис называется левым (отрицательным).

Базис в пространстве

Определение 2.18. Базисом в трехмерном пространстве называется тройка некомпланарных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, взятых в определенном порядке.

Пусть в пространстве задан базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Построим прямые l_1, l_2, l_3, содержащие базисные вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что эти прямые пересекаются в одной точке O (рис. 2.7), так как базисные вектора некомпланарны. Постороим проекции $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ вектора $\vec{a}$ на прямые l_1, l_2, l_3. Тогда получим

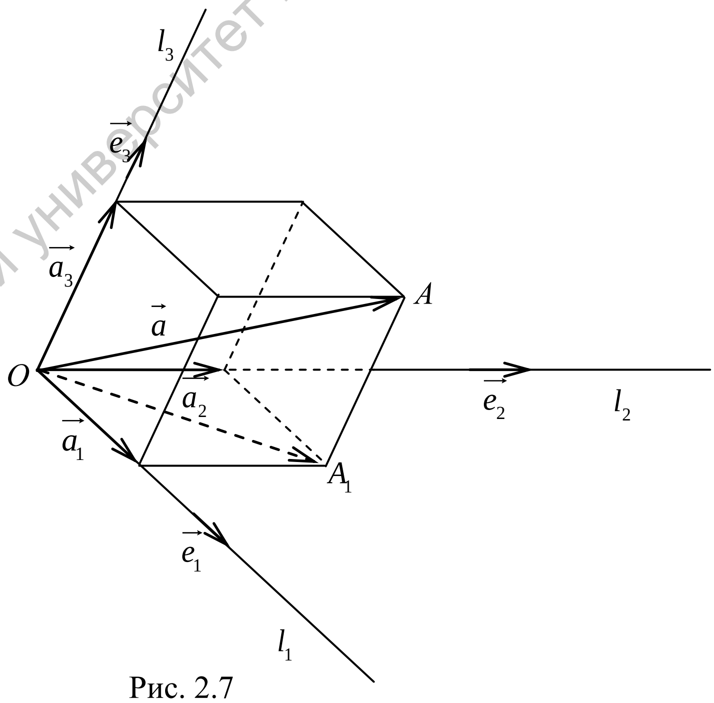


Рис. 2.7

$\vec{a} = \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$. По первому признаку коллинеарности $\overrightarrow{a_1} = x_1\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{a_2} = x_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{a_3} = x_3\overrightarrow{e_3}$. Подставляя эти соотношения в равенство $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$, получаем

$$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}. \tag{2.2}$$

Итак, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. (о разложении вектора по базису в пространстве). Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в пространстве, то есть представлен в виде (2.2), где числа x_1, x_2, x_3 определяются однозначно и называются координатами вектора $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Например, числа 2, -3, 1 являются координатами вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} + \vec{e_3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Базис на плоскости и в пространстве определяется неоднозначно. Например, если $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ – базис в пространстве, то система векторов $\lambda\vec{e_1}, \lambda\vec{e_2}, \lambda\vec{e_3}$ тоже является базисом при любом $\lambda \neq 0$.

Следующие свойства выражают геометрический смысл линейной зависимости и независимости векторов.

ТЕОРЕМА 2.4 (второй признак коллинеарности векторов). Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Доказательство. По первому признаку коллинеарности один из векторов (скажем $\overline{a}$) равен другому, умноженному на число, т.е. $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$ или $\overline{a} - \lambda \cdot \overline{b} = 0$.

Обратно. Если $\lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b} = 0$ (*), и хотя бы одно из чисел λ, μ не равно 0, то деля (*) на него и, применяя первый признак коллинеарности, получим требуемое.

СЛЕДСТВИЕ. Если два вектора $\overline{a}, \overline{b}$ не коллинеарны, то равенство $\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} = 0$ возможно лишь тогда, когда оба числа α, β равны нулю.

ТЕОРЕМА 2.5 (признак компланарности трех векторов). Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Доказательство достаточности аналогично доказательству предыдущей теоремы, необходимо лишь учесть, что равенство $\overline{a} = \beta \cdot \overline{c} + \gamma \cdot \overline{d}$ означает по правилу параллелограмма, что $\overline{a}$ компланарен с $\overline{c}$ и $\overline{d}$.

Необходимость следует из возможности спроецировать один из трех компланарных векторов, отложенных от одной точки, на прямые, содержащие два других (неколлинеарных вектора).

СЛЕДСТВИЕ 1. Любые три вектора на плоскости, два из которых не коллинеарны, являются линейно зависимыми.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если три вектора не компланарны, то равенство

$$\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c} = 0$$

возможно лишь при нулевых коэффициентах, т.е. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

ТЕОРЕМА 2.6. Любые четыре вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ в пространстве (трехмерном) линейно зависимы.

Для доказательства достаточно вектора отложить от одной точки и спроецировать один из них на прямые, содержащие остальные.

Понятие базиса непосредственно связано с понятием линейной независимости. Базис представляет собой упорядоченную совокупность линейно независимых векторов.

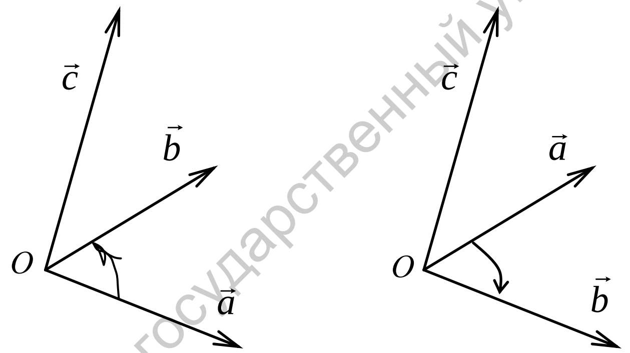
На плоскости – это два линейно независимых вектора, взятые в определенном порядке, а в пространстве – это три линейно независимых вектора, взятые в определенном порядке.

Теоремы (2.4)–(2.6) позволяют говорить, что базис – это полная линейно независимая система векторов в том смысле, что любой вектор линейно выражается через базисные вектора, и эту систему нельзя дополнить каким-либо вектором без потери линейной независимости.

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ТРОЙКИ ВЕКТОРОВ

<u>Определение 2.19.</u> *Ориентированной тройкой векторов* в пространстве называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Тройка некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется *правой* (рис. 2.8, а), если наблюдатель, расположенный в конце третьего вектора, видит направление кратчайшего вращения от первого вектора ко второму против часовой стрелки. Тройка называется *левой* (рис. 2.8, б), если этот же наблюдатель видит кратчайшее направление вращения по часовой стрелке.



а б

Рис. 2.8

Заметим, что если в тройке некомпланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ переставить местами два вектора, то она изменит свою ориентацию, т.е. из правой сделается левой или наоборот. В дальнейшем правую тройку векторов мы будем считать стандартной.

<u>Определение 2.20.</u> Если в тройке векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заменить первый вектор на второй, второй вектор – на третий, а третий вектор – на первый, то такую замену называют *циклической заменой векторов*, а полученную тройку векторов $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ называют результатом циклической замены тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Свойства троек векторов.

1. Если два вектора в тройке поменять местами, то ориентация тройки меняется на противоположную.
2. При циклической замене векторов ориентация тройки сохраняется.

РАДИУС-ВЕКТОР ТОЧКИ

Зафиксируем в пространстве произвольную точку O и назовем ее началом.

Определение 2.21. *Радиус-вектором* произвольной точки M называется вектор $\overline{OM}$.

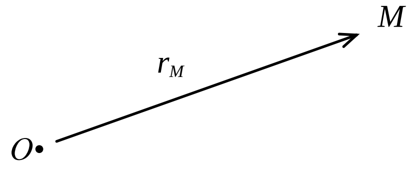


Рис. 2.9

Радиус-вектор точки M обозначается через r_M или $\vec{r}_M$, т.е. $r_M = \overline{OM}$ (рис. 2.9).

Если выбрано начало, то между всеми точками пространства и всеми радиус-векторами установлено взаимно однозначное соответствие: каждой точке M отвечает единственный радиус-вектор r_M, а каждому радиус-вектору r_M отвечает единственная точка M – его конец.

Выражение вектора через радиус-векторы его конца и начала

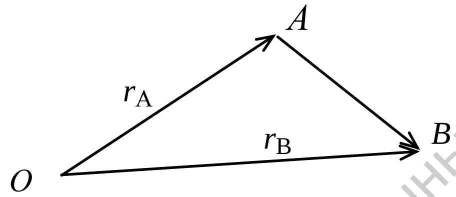


Рис. 2.10

Пусть выбрано начало O и дан вектор $\overline{AB}$. Обозначим радиус-векторы его начала и конца через r_A, r_B (рис. 2.10). Из треугольника AOB получаем выражение вектора через радиус-векторы его конца и начала

$$\overline{AB} = r_B - r_A,$$

т.е. всякий вектор в пространстве равен разности радиус-векторов его конца и начала.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть выбрано начало O и дан вектор $\overline{AB}$, радиус-векторы начала и конца отрезка r_A, r_B, число $\lambda \neq -1$. Разделить отрезок $\overline{AB}$ в отношении λ – означает найти такую точку M на отрезке или его продолжении, что $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$. Определим радиус-вектор r_M точки M.

Для решения задачи выразим векторы $\overline{AM} = r_M - r_A$, $\overline{MB} = r_B - r_M$. Отношение этих коллинеарных векторов по условию равно λ, т.е.

$$\overline{AM} = \lambda \overline{MB},\ r_M - r_A = \lambda (r_B - r_M).$$

Отсюда получается формула деления отрезка в данном отношении:

$$r_M = \frac{r_A + \lambda r_B}{1+\lambda}.$$

Середина отрезка

Рассмотрим частный случай, когда точка M находится в середине отрезка. В этом случае $\lambda=1$. Подставляя это значение в формулу деления отрезка в данном отношении, получаем выражение радиус-вектора середины отрезка:

$$r_M = \frac{r_A + r_B}{2}.$$

Пример. Доказать, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Решение. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда его стороны AB и CD равны и параллельны: $\overline{AB} = \overline{CD}$. Выражая эти векторы через радиус-векторы вершин параллелограмма, получим $r_B - r_A = r_C - r_D$ или $r_B + r_D = r_C + r_A$. Отсюда

$$\frac{r_B + r_D}{2} = \frac{r_C + r_A}{2}.$$

Последнее равенство показывает, что середина диагонали BD совпадает с серединой диагонали AC, т.е. диагонали в точке пересечения делятся пополам.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Равенство векторов и линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число) удобно представлять в координатной форме.

При этом справедливы следующие свойства.

1. Равные векторы имеют равные координаты (в одном и том же базисе).
2. Каждая координата суммы векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых.
3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению этого числа на соответствующую координату вектора.
4. Каждая координата линейной комбинации векторов равна линейной комбинации соответствующих координат векторов.

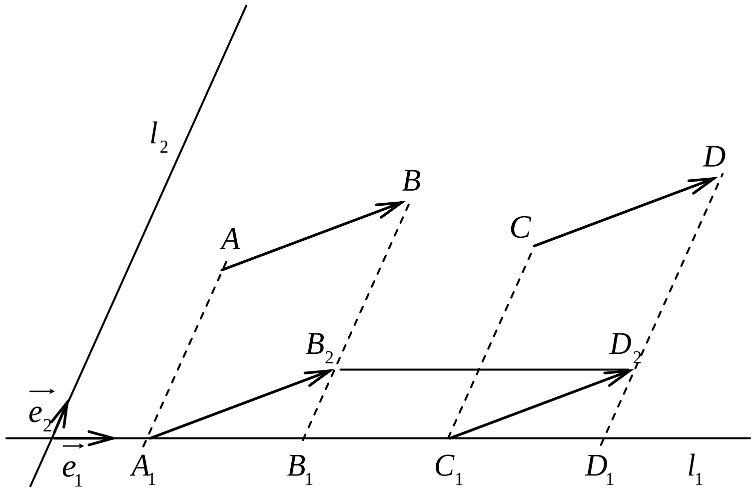


Рис. 2.11

Докажем первое свойство. Пусть на плоскости задан базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. Построим прямые l_1, l_2, содержащие базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ соответственно. Пусть на плоскости даны равные векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, не параллельные прямым l_1, l_2 (рис. 2.11).

Построим равные им векторы $\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C_1D_2} = \overrightarrow{CD}$. Из равенства $\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{C_1D_2}$ следует, что четырехугольник $A_1B_2D_2C_1$ – параллелограмм, а треугольники $A_1B_2B_1$ и $C_1D_2D_1$ равны по стороне и двум прилегающим углам ($A_1B_2 = C_1D_2$, $\angle B_2A_1B_1 = \angle D_2C_1D_1$, $\angle A_1B_1B_2 = \angle C_1D_1D_2$) как с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. А так как по теореме 2.2 $\overrightarrow{A_1B_1} = x_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1} = x_2\vec{e_1}$, то $x_1 = x_2$, то есть равные векторы имеют равные координаты.

Остальные свойства доказываются аналогично.

Основные теоремы (2.2)-(2.6) о разложении вектора по базису устанавливают взаимнооднозначное соответствие между множеством векторов пространства и множеством их координат в данном базисе. А именно, между векторами на прямой и действительными числами, между векторами на плоскости и упорядоченными парами чисел, между векторами в пространстве и упорядоченными тройками чисел. Например, при фиксированном базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ вектору $\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ однозначно соответствует упорядоченная тройка чисел x_1, x_2, x_3 и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел x_1, x_2, x_3 соответствует вектор $\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$. Взаимнооднозначное соответствие (вектор)$\Leftrightarrow$(его координаты) сохраняет линейные операции: сумме векторов соответствует сумма их одноименных координат, произведению вектора на число соответствует произведение его координат на это число. На практике координаты векторов удобно представлять в виде матриц-строк $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ или матриц-столбцов $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Для большинства прикладных практических задач удобно использовать ортонормированные базисы.

Определение 2.22. Базис векторов на плоскости или в пространстве называется *ортонормированным базисом*, если он состоит из взаимно перпендикулярных векторов единичной длины.

Ортонормированный базис векторов на плоскости или в пространстве будем обозначать $\bar{i}, \bar{j}$ или $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно (рис. 2.12): $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$. Базисы на плоскости $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ и в пространстве $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ представляют собой право ориентированные тройки векторов.

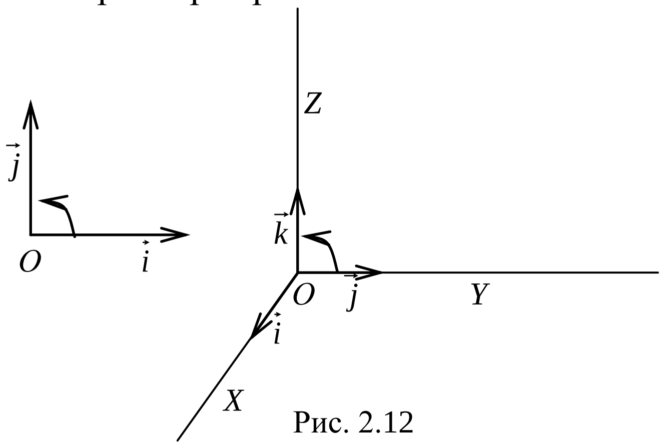


Рис. 2.12

Определим прямоугольную систему координат так, чтобы оси координат были направлены по векторам базиса, а начало координат совпадало с точкой пересечения ортов. Ось Ox (абсцисс) направлена вдоль вектора $\vec{i}$, ось ординат Oy по вектору $\vec{j}$, а ось Oz (аппликат) – по вектору $\vec{k}$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.7. Любой вектор $\vec{a}$ на плоскости может быть единственным образом разложен по базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, то есть может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}, \tag{2.3}$$

где $a_x = \pm |np_x \vec{a}|, a_y = \pm |np_y \vec{a}|$ – модули проекций вектора $\vec{a}$ на оси координат Ox, Oy, их называют координатами вектора $\vec{a}$, $\vec{i}, \vec{j}$ – орты этих осей (рис. 2.13). Здесь берется знак "+", если соответствующие проекция и орт одного направления, и знак "–" в противном случае.

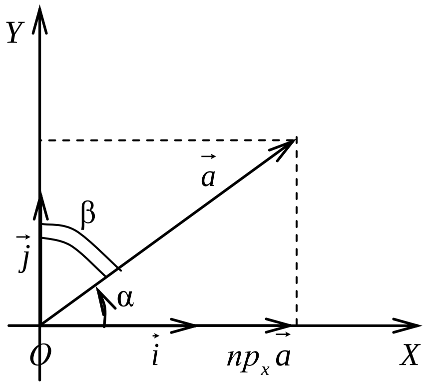


Рис. 2.13

Определение 2.23. Векторы $a_x \bar{i}, a_y \bar{j}$ в представлении (2.3) называются *составляющими* (компонентами) вектора $\bar{a}$ по осям координат.

Длина (модуль) вектора обозначается a или $|\bar{a}|$ и определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (2.4)$$

Направление вектора $\bar{a}$ определяется углами α, β, которые он образует с соответствующими осями координат. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам .

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}. \qquad (2.5)$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \qquad (2.6)$$

Определение координат вектора в пространстве аналогично плоскости. Координаты вектора $\bar{a}$ обозначаются в пространстве через $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$. Таким образом, в пространстве вектор $\bar{a}$ может быть представлен в виде

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad (2.7)$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\bar{a}$.

Аналогичным образом определяются длина (модуль) вектора и направляющие косинусы вектора в пространстве

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (2.8)$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \qquad (2.9)$$

Направляющие косинусы вектора в пространстве связаны аналогичным соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.10)$$

ТЕОРЕМА 2.8. Разложение по базисным векторам в пространстве единственно.

СЛЕДСТВИЕ. Каждый вектор в данном базисе имеет единственные координаты.

ТЕОРЕМА 2.8. (о координатах линейной комбинации векторов). Если вектор $\bar{u}$ равен линейной комбинации векторов $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n$, то соответствующие координаты вектора $\bar{u}$ равны линейной комбинации соответствующих координат векторов $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n$ с теми же коэффициентами, и обратно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Равные векторы имеют равные координаты.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если векторы коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если вектор $\bar{u}$ равен сумме (разности) двух векторов, то его координаты равны сумме (разности) соответствующих координат слагаемых векторов.

Из теоремы следует, что действия над векторами сводятся к действиям над их координатами.

П р и м е р ы.

1. Найти координаты векторов $-\bar{a}$, $5\bar{b}$, $\vec{c} = \bar{a} + \bar{b}$, если $\bar{a}(1; 7; 5)$, $\bar{b}(1; 0; 3)$.

Р е ш е н и е. По второму следствию $-\bar{a}(-1; -7; -5)$, $5 \cdot \bar{b}(5; 0; 15)$. По третьему следствию $\vec{c}(2; 7; 8)$.

2. Доказать, что $\bar{c} = \dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$, если $\bar{a}(4; 1)$, $\bar{b}(6; 13)$, $\bar{c}(5; 7)$.

Р е ш е н и е. $c_x = \dfrac{1}{2}(a_x + b_x) = 5$, $c_y = \dfrac{1}{2}(a_y + b_y) = 7$.

По теореме о линейной комбинации векторов $\bar{c} = \dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$.

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК

Для любой точки M в заданной прямоугольной системе координат можно рассмотреть вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M. Этот вектор называется радиус-вектором точки M. Координатами точки M в прямоугольной системе координат называются координаты ее радиус-вектора в ортонормированном базисе. В пространстве это координаты x, y, z в разложении $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, на плоскости – коэффициенты x, y в разложении $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ с началом в точке $M(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $N(x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной системе координат $OXYZ$. Радиус-векторы $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ представляются в виде $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. По правилу треугольника вычитания векторов получаем $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, то есть вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$. Доказано следующее правило: чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала.

В прямоугольной системе координат расстояние MN между точками $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ находится по формуле

$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. В прямоугольной системе координат каждой точке можно поставить в соответствие ее координаты, причем это соответствие взаимнооднозначно.

(точка) $\Leftrightarrow$ (ее координаты).

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим операцию, которая произведению двух векторов ставит в соответствие число (скаляр). Отсюда и название: *скалярное произведение*.

<u>Определение 2.24.</u> Под *скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, если они оба отличны от нулевого вектора, и равное нулю, если хотя бы один из векторов является нулевым, т.е.

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a},\vec{b}) = ab\cos(\angle \vec{a},\vec{b}), \text{ если } \vec{a} \neq 0 \text{ и } \vec{b} \neq 0;$$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$. (2.11)

Так как $b\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \left|np_{\vec{a}}\, \vec{b}\right|$ и $a\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \left|np_{\vec{b}}\vec{a}\right|$, то можно записать

$$\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot \left|np_{\vec{a}}\, \vec{b}\right| = b \cdot \left|np_{\vec{b}}\, \vec{a}\right|, \tag{2.12}$$

$$\left|np_{\vec{b}}\, \vec{a}\right| = \frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\vec{a}\,\vec{b}, \tag{2.13}$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженного на ортогональную проекцию другого на ось с направлением первого вектора.

<u>Определение 2.25.</u> *Скалярным квадратом* вектора $\bar{a}$ называется скалярное произведение $\bar{a}\bar{a}$.

Геометрические свойства скалярного произведения.

1. Косинус угла φ между двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется формулой $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
2. Скалярное произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Скалярное произведение положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами острый, и отрицательно, если тупой.
4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, т.е. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

5. Длина вектора равна квадратному корню из его скалярного квадрата, т.е. $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Алгебраические свойства скалярного произведения.

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.
2. $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$.
3. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.
4. $(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}, \bar{c}) = \lambda(\bar{a}, \bar{c}) + \mu(\bar{b}, \bar{c})$, где λ и μ – скаляры.

Физический смысл скалярного произведения

Пусть постоянная сила $\bar{F}$ обеспечивает прямолинейное перемещение $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$ материальной точки M (рис. 2.14). Если сила $\bar{F}$ образует угол φ с перемещением $\bar{s}$, то из физики известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{s}$ равна $A = Fs\cos\varphi$.

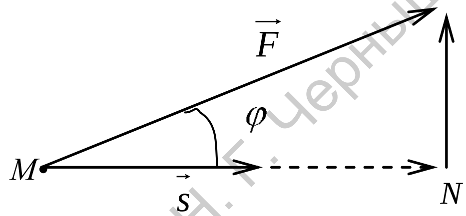


Рис. 2.14

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки приложения этой силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть известно разложение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} , \tag{2.14}$$

$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} . \tag{2.15}$$

Необходимо выразить скалярное произведение векторов через их координаты. Так как базисные орты взаимно перпендикулярны, то их скалярные произведения $\bar{i}\,\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\,\bar{i} = 0$. Каждый орт имеет длину 1, следовательно, $\bar{i}\,\bar{i} = \bar{j}\,\bar{j} = \bar{k}\,\bar{k} = 1$.

Умножая $\bar{a}$ на $\bar{b}$ и используя при преобразованиях алгебраические свойства скалярного произведения, получим выражение скалярного произведения векторов через их координаты

$$\bar{a}\,\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_xa_x(\vec{i}\vec{i}) + a_xb_y(\vec{i}\vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}\vec{k}) +$$
$$+ a_yb_x(\vec{j}\vec{i}) + a_yb_y(\vec{j}\vec{j}) + a_yb_z(\vec{j}\vec{k}) + a_zb_x(\vec{k}\vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}\vec{j}) + a_zb_z(\vec{k}\vec{k}) =$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\bar{a}\,\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \tag{2.16}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат. Отсюда, обозначая через φ угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, получим

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}\sqrt{b^2{}_x + b^2{}_y + b^2{}_z}}. \tag{2.17}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов примет вид

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.18}$$

В случае плоскости исключением из (2.16) пространственной координаты получается выражение

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Скалярный квадрат, выраженный в координатах, принимает вид

$$\bar{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \qquad \bar{a}^2 = a_x^2 + a_y^2$$

для пространства и плоскости соответственно, т.е. равен сумме квадратов координат, а длина вектора в пространстве и на плоскости выражается через его координаты с помощью формул

$$|\bar{a}| = \sqrt{|\bar{a}|^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \bar{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

П р и м е р ы.

1. Скалярное произведение применяется для установления перпендикулярности двух векторов.

Доказать, что диагонали в ромбе взаимно перпендикулярны.

Р е ш е н и е. Обозначим в ромбе $ABCD$ векторы $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$. Тогда диагонали ромба выражаются как $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\overline{DB} = \bar{a} - \bar{b}$, и нужно установить перпендикулярность этих векторов. Вычислим скалярное произведение: $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2 = 0$ (так как стороны ромба равны: $|\bar{a}| = |\bar{b}|$). Следовательно, векторы $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ взаимно перпендикулярны.

2. Найти длину вектора $\bar{a}(3; 4)$.

Р е ш е н и е. $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5$.

3. Скалярное произведение применяется для нахождения косинуса угла между двумя векторами.

Найти косинус угла φ между векторами $\bar{a}(1; 3)$, $\bar{b}(3; 4)$.

Р е ш е н и е. $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{25}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

ВЕКТОРНОЕ *N*-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Числовые данные, используемые на практике или в науке, нередко представляют собой списки чисел, каждое из которых имеет определенный смысл. В экономике таковы, например: прейскуранты, то есть списки цен различных товаров; объемы продукции разных видов, выпущенных предприятием за квартал, и тому подобное. Математическим образом списка такого типа является вектор.

<u>Определение 2.26</u>. Пусть n – любое натуральное число. Упорядоченная совокупность n чисел $a_1, a_2,..., a_n$ называется n-мерным вектором; будем обозначать векторы малыми латинскими буквами со стрелками над ними: $\vec{a} = (a_1, a_2,..., a_n) = \vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$; числа $a_1, a_2,..., a_n$ называются координатами вектора, число n – его размерностью.

Два n-мерных вектора называются равными, если их одноименные (имеющие один и тот же номер) координаты равны.

Вектор, все координаты которого нули, называется нулевым, или нуль-вектором, и обозначается так: $\vec{0}$.

Определим линейные действия над векторами: сложение, вычитание, умножение на число.

<u>Определение 2.27</u>. Суммой двух n-мерных векторов $\vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$ и $\vec{b}(b_i, i=\overline{1,n})$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$, каждая координата которого рана сумме одноименных координат слагаемых векторов:

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1;...; a_n+b_n). \tag{2.19}$$

<u>Определение 2.28</u>. Разностью между n-мерными векторами $\vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$ и $\vec{b}(b_i, i=\overline{1,n})$ называется n-мерный вектор, обозначаемый $\vec{a}-\vec{b}$, каждая координата которого равна разности между одноименными координатами векторов $\vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$ и $\vec{b}(b_i, i=\overline{1,n})$:

$$\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1;...; a_n-b_n). \tag{2.20}$$

Например, если векторы $\vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$ и $\vec{b}(b_i, i=\overline{1,n})$ являются записями объемов n видов продукции, выпущенной предприятием соответственно в первом и втором кварталах, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ представляет собой запись объемов выпуска предприятием этих видов продукции за полугодие, а вектор $\vec{a}-\vec{b}$ показывает рост объемов выпуска продукции во втором квартале по сравнению с первым.

<u>Определение 2.29</u>. Произведением числа λ на n-мерный вектор $\vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, каждая координата которого равна произведению числа λ на одноименную координату вектора $\vec{a}(a_i, i=\overline{1,n})$:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1;...;\lambda a_n). \qquad (2.21)$$

Например, если объемы выпуска продукции n видов в январе, феврале и марте одинаковы и каждый из них описывается вектором $\vec{a}$, то $3\vec{a}$ – вектор выпуска этих видов продукции в первом квартале.

Определение 2.30. Множество n-мерных векторов, для которых указанным образом определены свойства сложения, вычитания и умножения на число, называют n-мерным векторным пространством и обозначают символом R^n (множество R^1 совпадает с множеством всех действительных чисел R).

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^n$; $\lambda, \mu \in R$. Перечислим свойства линейных действий над векторами:

сложение векторов

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность);
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ассоциативность);
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

умножение вектора на число

4. $\lambda\mu(\vec{a}) = \lambda(\mu\vec{a})$ (ассоциативность);
5. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);
6. $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);
7. $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;
8. $\lambda\vec{0}=\vec{0}$;
9. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$.

Все эти свойства легко доказать, используя аналогичные свойства чисел и определения действий над векторами.

Двумерные и трехмерные векторы имеют геометрическую интерпретацию: они изображаются направленными отрезками на плоскости и в пространстве как это было показано в предыдущих разделах этой главы.

Определение 2.31. Длиной (нормой) вектора $\vec{a} = (a_1, a_2,..., a_n)$ называется арифметический квадратный корень из суммы квадратов координат этого вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+...+a_n^2}. \qquad (2.22)$$

Определение 2.32. Угол φ называется углом между векторами $\vec{a} = (a_1, a_2,..., a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2,..., b_n)$, если справедливо равенство

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + ... + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2}}. \qquad (2.23)$$

Два ненулевых вектора на плоскости или в пространстве перпендикулярны в том и только том случае, если их скалярное произведение нулю. Действительно, по определению

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Распространяя отношение перпендикулярности на пространство R^n, введем следующее понятие.

<u>Определение 2.33</u>. Два n-мерных вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Пример.

С помощью скалярного произведения можно определить и произведение двух n-мерных вектор-строк (или вектор-столбцов). Для примера рассмотрим аквариум, в котором содержится n_1 рыб одного вида, n_2 рыб второго вида и n_3 рыб третьего вида. Естественно определить популяционный вектор как $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Для средней рыбы первого вида в день может потребоваться q_1 единиц пищи, для второго и третьего вида соответствующие потребности составляют q_2 и q_3. Вектор потребностей есть $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Тогда общая дневная потребность в пище всей популяции равна $n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3$.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Матрицы

Пусть имеется $m \times n$ произвольных, не обязательно различных, действительных чисел. Эти числа можно расположить в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов.

<u>Определение 2.34.</u> Прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$ (читается "эм на эн").

Пример. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица размера 2×3.

Каждое число определяется номером строки и номером столбца, на пересечении которых оно находится. Например, число -1 находится во второй строке и первом столбце.

Элемент матрицы (число), стоящий в общем случае в i-й строке и j-м столбце обозначается a_{ij} (b_{ij}, c_{ij} и т.д.). Сами матрицы обозначаются прописными буквами: A, B, C... Запись $A = (a_{ij})_{mn}$ обозначает матрицу A размера $m \times n$ с элементами a_{ij}, где i=1,2,...,m, j=1,2,...,n.

Определение 2.35. *Квадратной матрицей* размера n называется матрица, состоящая из n строк и n столбцов.

Главная диагональ квадратной матрицы – это элементы $a_{11}, a_{22},...,a_{nn}$.

Побочная диагональ квадратной матрицы – это элементы $a_{1n}, a_{2n-1},...,a_{n1}$.

Определение 2.36. *Единичной матрицей* называется квадратная матрица, элементы которой определяются по формуле

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Например, единичная матрица, состоящая из трех строк и трех столбцов, выглядит следующим образом $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что элементами главной диагонали единичной матрицы являются единицы, а все остальные – нули.

Единичная матрица обозначается E.

Определение 2.37. *Нулевой матрицей* называется матрица (любого размера), все элементы которой – нули. Нулевая матрица обозначается O.

Определитель второго порядка

Пусть дана квадратная матрица A размера 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определение 2.38. *Определителем второго порядка* матрицы A называется число, равное разности произведения элементов главной и произведения элементов побочной диагонали матрицы: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель второго порядка обозначается следующим образом:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -5$.

Определитель третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка 3:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.39. *Определителем третьего порядка* матрицы A называется следующая алгебраическая сумма произведений элементов определителя:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематично формулу для вычисления определителя третьего порядка можно изобразить так:

$$D=\begin{pmatrix} \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \otimes & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \circ & \otimes & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \\ \otimes & \circ & \circ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \circ & \circ & \otimes \\ \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \otimes & \circ \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \circ & \circ & \otimes \\ \circ & \otimes & \circ \\ \otimes & \circ & \circ \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \circ & \otimes & \circ \\ \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \\ \circ & \otimes & \circ \end{pmatrix}.$$

При использовании схемы для вычисления определителей следует обращать внимание на знаки в слагаемых суммы.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. При вычислении определителя воспользуемся приведенной схемой.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}= 1\cdot 3\cdot(-3)+2\cdot(-1)\cdot 0+0\cdot(-2)\cdot 2-0\cdot 3\cdot 0-$$

$$-2\cdot(-2)\cdot(-3)-1\cdot(-1)\cdot 2=$$

$$=-9+0+0+0-12+2=-19.$$

Вычисление определителей *n*-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу A размера n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее пунктирной линией обозначается продолжение записи элементов матрицы или определителя.

Матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, которое будем называть *определителем* матрицы n-го порядка и обозначать D. Дадим его определение по индукции. Рассмотрим элемент a_{ij} квадратной матрицы $A=(a_{ij})$, где $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,n$. Вычеркнем i-ю строку и j-й столбец матрицы. Останется матрица порядка n–1. Обозначим ее определитель через D_{ij} и будем D_{ij} называть *минором* элемента a_{ij}.

<u>Определение 2.40.</u> Величина $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Из определений минора и алгебраического дополнения видно, что они будут различаться только знаком. Если сумма индексов $i+j$ – четная, они равны, если – нечетная, будут отличаться знаком.

Пример. Дан определитель $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. Найти минор и алгебраическое дополнение элемента 3.

Решение. Элемент 3 расположен во второй строке и втором столбце матрицы. Чтобы получить минор этого элемента необходимо вычеркнуть вторую строку, второй столбец и вычислить оставшийся определитель второго порядка: $D_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-0=-3$.

Для вычисления алгебраического дополнения этого элемента необходимо полученный минор умножить на $(-1)^{2+2}=1$, т.е. $A_{22}=(-1)^{2+2}D_{22}$. В данном случае (сумма индексов элемента – четная) значения минора и алгебраического дополнения будут совпадать.

<u>Определение 2.41.</u> Определитель матрицы равен сумме произведений элементов одной строки на их алгебраические дополнения:

$$D=\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

ТЕОРЕМА 2.9. Приведенное определение не противоречиво, т.е. число D не зависит от того по какой строке раскладывать определитель, т.е. равно i.

Доказательство этой теоремы проводится методом математической индукции и весьма громоздко. Аналогично можно показать, что определитель может быть получен в результате разложения по любому столбцу.

Вычислим определитель 3-го порядка из предыдущего примера, разложив его по элементам первой строки:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}D_{11}+2\cdot(-1)^{1+2}D_{12}+0\cdot(1)^{1+3}D_{13}=$$
$$=(3\cdot(-3)-(-1)\cdot2)-2\cdot((-2)\cdot(-3)-(-1)\cdot0)+0=-7-12=-19.$$

Примеры.

1. Вычислить определитель единичной матрицы.

Р е ш е н и е. Разложим определитель порядка n по первой строке. Так как в строке только один элемент отличен от нуля, получится только один определитель $(n–1)$-го порядка:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель порядка $n–1$ опять разложим по первой строке. Повторяя операции n раз, получим, что данный определитель равен 1.

2. Вычислить определитель, у которого все элементы ниже главной диагонали равны 0.

Р е ш е н и е. Разложим определитель порядка n по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель порядка $n–1$ опять разложим по первой строке. Повторяя операции n раз, получим, что данный определитель равен произведению элементов главной диагонали $a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}$.

3. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам второй строки.

Р е ш е н и е. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} + +5(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

1. Определитель не меняется, если строки поменять местами со столбцами.
   Из этого свойства следует, что строки и столбцы определителя равноправны и все свойства, справедливые для строк, справедливы и для столбцов.
2. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей:
   $$\det AB=\det A \det B.$$
3. Определитель, у которого строка (столбец) состоит из нулей, равен нулю.
4. Если в определителе переставить местами две строки (столбца), то определитель изменит знак.

5. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
6. Если в i-й строке (столбце) все элементы представлены суммами, то $\det A = \det A_1 + \det A_2$, где A_1 и A_2 отличаются от A только i-й строкой (столбцом): у A_1 в i-й строке (столбце) стоят первые слагаемые сумм, а у A_2 – вторые слагаемые.
7. Значение определителя не изменится, если одну строку (столбец) заменить на сумму или разность этой строки (столбца) и любой другой строки (столбца) определителя. (В случае разности заменять следует ту строку (столбец), из которой вычитали.)
8. Если в определителе все элементы одной строки (столбца) разделить на α, то значение определителя уменьшиться в α раз.
9. Определитель, у которого одна строка (столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов), равен нулю.

Используя свойства определителя, можно значительно упростить процесс вычисления определителей высоких порядков.

П р и м е р. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Для упрощения вычислений, прежде чем применять теорему (2.9), следует, соблюдая равенство, преобразовать исходный определитель так, чтобы в получившемся определителе в какой-либо строке или столбце было как можно больше нулей (все, кроме одного). Этого можно добиться, складывая или вычитая строки (столбцы) определителя и выносtotal
множитель из строки (столбца) за знак определителя (по свойствам определителя его значение при этом не изменится).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вычтем из} \\ \text{первой строки} \\ \text{вторую} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{прибавим ко} \\ \text{второму столбцу} \\ \text{первый} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим по элементам} \\ \text{первой строки} \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{вычтем из второй} \\ \text{строки третью} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{прибавим ко второму} \\ \text{столбцу третий} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{разложим по элементам} \\ \text{второй строки} \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 .$$

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Операция векторного произведения, как и скалярного, применяется к двум векторам, рассматриваемым как сомножители. Однако результатом векторного произведения двух векторов является новый вектор, длина и направление которого вычисляются по определенным правилам.

<u>Определение 2.42.</u> Под *векторным произведением двух неколлинеарных векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается новый вектор

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \equiv [\bar{a}\bar{b}], \tag{2.24}$$

который удовлетворяет трем условиям:

1) длина векторного произведения равна произведению длин перемножаемых векторов и синуса угла между ними:

$$\left| [\bar{a}\bar{b}] \right| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\angle \bar{a}, \bar{b}), \tag{2.25}$$

2) векторное произведение перпендикулярно перемножаемым векторам (иначе говоря, перпендикулярно плоскости построенного на них параллелограмма), т.е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$,
3) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторным произведением двух коллинеарных векторов называется нулевой вектор.

Свойства векторного произведения.

5. При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль

$$[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]. \tag{2.26}$$

6. Векторный квадрат равен нуль-вектору: $[\bar{a}\bar{a}] = 0$.
7. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. если λ – скаляр, то

$$[(\lambda\bar{a})\bar{b}] = [\bar{a}(\lambda\bar{b})] = \lambda [\bar{a}\bar{b}]. \tag{2.27}$$

8. $[(\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}\bar{c}] + [\bar{b}\bar{c}]$.
9. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах:

$$c = |\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\angle \vec{a}\vec{b}), \quad (0 \le \varphi \le \pi). \tag{2.28}$$

Физический смысл векторного произведения

Если F – сила, приложенная к точке M, то момент $m_A(F)$ этой силы относительно точки A равен векторному произведению векторов $\overline{AM}$ и F, т.е.

$$m_A(F) = \overline{AM}F. \qquad (2.29)$$

В частности, момент относительно начала координат

$$m_0(F) = rF,$$

где r – радиус-вектор точки приложения силы.

Векторное произведение в координатной форме

Найдем векторное произведение векторов $\bar a(a_x, a_y, a_z)$, $\bar b(b_x, b_y, b_z)$, заданных своими координатами в базисе $\bar i, \bar j, \bar k$. Имеем

$$\bar a = a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k, \qquad (2.30)$$

$$\bar b = b_x \bar i + b_y \bar j + b_z \bar k. \qquad (2.31)$$

Найдем сначала векторные произведения векторов $\bar i, \bar j, \bar k$ базиса в пространстве. Из определения векторного произведения следует, что для ортов $\bar i, \bar j, \bar k$ справедлива следующая “таблица умножения”:

$$\bar i\bar j = \bar k, \quad \bar j\bar k = \bar i, \quad \bar k\bar i = \bar j,$$
$$\bar j\bar i = -\bar k, \quad \bar k\bar j = -\bar i, \quad \bar i\bar k = -\bar j,$$
$$\bar i\bar i = \bar j\bar j = \bar k\bar k = 0,$$

так как тройка базисных векторов $\bar i, \bar j, \bar k$ правая по определению.

Перемножим векторно $\bar a$ и $\bar b$ из (2.30), (2.31), используя свойства векторного произведения и понятие определителя 3-го порядка.

Получим

$$\bar a\bar b = (a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k)(b_x \bar i + b_y \bar j + b_z \bar k) =$$

$$= a_x b_y\, \bar i\bar j + a_x b_z\, \bar i\bar k + a_y b_x\, \bar j\bar i + a_y b_z\, \bar j\bar k + a_z b_x\, \bar k\bar i + a_z b_y\, \bar k\bar j =$$

$$= \bar i\,(a_y b_z - a_z b_y) - \bar j\,(a_x b_z - a_z b_x) + \bar k\,(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \bar i \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \qquad (2.32)$$

(с сохранением порядка следования букв x, y, z).

Для удобства запоминания формула (2.32) записывается в виде определителя третьего порядка

$$[\bar a \bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.33)$$

Векторное произведение двух векторов в координатах равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят базисные векторы $\bar i, \bar j, \bar k$, во второй строке – координаты первого вектора-сомножителя, а в третьей строке – координаты второго вектора.

Из формулы (2.32) следует, что

$$[\bar a \bar b]^2 = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2. \qquad (2.34)$$

Геометрически формула (2.34) дает квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$.

Длина векторного произведения в координатах

На основании формулы (2.34) для векторного произведения двух векторов получаем выражение его длины в координатах

$$|[\bar a \bar b]| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Векторное произведение можно применить при вычислении площади треугольника и параллелограмма.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a(a_x, a_y, a_z)$, $\bar b(b_x, b_y, b_z)$, обозначим через $S_{пар}$, а площадь треугольника, построенного на этих векторах, – через $S_{тр}$.

$$S_{пар} = |[\bar a \bar b]|, \quad S_{тр} = \frac{1}{2}|[\bar a \bar b]|.$$

Тогда

$$S_{пар} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2},$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

П р и м е р. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar a(0; 2; 4)$, $\bar b(1; -1; 1)$.

Р е ш е н и е.

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 14.$$

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 2.43. Под *смешанным* (или векторно-скалярным) произведением трех векторов, $\bar{a}$ $\bar{b}$ и $\bar{c}$ понимается число, равное векторному произведению первых двух векторов, скалярно умноженному на третий вектор, т.е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]\cdot\bar{c}. \tag{2.35}$$

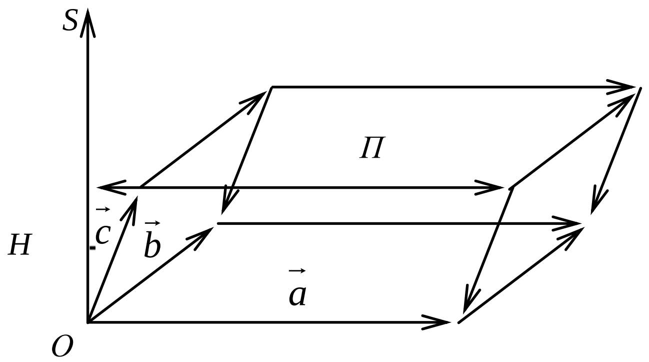


Рис. 2.15

Построим параллелепипед *П* (рис. 2.15), ребрами которого, исходящими из общей вершины *O*, являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Тогда $S = \left|[\bar{a}\bar{b}]\right|$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. является площадью основания параллелепипеда. Высота *H* этого параллелепипеда равна

$$H = \pm\left|np_{\bar{S}}\bar{c}\right| = \pm c\cos\varphi, \tag{2.36}$$

где $\vec{S} = [\bar{a}\bar{b}]$ и знак плюс соответствует острому углу $\varphi = \angle(\bar{c},\bar{S})$, а знак минус – тупому углу φ. В первом случае векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую, а во втором – левую тройку.

На основании определения скалярного произведения имеем

$$\overline{abc} = [\bar{a}\bar{b}]\cdot\bar{c} = \bar{S}\cdot\bar{c} = S\cdot\left|np_{\bar{S}}\bar{c}\right| = \pm SH = \pm V, \tag{2.37}$$

где V – объем параллелепипеда *П*, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Отсюда $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \pm V$, т.е. смешанное произведение трех векторов равно объему *V* параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти вектора образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения.

1. Знак смешанного произведения $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ зависит от ориентации тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая.
2. Смешанное произведение не меняет знак при циклической перестановке его сомножителей:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}.$$

3. При перестановке двух соседних множителей смешанное произведение меняет свой знак на противоположный, т.е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}.$$

4. Чтобы умножить векторное произведение на число λ, достаточно любой сомножитель умножить на λ:

$$\lambda(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\lambda\bar{a})\bar{b}\bar{c} = \bar{a}(\lambda\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{b}(\lambda\bar{c}).$$

5. Дистрибутивные законы:

$$(\bar{a} + \bar{a}')\bar{b}\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}'\bar{b}\bar{c},$$

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{b}')\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}'\bar{c},$$

$$\bar{a}\bar{b}(\bar{c} + \bar{c}') = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}'.$$

ТЕОРЕМА 2.10 (необходимое и достаточное условие компланарности векторов). Для того чтобы векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение этих векторов равнялось нулю:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{0} \tag{2.38}$$

Доказательство следует из того, что вектор $[\bar{a}\bar{b}]$ перпендикулярен с $\bar{c}$ тогда и только тогда, когда $\bar{c}$ компланарен с $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Смешанное произведение векторов
в координатной форме

Найдем выражение смешанного произведения векторов через координаты векторов-сомножителей:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}, \tag{2.39}$$

$$\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}.$$

Используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений векторов, получим

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]\cdot\bar{c} = [\bar{b}\bar{c}]\cdot\bar{a} = \bar{a}\cdot[\bar{b}\bar{c}] = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.40}$$

Смешанное произведение векторов в координатах равно определителю третьего порядка, строками которого являются координаты перемножаемых векторов.

П р и м е р ы.

1. Компланарны ли векторы $\bar{a}(1; 0; 3)$, $\bar{b}(3; 5; 7)$, $\bar{c}(1; 2; -1)$?

Р е ш е н и е. Они не компланарны, поскольку смешанное произведение

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

2. Определить ориентацию тройки $\bar{a}(1; 0; 3)$, $\bar{b}(3; 5; 7)$, $\bar{c}(1; 2; -1)$.

Р е ш е н и е. Тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая, так как смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -16 < 0$.

3. Смешанное произведение векторов применяется для определения объема параллелепипедов и тетраэдров, построенных на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Объемы соответственно равны:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|, \; V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}(1; 0; 3)$, $\bar{b}(3; 5; 7)$, $\bar{c}(1; 2; -1)$.

Р е ш е н и е. $V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = |-16| = 16$.

4. Кооператив производит и продает товары по ценам, которые характеризуются вектором цены $\vec{p} = (11, 17, 9, 18)$, а объемы продаж определяются вектором $\vec{q} = (500, 190, 270, 300)$. Вычислить прибыль кооператива, если суммарные издержки на реализацию составляют 12000 денежных единиц.

Решение.

Суммарный доход от продаж кооператива определятся скалярным произведением векторов $\vec{p}, \vec{q}$:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 11 \cdot 500 + 17 \cdot 190 + 9 \cdot 270 + 18 \cdot 300 = 16650.$$

Прибыль кооператива равна разности между суммарным доходом и суммарными издержками $P = 16650 - 12000 = 4650$.

5. Пусть заданы вектора $\vec{a}(2; -1; 6)$, $\vec{b}(-3; 4; -2)$. Определить угол между ними.

Решение.

Найдем длины векторов

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{41}, \; \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}.$$

Определим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = -22.$$

Тогда $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-22}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{29}} < 0,$ то есть угол тупой.

6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = (-2;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (3;\ -1;\ 4)$ как на сторонах.

Решение.

По геометрическому смыслу векторного произведения площадь треугольника определяется формулой $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|[\vec{a}\ \vec{b}]\right|$,

$$[\vec{a}\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(8+3) - \vec{j}\,(-8-9) + \vec{k}\,(2-6) = 11\vec{i} + 17\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Окончательно получаем

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + 17^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{426}.$$

7. Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(-2;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(3;\ -1;\ 4)$, $\vec{c}(2;\ 3;\ -4)$.

Решение.

Объем пирамиды вычисляется как шестая часть объема параллелепипеда

$$V_{пир} = \frac{1}{6}|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\left(-2(4-12) - 2(-12-8) + 3(9+2)\right) =$$

$$= \pm\frac{1}{6}(16 + 40 + 33) = \frac{89}{6}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

1. Дайте определение связанного вектора, его направления и длины.
2. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов.
3. Дайте определения: равных векторов, единичного вектора, противоположного вектора.
4. Дайте определение операции сложения векторов: по правилу треугольника; по правилу параллелограмма; по правилу многоугольника.
5. Опишите свойства операции сложения векторов.
6. Дайте определение операции вычитания векторов.
7. Дайте определение операции умножения вектора на число.
8. Опишите свойства операции умножения вектора на число.

9. Сформулируйте первый признак коллинеарности и дайте его доказательство.
10. Дайте определения: линейной комбинации системы векторов; линейно зависимой системы векторов и сформулируйте свойства линейной зависимости.
11. Сформулируйте понятие проекции вектора на прямую и свойства проекции вектора на прямую.
12. Дайте определение базиса на плоскости.
13. Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по базису на плоскости.
14. Дайте определение базиса в пространстве.
15. Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по базису в пространстве.
16. Сформулируйте и докажите второй признак коллинеарности векторов.
17. Сформулируйте признак компланарности трех векторов.
18. Сформулируйте и поясните теорему о линейной зависимости любых четырех векторов в пространстве.
19. Дайте определение ориентированной тройки векторов и сформулируйте свойства троек векторов.
20. Дайте понятие радиус-вектора точки, а также выражение вектора через радиус-векторы его конца и начала.
21. Выведите формулу деления отрезка в данном отношении.
22. Сформулируйте свойства линейных операций над векторами в координатной форме.
23. Докажите свойство: равные векторы имеют равные координаты.
24. Дайте определение ортонормированного базиса.
25. Сформулируйте теоремы о разложении вектора по базису на плоскости и в пространстве. Определите длину вектора и направляющие косинусы векторов.
26. Сформулируйте теорему о координатах линейной комбинации векторов, а также следствия из теоремы.
27. Выведите формулу координат вектора через координаты точек начала и конца.
28. Дайте определение скалярного произведения векторов. Поясните геометрическое свойство.
29. Сформулируйте алгебраические свойства скалярного произведения и поясните физический смысл скалярного произведения.
30. Выразите скалярное произведение в координатах.
31. Запишите формулу длины вектора, условие перпендикулярности векторов в координатах.

32. Дайте определение n-мерного вектора и определите линейные операции с ним.
33. Дайте определение n-мерного векторного пространства и запишите свойства линейных операций.
34. Дайте определения матрицы, единичной и нулевой матриц.
35. Запишите правила нахождения определителей 2-го и 3-го порядков.
36. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
37. Сформулируйте правило вычисления определителя квадратной матрицы произвольного порядка.
38. Запишите свойства определителей.
39. Дайте определение векторного произведения векторов.
40. Запишите свойства векторного произведения.
41. Выведите выражение векторного произведения в координатах.
42. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов.
43. Запишите свойства смешанного произведения векторов.
44. Выразите смешанное произведение векторов в координатах.

Глава 3. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

В аналитической геометрии свойства линий изучаются с помощью их уравнений. При этом в одних случаях уравнение линии составляют в соответствии с ее геометрическими особенностями, а в других – по уравнению находят свойства соответствующих линий. В пособии первый способ применен при изучении прямой линии и окружности, а второй – при изучении кривых второго порядка.

Линия l представляет собой множество точек плоскости, обладающих геометрическими свойствами, присущими только им.

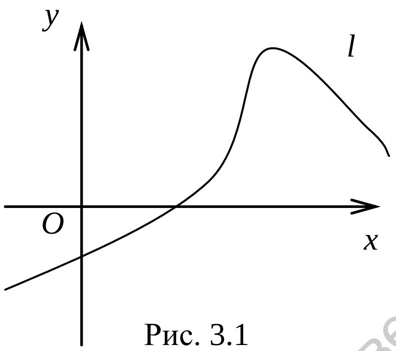


Рис. 3.1

Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат и линия l (рис. 3.1).

Определение 3.1. *Уравнением линии* l относительно заданной системы координат называется уравнение вида

$$F(x,y)=0, \qquad (3.1)$$

которому удовлетворяют координаты $(x; y)$ любой точки линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии.

Величины x и y рассматриваются как координаты переменной точки линии, поэтому их называют *текущими координатами*.

Если (3.1) является уравнением линии l, то говорят, что (3.1) определяет линию.

Примеры.

1. Уравнение $x–y=0$ эквивалентно уравнению $y=x$ и определяет прямую, являющуюся биссектрисой I и III координатных углов.

2. Уравнению $x^2+y^2=0$ удовлетворяет одна точка (0; 0). Такую линию называют вырожденной.

3. Уравнение $x^2+y^2+1=0$ не имеет решения и никакой линии на плоскости не определяет.

Понятие уравнения линии дает возможность сводить геометрические задачи к алгебраическим.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат и некоторая прямая l, проходящая через точку $B(0; b)$ и составляющая с положительной полуосью абсцисс угол φ (рис. 3.2).

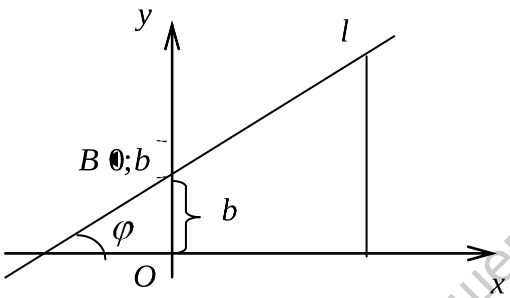


Рис. 3.2

<u>Определение 3.2.</u> *Углом наклона прямой* к оси Ox называется наименьшее положительное значение угла φ, на который надо повернуть ось Ox против часовой стрелки, чтобы ее направление совпало с одним из направлений прямой (рис. 3.2).

<u>Определение 3.3.</u> Величина $k = \operatorname{tg}\varphi$ называется *угловым коэффициентом* прямой.

Рассмотрим прямую, для которой $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Пусть $M(x; y)$ –произвольная точка на заданной прямой (рис. 3.3). В $\Delta MBN: \dfrac{MN}{BN} = tg\,\varphi, \quad MN = y - b,\ BN = x.$

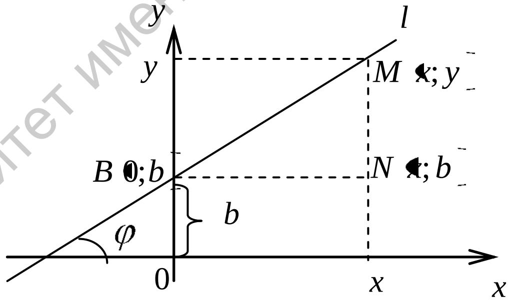


Рис. 3.3

Тогда $\dfrac{y-b}{x} = k,$ откуда

$$y = kx + b. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) носит название уравнения с угловым коэффициентом.

При $\varphi = 0$ значение k=0 и прямая будет параллельна оси Ox.

Величина b определяет ординату точки пересечения прямой с осью Oy или отрезок, отсекаемой этой прямой на оси ординат.

Таким образом, если известен угловой коэффициент и величина b, то уравнение прямой определяется уравнением (3.2).

Пример. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок b= –3 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Находим угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Воспользовавшись уравнением (3.2), получаем искомое уравнение прямой:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3.$$

Уравнение вида (3.2) можно написать для любой прямой, не параллельной оси ординат, и всякое уравнение вида (3.2) является уравнением прямой, не параллельной оси ординат. Прямая, параллельная оси ординат, не имеет углового коэффициента, так как $tg\frac{\pi}{2}$ не существует. Такие прямые имеют уравнение следующего вида:

$$x = a, \tag{3.3}$$

где a – абсцисса точки пересечения данной прямой с осью абсцисс.

Действительно, координаты любой точки $M(a; y)$ этой прямой удовлетворяют уравнению (3.3) $x + 0 \cdot y = a$. Подставив в него координаты точки M, получим $a + 0 \cdot a = a$, $a = a$.

Очевидно, что координаты любой точки, не лежащей на данной прямой, то есть точки, абсцисса которых не равна a, не удовлетворяют уравнению (3.3).

<u>Определение 3.4</u>. Общим уравнением прямой на плоскости называется линейное уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.4}$$

где A, B, C – действительные числа, причем A, B не равны одновременно нулю, то есть $A^2 + B^2 \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. В прямоугольной системе координат на плоскости всякое уравнение вида (3.4) определяет некоторую прямую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $B \neq 0$, тогда уравнение (3.4) равносильно $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, то есть уравнению вида (3.2). Если же $B = 0$, то уравнение (3.4) равносильно $x = -\frac{C}{A}$, то есть уравнению вертикальной линии вида (3.3).

Справедливо и обратное утверждение: любая прямая на плоскости имеет уравнение (3.4). Если эта прямая не параллельная оси ординат, то она имеет уравнение вида (3.2) или $kx - y + b = 0$. А если прямая параллельна оси ординат, она имеет уравнение вида $x + 0 \cdot y - a = 0$.

<u>Определение 3.5.</u> Линии на плоскости, определяемые алгебраическим уравнением первой степени относительно x и y, называются *линиями первого порядка*.

Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка, и, обратно, каждая линия первого порядка есть прямая.

Если задано общее уравнение прямой, то можно определить угловой коэффициент прямой и величину отрезка, отсекаемого прямой по оси ординат.

П р и м е р. Найти угловой коэффициент прямой $12x–5y–65=0$.

Р е ш е н и е. Разрешив уравнение относительно y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=\frac{12}{5}x-13$. Отсюда угловой коэффициент прямой равен $\frac{12}{5}$, а ордината точки пересечения прямой с осью Oy равна –13.

В общем уравнении прямой можно рассмотреть частные случаи, когда некоторые из коэффициентов уравнения равны нулю. Тогда прямая в прямоугольной системе координат располагается определенным образом.

1. $C=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0$:

   $Ax+By=0$ ($y=(–A/B)\cdot x$) – проходит через начало координат.

2. $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$:

   $By+C=0$ ($y=b$, где $b= –C/B$) – параллельна оси Ox.

3. $B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$:

   $Ax+C=0$ ($x=a$, где $a= –C/A$) – параллельна оси Oy.

4. $B=C=0,\ A\neq 0$:

   $Ax=0$ ($x=0$, так как $A\neq 0$) – совпадает с осью Oy.

5. $A=C=0,\ B\neq 0$:

   $By=0$ ($y=0$, так как $B\neq 0$) – совпадает с осью Ox.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Пусть известны координаты точки $M_1(x_1; y_1)$ и угловой коэффициент k прямой. В уравнении прямой с угловым коэффициентом величина b является неизвестной. Найдем значение b из условия, что прямая проходит через точку M_1, следовательно, ее координаты $(x_1; y_1)$ должны удовлетворять уравнению (3.2):

$$y_1=kx_1+b.$$

Здесь k – известная величина. Определим $b=y_1-kx_1$. Подставляя найденное значение b в уравнение (3.2), получим искомое уравнение прямой:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{3.5}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ через которые проходит прямая. Координаты точки M_2 должны удовлетворять уравнению (3.5):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Отсюда можно найти неизвестную величину k:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.6)$$

Подставляя значение k в уравнение (3.5), получим искомое уравнение прямой:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.7)$$

Здесь $y_2 \neq y_1$, $x_2 \neq x_1$.

Если y_2=y_1 (ординаты точек равны), то прямая, проходящая через две точки, параллельна оси Ox, и ее уравнение имеет вид y=y_1.

Если x_2=x_1 (абсциссы точек равны), то прямая, проходящая через две точки, параллельна оси Oy, и ее уравнение имеет вид x=x_1.

П р и м е р. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A(–2;3) и B(–2;–1).

Р е ш е н и е. Так как x_1=x_2= –2, то прямая имеет уравнение x= –2 (параллельна оси ординат).

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями:

$$l_1: y = k_1 x + b_1, \qquad k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1;$$
$$l_2: y = k_2 x + b_2, \qquad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

По теореме о внутреннем угле треугольника $\alpha_2 = \theta + \alpha_1$, откуда угол между двумя прямыми $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Отсюда, учитывая обозначения, получаем выражение для $\operatorname{tg}\theta$:

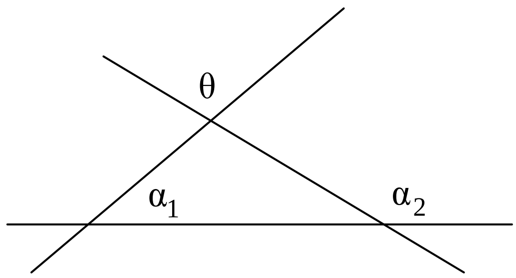


Рис. 3.4

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (3.8)$$

Эта формула определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi - \theta$.

П р и м е р. Две прямые заданы своими уравнениями:

$$l_1: \; y = 2x + 3;$$
$$l_2: \; y = -3x + 2.$$

Найти угол между прямыми.

Р е ш е н и е. Из уравнений прямых очевидно, что k_1=2; k_2= –3. Подставляя эти значения в уравнение (3.8), определяем $\operatorname{tg}\theta$:

$\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}\right|=1$. Следовательно, наименьший угол между прямыми $\theta=45^\circ$.

Выражение (3.8) позволяет сформулировать условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Если прямые параллельны, то $\theta=0$ и $\operatorname{tg}\theta=0$, а из (3.8) это возможно, когда $k_2-k_1=0$. Следовательно, угловые коэффициенты прямых равны.

Условие параллельности прямых

$$k_2=k_1. \tag{3.9}$$

Если прямые перпендикулярны, то $\theta=\frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2=\frac{\pi}{2}+\alpha_1$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Условие перпендикулярности прямых

$$k_2=-\frac{1}{k_1}. \tag{3.10}$$

Пример. Даны вершины треугольника $A(0;1)$; $B(6;5)$ и $C(12;-1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

Решение. По формуле (3.6) найдем угловой коэффициент стороны AB: $k=\frac{5-1}{6-0}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент высоты, проведенной из вершины C, равен $-\frac{3}{2}$. Уравнение этой высоты имеет вид согласно формуле (3.5)

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-12).$$

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой свободный член $C\neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{3.11}$$

(здесь $a=-C/A$, $b=-C/B$).

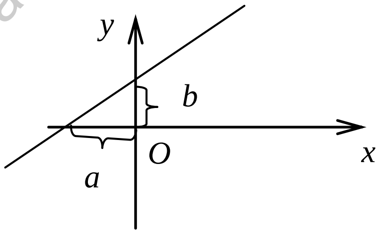


Рис. 3.5

Уравнение (3.11) называют *уравнением прямой в отрезках*. В нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – ординатой точки пересечения прямой с осью Oy. Поэтому a и b называют отрезками прямой на осях координат (рис. 3.5). Вид уравнения (3.11) удобен при построении прямой.

Пример. Дано общее уравнение прямой $3x–5y–20=0$. Найти точки пересечения прямой с осями координат.

Решение. Приведем общее уравнение прямой к виду (3.11). Для этого перенесем свободный член уравнения в правую часть и разделим обе части на 20: $\frac{3}{20}x-\frac{5}{20}y=1$. Переписав последнее уравнение в виде $\frac{x}{\left(\frac{20}{3}\right)}+\frac{y}{(-4)}=1$, получим уравнение данной прямой в отрезках и, следовательно, абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox равна $\frac{20}{3}$, а ордината точки пересечения прямой с осью Oy равна $–4$.

Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy своими общими уравнениями заданы две прямые l_1 и l_2:

$$l_1\colon\ A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{3.12}$$

$$l_2\colon\ A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{3.13}$$

Вопрос о взаимном расположении двух прямых сводится к решению системы уравнений (3.12)–(3.13) (при условии, что $A_i^2+B_i^2\neq 0,\ i=1{,}2$).

Из первого уравнения, умноженного на A_2, вычтем второе уравнение, умноженное на A_1:

$$(A_1x+B_1y+C_1)A_2-(A_2x+B_2y+C_2)A_1=0,$$

$$(B_1A_2-B_2A_1)y+C_1A_2-C_2A_1=0,$$

$$(B_1A_2-B_2A_1)y=C_2A_1-C_1A_2.$$

Из первого уравнения, умноженного на B_2, вычтем второе уравнение, умноженное на B_1:

$$(B_2A_1-A_2B_1)x=C_2B_1-C_1B_2.$$

Вводя определители системы (3.12)-(3.13)

$$D=A_1B_2-A_2B_1=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},\quad D_x=C_1B_2-C_2B_1=\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix},$$

$$D_y=A_1C_2-A_2C_1=\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix},$$

получим при $D\neq 0$ единственное решение системы

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D}. \tag{3.14}$$

Если решение системы единственно, то прямые пересекаются в одной точке, координатами которой будут найденные значения x и y.

При $D=0$ имеем $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, т.е. прямые наклонены под одним углом.

Если $D=0$, $D_x \neq 0$ и $D_y \neq 0$, то прямые параллельны, а система (3.12)–(3.13) не имеет решений.

При $D=0$, $D_x=0$ или $D_y=0$ выполнена полная пропорциональность $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$, и прямые совпадают. Система имеет бесчисленное множество решений.

Примеры.

Даны две прямые. Определить взаимное расположение прямых на плоскости.

1. $2x+3y-7=0$; $\quad x-y-1=0$.

Решение. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}2x+3y=7,\\ x-y=1.\end{cases}$$

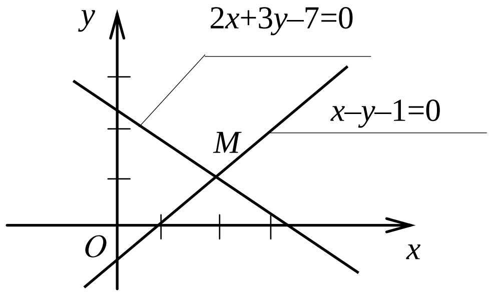


Рис. 3.6

Определитель системы $D=2\cdot(-1)-1\cdot 3=-5\neq 0$ и, следовательно, прямые пересекаются в одной точке. Координаты точки M пересечения прямых определяются по формулам (3.14):

$$x=\frac{(-1)\cdot 7-3\cdot 1}{(-5)}=2,\quad y=\frac{2\cdot 1-1\cdot 7}{(-5)}=1.$$

Решение системы $\begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$

можно представить как координаты точки M. Таким образом, прямые пересекаются в точке $M(2;1)$ (рис. 3.6).

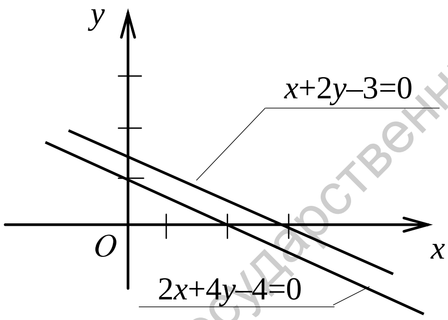


Рис. 3.7

2. $x+2y-3=0$; $2x+4y-4=0$.

Решение. Для системы уравнений

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\ \mathrm{D}_{\mathrm{x}}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

т. е. прямые параллельны (рис. 3.7).

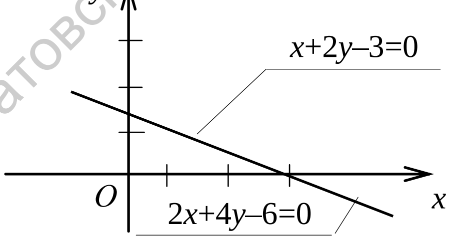


Рис. 3.8

3. $x+2y-3=0$; $2x+4y-6=0$.

Решение. Решим систему уравнений $\begin{cases}x+2y=3,\\ 2x+4y=6.\end{cases}$

Для системы уравнений значения определителей
$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\ D_x=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=0\,,D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0\,.$

Следовательно, система имеет бесчисленное множество решений, и прямые совпадают (рис. 3.8).

Нормальное уравнение прямой

Пусть в прямоугольной системе координат дана некоторая прямая l, не проходящая через начало координат. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную к данной прямой l (рис. 3.9). Эта прямая называется *нормалью*. Пусть N – точка пересечения нормали с прямой l. На нормали определим положительным направление от точки O к точке N. Таким образом, нормаль станет осью. Пусть φ – угол между положительным направлением оси абсцисс и направлением нормали ($0\le\varphi<2\pi$), а $p=|ON|\ (p\ge 0)$. Положение прямой относительно осей координат можно определить величинами φ и p, и уравнение прямой l будет иметь следующий вид:

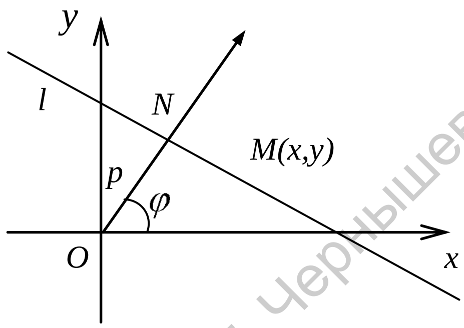


Рис. 3.9

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0\,. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) называют *нормальным уравнением прямой*. Общее уравнение прямой (3.4) будет нормальным уравнением прямой (3.15), если для коэффициентов A, B, C выполняются условия: $A^2+B^2=1$ (так как $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$) и $C<0$.

Примеры.

1. Написать нормальное уравнение прямой, для которой $p=4$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Подставим данные задачи в уравнение (3.15)

$$x\cos\frac{\pi}{3}+y\sin\frac{\pi}{3}-4=0 \text{ или } \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-4=0\,.$$

2. Какие из уравнений прямых:

$a)\ 7x+5y-3=0;\ b)\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=0;\ c)\ \dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+1=0;\ d)\ \dfrac{5}{13}x-\dfrac{12}{13}y-5=0$

записаны в нормальной форме?

Решение. Для ответа на вопрос следует проверить выполнение двух условий $A^2+B^2=1$ и $C<0$ в каждом случае. Только в случае d) они оба выполнены, следовательно, в случае d) уравнение прямой записано в нормальной форме.

Расстояние от точки до прямой

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy дана прямая l: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$, лежащая вне этой прямой.

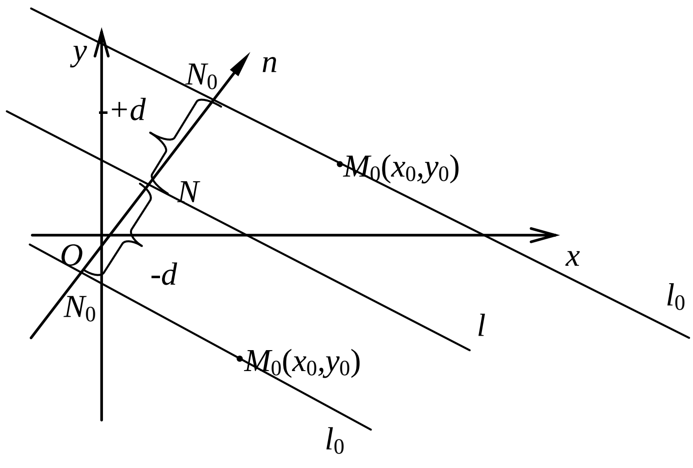


Рис. 3.10

Необходимо определить расстояние d от точки M_0 до прямой l, т.е. длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Точка M_0 и начало координат могут лежать по разные стороны от прямой или по одну сторону (рис. 3.10). Проведем через точку M_0 прямую l_0, параллельную l, N_0 – точка пересечения нормали с прямой l_0. Тогда $d=|NN_0|$. Пусть $p_0=|ON_0|$.

Расстояние точки от данной прямой может быть вычислено по формуле

$$d = |x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p_0|, \tag{3.16}$$

где x_0, , y_0 – координаты заданной точки.

Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду

Пусть $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой. Для того чтобы это уравнение привести к нормальному виду, необходимо все его коэффициенты умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.17}$$

Знак нормирующего множителя берется противоположным знаку C в общем уравнении прямой. Если C отсутствует ($C=0$), то знак берется произвольным.

Расстояние от точки до прямой в этом случае записывается следующим образом $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Примеры.

1. Привести к нормальному виду уравнение прямой: $3x + 4y - 10 = 0$.

Решение. Найдем нормирующий множитель по формуле (3.17). Так как $C = -10 < 0$, нормирующий множитель следует брать со знаком “+”: $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{1}{5}$. Умножив все члены уравнения прямой на вычисленное значение μ, получим нормальное уравнение прямой:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

2. Найти расстояние d от точки $A(2;4)$ до прямой $6x-8y-15=0$.

Решение. Расстояние от точки до прямой d определяется по формуле (3.16). Приведем общее уравнение прямой к нормальному виду:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{1}{10};\quad \frac{1}{10}(6x-8y-15)=0;\quad 0{,}6x-0{,}8y-1{,}5=0.$$

Подставив в полученное уравнение координаты точки *A*, получим $d=|-3{,}5|=3{,}5$.

3. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $15x-8y+2=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d=2$.

Решение. Каждая из исходных прямых есть геометрическое место точек, отстоящих от заданной прямой на расстоянии равном 2. Приведем общее уравнение прямой к нормальному виду:

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{15^2+(-8)^2}}=-\frac{1}{17};\qquad -\frac{1}{17}(15x-8y+2)=0.$$

Расстояние любой точки $M(x;y)$ от прямой $d=\left|-\frac{1}{17}(15x-8y+2)\right|$.

Таким образом, $2=\left|-\frac{1}{17}(15x-8y+2)\right|$. Используя определение модуля числа, получим совокупность двух уравнений, определяющих две прямые, отстоящие от данной прямой на 2 единицы:

$$2=-\frac{1}{17}(15x-8y+2)\text{ или }15x-8y+36=0,$$

$$2=-\left(-\frac{1}{17}(15x-8y+2)\right)\text{ или }15x-8y-32=0.$$

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Окружность

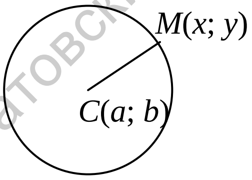


Рис. 3.11

Определение 3.6. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит окружности (рис. 3.11), точка *C(a,b)* – центр окружности, *r* – радиус окружности. По определению окружности $CM=r$. По формуле расстояния между точками *C* и *M* получаем $CM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, тогда уравнение окружности примет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{3.18}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (3.18) примет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Если в левой части уравнения (3.18) раскрыть скобки и сгруппировать члены с одинаковыми степенями *x*, то получится уравнение вида

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = r^2, \tag{3.19}$$

где $l = -2a,\ m = -2b,\quad n = a^2 + b^2 - r^2$.

В общем случае уравнение (3.19) определяет окружность, если выполнено следующее условие: $l^2 + m^2 - 4n^2 > 0$. Если $l^2 + m^2 - 4n^2 = 0$, то указанное уравнение определяет точку $(-l/2; -m/2)$, а если $l^2 + m^2 - 4n^2 < 0$, то оно не имеет геометрического смысла. В этом случае говорят, что уравнение определяет мнимую окружность. Таким образом, уравнение окружности содержит старшие члены x^2 и y^2 с равными коэффициентами, и в нем отсутствует член с произведением xy.

Взаимное расположение точки $M_1(x_1; y_1)$ и окружности $x^2 + y^2 = r^2$ определяется следующими условиями:

если $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, то точка M_1 лежит на окружности;

если $x_1^2 + y_1^2 > r^2$, то точка M_1 лежит вне окружности;

если $x_1^2 + y_1^2 < r^2$, то точка M_1 лежит внутри окружности.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности:

$$x^2 + y^2 + 8x - 12y - 12 = 0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде (3.18). Для этого в левой части уравнения выделим полные квадраты

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 12y + 36) - 16 - 36 - 12 = 0,$$

$$(x+4)^2 + (y-6)^2 = 64.$$

Таким образом, координаты центра окружности $a = -4;\ b = 6$. Радиус окружности $r = 8$.

Эллипс

Определение 3.7. Кривыми второго порядка называются линии, уравнения которых являются алгебраическими уравнениями второй степени с двумя переменными. Общее уравнение второй степени имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3.20}$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Рассмотрим три основных вида кривых второго порядка

1) эллипс и его частный случай – окружность;
2) гипербола;

3) парабола.

Пусть $B=0$ в (3.19) и в оставшемся уравнении выделим полный квадрат по $x,\ y$.

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y\right)+F=0,$$

$$A\left(x^2+2\frac{D}{2A}x+\left(\frac{D}{2A}\right)^2-\left(\frac{D}{2A}\right)^2\right)+C\left(y^2+2\frac{E}{2C}+\left(\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{E}{2C}\right)^2\right)+F=0,$$

$$A\left(\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A^2}\right)-C\left(\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{E}{2C}\right)^2\right)+F=0,$$

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

Введем обозначения так, чтобы получить уравнение , похожее по виду на уравнение окружности

$$x_0=-\frac{D}{2A},\ y_0=-\frac{E}{2C},\ \Delta=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

В результате получим уравнение

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\Delta. \tag{3.21}$$

При $A=C,\ \Delta>0$ это уравнение является уравнением окружности (3.18).

<u>Определение 3.8.</u> *Эллипсом* будем называть кривую второго порядка вида (3.21) при условии $A\cdot C>0,\ \Delta>0$. Разделим обе части уравнения (3.21) на Δ и обозначим $a^2=\dfrac{\Delta}{A}>0,\ b^2=\dfrac{\Delta}{B}>0,$ получим

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{3.22}$$

Данное уравнение называется каноническим уравнением эллипса с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$. Если $x_0=y_0=0$, то центр эллипса совпадает с началом координат, и уравнение (3.22) принимает следующий вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.23}$$

Преобразуем его, приведя к одному из следующих видов

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \tag{3.24}$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}. \tag{3.25}$$

Абсциссы точек эллипса, как следует из (3.24), принадлежат только промежутку $[-a;a]$, а ординаты, как следует из (3.25), – промежутку $[-b;b]$. Отрезок $[-a;a]$ и его длина $2a$ называются большой осью эллипса, а отрезок $[-b;b]$ и его длина $2b$ – малой осью эллипса. Из (3.24) следует, что эллипс симметричен относительно оси абсцисс, а из (3.25) следует, что эллипс симметричен относительно оси ординат (рис. 3.12). Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.

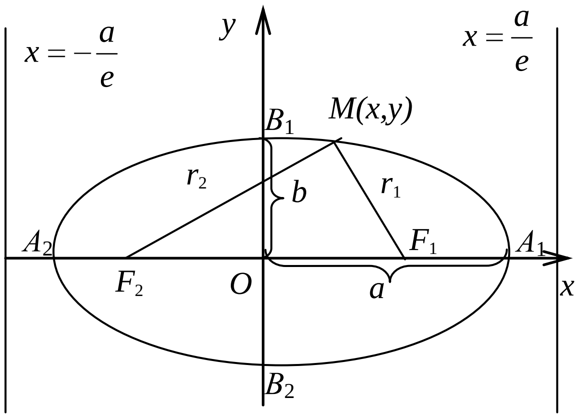


Рис. 3.12

<u>Определение 3.9.</u> Точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, называются фокусами эллипса.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом:* $e=\frac{c}{a}$. Так как $c<a$, то для эллипса $e<1$.

Эллипс обладает замечательным свойством: сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса есть величина постоянная, равная $2a$. Действительно, возьмем любую точку $M(x;\pm y)$ на эллипсе, где y определяется из соотношения (3.24). Вычислим фокальные радиусы

$$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+\left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}=$$

$$=\sqrt{x^2-2xc+a^2-b^2+\frac{b^2}{a^2}a^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{x^2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)-2xc+a^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{xc}{a}\right)^2-2xc+a^2}=\sqrt{(xc-a)^2}=|xc-a|=a-ex.$$

(в силу ограниченности абсцисс точек эллипса).

Аналогично, $MF_2=a+ex.$ Отсюда следует искомая формула $r_1+r_2=2a.$

В частном случае из уравнения эллипса (3.23), когда $a=b$ ($c=0$, $e=0$, т.е. фокусы сливаются в одной точке – центре), эллипс превращается в окружность с уравнением $x^2+y^2=a^2$.

Взаимное расположение точки $M_1(x_1;y_1)$ и эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяется следующими условиями:

если $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$, то точка M_1 лежит на эллипсе;

если $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}>1$, то точка M_1 лежит вне эллипса;

если $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}<1$, то точка M_1 лежит внутри эллипса.

Определение 3.10. *Директрисами эллипса* называются прямые, определяемые уравнениями $x=\pm\dfrac{a}{e}$.

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M_1(x_1; y_1)$ имеет вид

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{3.26}$$

Примеры.

1. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2+2y^2=8$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду, разделив обе его части на 8: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Отсюда $a=2\sqrt{2}$ и b=2. Поскольку $c^2=a^2-b^2$, то c=2. Следовательно, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Уравнения директрис принимают вид $x=\pm 4$.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4;-1,8)$, если его эксцентриситет равен $\dfrac{4}{5}$.

Решение. $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$, откуда $c=\dfrac{4}{5}a$. Но $b^2=a^2-c^2$; $b^2=\dfrac{9}{25}a^2$. Из условия принадлежности точки M эллипсу получим равенство $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{3{,}24}{b^2}=1$. Подставляя в последнее равенство выражение для b^2, получим $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{9}{a^2}=1$, т.е. $a^2=25$ и $b^2=9$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Гипербола

Определение 3.11. Гиперболой будем называть кривую второго порядка вида (3.21) при условии $A\cdot C<0,\ \Delta>0$.

Разделив (3.21) на Δ и обозначив $a^2=\dfrac{\Delta}{A}>0,\ -b^2=\dfrac{\Delta}{C}<0$, получим каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (3.27)$$

Если $x_0 = y_0 = 0$, то центр гиперболы совместится с началом координат

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.28)$$

Преобразуем (3.28), приведя к одному из следующих видов

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad (3.29)$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}. \qquad (3.30)$$

Абсциссы точек гиперболы, как следует из (3.29), принадлежат двум промежуткам $(-\infty;-a]$, $[a;+\infty)$, а ординаты, как следует из (3.29), принимают любые действительные значения. Отрезок $[-a;a]$ и его длина $2a$ называются действительной осью гиперболы, а отрезок $[-b;b]$ и его длина $2b$ – ее мнимой осью. Из (3.29) следует, что гипербола симметрична относительно оси абсцисс, а из (3.30) следует, что она симметрична относительно оси ординат. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы.

<u>Определение 3.12.</u> Фокусами гиперболы называются точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ (рис. 3.13), где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

<u>Определение 3.13.</u> Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние точки $M(x;y)$ гиперболы от этой прямой стремится к нулю при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

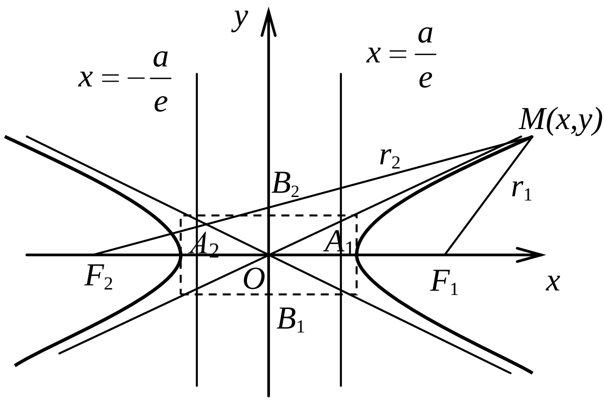


Рис. 3.13

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y=\pm\frac{b}{a}x$. Для построения асимптот гиперболы строят осевой прямоугольник гиперболы со сторонами $x=a$, $x=-a$, $x=b$, $x=-b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы.

<u>Определение 3.14</u>. Отношение $e=\frac{c}{a}>1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиусы-векторы правой ветви гиперболы:

$$r_1 = ex - a \text{ (правый фокальный радиус-вектор);}$$
$$r_2 = ex + a \text{ (левый фокальный радиус-вектор).} \qquad (3.31)$$

Фокальные радиусы-векторы левой ветви гиперболы:

$$r_1 = -ex + a \text{ (правый фокальный радиус-вектор);}$$
$$r_2 = -ex - a \text{ (левый фокальный радиус-вектор).} \qquad (3.32)$$

Гипербола обладает фокальным свойством: модуль разности расстояний от фокусов до любой точки гиперболы есть величина постоянная, равная $2a$, то есть $|r_1 - r_2| = 2a$. Это можно проверить аналогично тому, как было сделано для эллипса.

Определение 3.15. *Директрисами* гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

Если $a=b$, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Ее асимптоты образуют прямой угол. Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид $xy=m$ ($m = \pm\dfrac{a^2}{2}$; при $m>0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $m<0$ гипербола расположена в II и IV четвертях). Так как уравнение $xy=m$ можно переписать в виде $y = \dfrac{m}{x}$, то равнобочная гипербола является графиком обратно пропорциональной зависимости между величинами x и y.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\text{)}$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью гиперболы служит отрезок оси Oy длины $2b$.

Две гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называют *сопряженными***.**

Уравнение касательной к гиперболе в точке $M_1(x_1; y_1)$ имеет вид

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1. \qquad (3.33)$$

Если в уравнении (3.20) положить $A = C = D = E = 0,$ то получим уравнении равносторонней гиперболы $(a = b)$ или кривой обратной пропорциональности $xy = k,\ k \neq 0.$

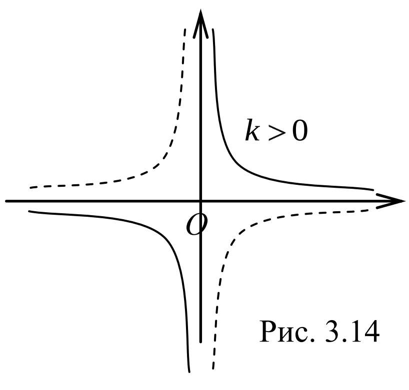


Рис. 3.14

При $k>0$ ветви кривой расположены в 1-ой и 3-ей четвертях, а при $k<0$ – во 2-ой и 4-ой.

Для данной кривой оси координат являются асимптотами (рис. 3.14).

Примеры.

1. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет гиперболы $5x^2-4y^2=20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки $M(-4;\sqrt{15})$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду, разделив обе его части на 20: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Отсюда a=2, $b=\sqrt{5}$. Поскольку $c^2=b^2+a^2$, то c=3, $F_1(3;0)$ и $F_2(-3;0)$, $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$. Поскольку точка лежит на левой ветви гиперболы, r_1 и r_2 находим по формулам (3.32): $r_1=-ex+a=-\frac{3}{2}\cdot(-4)+2=8$; $r_2=-ex-a=-\frac{3}{2}\cdot(-4)-2=4$.

2. На гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса равно 16.

Решение. Определим a и e. Очевидно, $a^2=4$; $b^2=12$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+12}=4$. Отсюда e=2. Расстояние до правого фокуса определяется формулами (3.31), (3.32):

$$r_1=ex-a;\quad 16=2x-2;\quad x=9;\quad \frac{81}{4}-\frac{y^2}{12}=1;\quad \frac{y^2}{12}=\frac{81}{4}-1;\quad y=\pm\sqrt{231};$$

$$r_1=-ex+a;\quad 16=-2x+2;\quad x=-7;\quad \frac{49}{4}-\frac{y^2}{12}=1;\quad \frac{y^2}{12}=\frac{49}{4}-1;\quad y=\pm3\sqrt{15}.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют четыре точки $M_1(9;\sqrt{231})$, $M_2(9;-\sqrt{231})$, $M_3(-7;3\sqrt{15})$, $M_4(-7;-3\sqrt{15})$.

Парабола

Пусть в уравнении (3.20) $B=0,\ A\cdot C=0,\ A^2+C^2\neq 0$. Имеем $Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Выделим в этом уравнении полный квадрат по y

$$C\left(y^2+2\frac{E}{2C}y+\frac{E^2}{4C^2}-\frac{E^2}{4C^2}\right)+Dx+F=0,$$

$$C(y-y_0)^2=-Dx-F+\frac{E^2}{4C^2},$$

$$C(y-y_0)^2=-D(x-x_0).$$

Здесь обозначили $y_0=-\frac{E}{2C}$, $x_0=\frac{F}{D}-\frac{E^2}{4CD}$.

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0),\ 2p=-\frac{D}{C}. \tag{3.34}$$

Уравнение (3.34) представляет собой уравнение параболы с вершиной в точке $(x_0; y_0)$ и симметричной относительно оси абсцисс

Если $x_0=y_0=0,$ то вершина параболы совмещена с началом координат, и уравнение (3.34) принимает вид

$$y^2=2px. \tag{3.35}$$

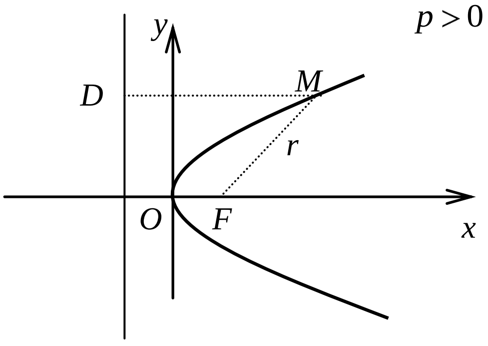


Рис. 3.15

<u>Определение 3.16.</u> Директрисой параболы называется вертикальная прямая $x=-\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ (рис. 3.15).

Парабола также обладает фокальным свойством: каждая точка параболы равноудалена от директрисы и от фокуса.

Действительно, пусть точка $M(x;y)$ принадлежит параболе. Расстояние от точки M до фокуса F

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+y^2}=$$

$$\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Расстояние от точки $M(x;y)$ до директрисы $MD=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$, так как MD параллельная оси абсцисс.

Следовательно, $MF=MD.$

Уравнение

$$x^2=2py \tag{3.36}$$

является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат. При $p>0$ параболы (3.35), (3.36) обращены в положительную сторону соответствующей оси, а при $p<0$ – в отрицательную сторону.

Фокальный радиус-вектор параболы (3.35) определяется по формуле

$$r=x+\frac{p}{2}\ (p>0).$$

Уравнение касательной к параболе (3.35) в точке параболы $M_1(x_1;\, y_1)$ имеет вид

$$yy_1=p(x+x_1). \tag{3.37}$$

П р и м е р ы.

1. Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2 = 16x$. Вычислить расстояние точки $M(1;4)$ от фокуса.

Р е ш е н и е. Из уравнения видно, что $2p=16$, откуда $p=8$, $\frac{p}{2} = 4$. Значит, уравнение директрисы параболы имеет вид $x = -4$. Фокус параболы находится в точке $F(4;0)$. Поскольку точка $M(1;4)$ лежит на параболе (ее координаты удовлетворяют уравнению параболы), фокальный радиус для нее $r = 1 + 4 = 5$.

2. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 16x$, проходящей через точку:

a) $A(1;–4)$; *b*) $B(–1;2)$.

Р е ш е н и е: *a*) точка *A* лежит на параболе, поэтому согласно уравнению (3.37) уравнение касательной имеет вид

$$-4y = 8(x+1); \qquad 2x + y + 2 = 0;$$

b) уравнение касательной к параболе $y^2 = 16x$, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$, имеет вид $yy_1 = 8(x + x_1)$. Для решения задачи необходимо найти координаты точки параболы x_1, y_1, через которую проходит касательная. Так как по условию точка *B* лежит на касательной, то ее координаты удовлетворяют уравнению касательной $2y_1 = 8(x_1 - 1)$, а координаты точки $M_1(x_1; y_1)$ удовлетворяют уравнению параболы $y_1^2 = 16x_1$. Из последних двух равенств получаем $x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $y_1 = 2(1 \pm \sqrt{5})$. Таким образом, искомые касательные описываются уравнениями $2(1 \pm \sqrt{5})y = 8(x + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2})$.

3. Пусть задан треугольник *ABC* с вершинами $A(5; 6)$, $B(-4; 5)$, $C(4; -5)$.

а) составить уравнение прямой *BC*.

Согласно (3.7) имеем

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \frac{x - (-4)}{4 - (-4)} = \frac{y - 5}{-5 - 5} \Leftrightarrow 5x + 4y = 0.$$

б) составить уравнение высоты, опущенной из вершины *A*.

Поскольку высота *AH* перпендикулярна *BC*, то используем угловой коэффициент уравнения прямой *BC* для нахождения углового коэффициента прямой *AH*. Перепишем уравнение $5x + 4y = 0$ прямой *BC* в виде равносильного уравнения $y = -\frac{5}{4}x$, тогда угловой коэффициент

$k_{BC} = -\dfrac{5}{4}$. Из (3.10) следует , что $k_{AH} = -\dfrac{1}{k_{BC}} = \dfrac{4}{5}$. Таким образом, уравнение прямой *AH* найдем по известному угловому коэффициенту k_{AH} и точке *A*

$$y - y_A = k_{AH}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 6 = \frac{4}{5}(x - 5) \Leftrightarrow 4x - 5y + 10 = 0.$$

в) составить уравнение медианы *BM*, проведенной из вершины *B*.

Уравнение медианы составим, используя уравнение прямой, проходящей через две точки *B* и *M*.

По определению медианы *AM*=*MC*, поэтому координаты точки *M* x_M, y_M найдем по формулам $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2}$, откуда $x_M = 4.5$, $y_M = 0.5$. Тогда уравнение медианы примет вид

$$\frac{x - (-4)}{4.5 - (-4)} = \frac{y - 5}{0.5 - 5} \Leftrightarrow x + 19y - 91 = 0.$$

г) уравнение биссектрисы *CL* угла *C*.

Так как координаты точки *C* известны, то остается лишь найти координаты точки *L* – точки пересечения биссектрисы *CL* и стороны *AB*.

Биссектриса *CL* делит сторону *AB* на части *AL* и *BL*, длины которых пропорциональны длинам прилежащих сторон треугольника, то есть $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{AC}{BC}$. Поскольку $AC = \sqrt{(4-5)^2 + (-5-6)^2} = \sqrt{122}$, $BC = \sqrt{(4-(-4))^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{164}$, то $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{\sqrt{122}}{\sqrt{164}} = \sqrt{\dfrac{61}{82}} = \lambda$. Таким образом, сторона *AB* делится точкой *L* на отрезки *AL* и *LB* в отношении $\lambda = \sqrt{\dfrac{61}{82}}$. Тогда $x_L = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \dfrac{5+4\lambda}{1+\lambda}$, $y_L = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \dfrac{6+5\lambda}{1+\lambda}$.

Осталось записать уравнение прямой *CL*, проходящей через две данные точки

$$\frac{x - x_C}{x_L - x_C} = \frac{y - y_C}{y_L - y_C} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\dfrac{5-4\lambda}{1+\lambda} - 4} = \frac{y+5}{\dfrac{6+5\lambda}{1+\lambda} - 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{5 - 4\lambda - 4(1+\lambda)} = \frac{y+5}{6 + 5\lambda - 4(1+\lambda)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{1-8\lambda} = \frac{y+5}{2+6\lambda} \Leftrightarrow (x-4)(2+6\lambda) = (y+5)(1-8\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2+6\lambda) - 8 - 24\lambda = y(1-8\lambda) + 5 - 40\lambda \Leftrightarrow$$

$$x(2+6\lambda) + y(8\lambda - 1) - 3 + 16\lambda = 0,$$

где $\lambda = \sqrt{\dfrac{61}{82}}$.

д) найти острый угол между высотой *AH* и медианой *BM*.

Запишем уравнение высоты *AH* в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом $y = \dfrac{4}{5}x + 2 \Rightarrow k_{AH} = \dfrac{4}{5}$.

Уравнение медианы *BM* с форме уравнения прямой с угловым коэффициентом записывается следующим образом

$$y = -\frac{1}{19}x + \frac{91}{19} \Rightarrow k_{BM} = -\frac{1}{19}.$$

Острый угол φ между высотой *AH* и медианой *BM* найдем, используя формулу (3.8)

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{19}}{1 - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{19}} = \frac{\dfrac{77}{5 \cdot 19}}{\dfrac{91}{5 \cdot 19}} = \frac{77}{91}, \quad \varphi = arctg\frac{77}{91}.$$

е) найдите точку пересечения медиан.

Для нахождения точки *P* пересечения медиан понадобится точка $M(4.5;\ 0.5)$ – середина стороны *AC*. Известно, что точка *P* делит отрезок *BM* в отношении $\lambda = 2:1$, считая от вершины. Тогда в соответствии с формулами деления отрезка *BM* в отношении λ имеем

$$x_P = \frac{-4 + 2 \cdot 4.5}{1+2} = \frac{5}{3}, \quad y_P = \frac{5 + 2 \cdot 0.5}{1+2} = 2.$$

ж) найдите площадь треугольника *ABC*.

Для нахождения площади *S* треугольника *ABC* необходимо знать длину основания *BC* и длину высоты *AH*. В пункте г) длина основания посчитана $BC = \sqrt{164}$. Для определения длины высоты *AH*, то есть расстояние от точки *A* до основания *BC*, воспользуемся формулой расстояния от точки $A(5;\ 6)$ до прямой $BC\ -5x + 4y = 0$

$$h = \frac{|5x_A + 4y_A|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{5 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{\sqrt{41}} = \frac{44}{\sqrt{41}}.$$

Тогда получаем $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{164} \cdot \dfrac{44}{\sqrt{41}} = 44$ кв. ед.

4. Определить траекторию точки *M*, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(1;\ 0)$, чем к прямой $x = 4$.

РЕШЕНИЕ. Пусть произвольная точка $M(x; y)$ на плоскости расположена вдвое ближе к точке $F(1;\ 0)$, чем к прямой $x = 4$. Тогда $2MF = MN$, где *MN* перпендикулярен к прямой $x = 4$. Расстояние от произвольной точки $M(x; y)$ до точки *F* вычисляется по формуле

$MF=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$. Вычислим расстояние от точки $M(x;y)$ до прямой $x=4$. Координаты точек на прямой $x=4$ имеют вид $N(4;\, y)$. Следовательно, расстояние от точки $M(x;y)$ до точки N определяется выражением

$MN=\sqrt{(x-4)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-4)^2}=|x-4|$.

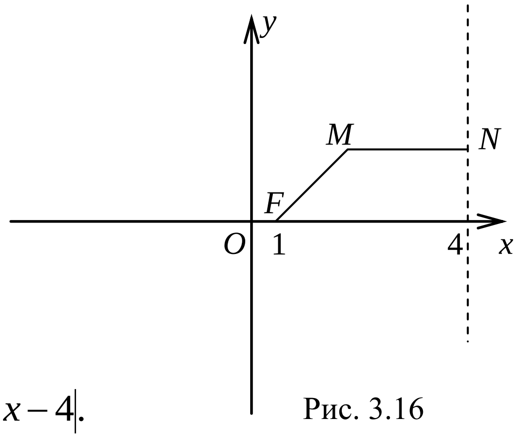


Рис. 3.16

Согласно условию $2MF=MN$, получаем

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-4| \Leftrightarrow 4(x^2-2x+1)+4y^2=x^2-8x+16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+4y^2=12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Получившееся уравнение является каноническим уравнением эллипса с полуосями $a=2,\ b=\sqrt{3}$, фокусами $F(\pm 1;\, 0)$, эксцентриситетом $e=c/a=1/2$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

1. Как определяется уравнение линии.
2. Получите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Получите уравнение прямой общего вида.
4. Найдите формулу уравнения прямой, проходящей через две данные точки.
5. Выведите формулу угла между двумя прямыми.
6. Запишите условия перпендикулярности и параллельности прямых.
7. Получите и объясните с геометрической точки зрения уравнение прямой в отрезках.
8. Получите координаты точки пересечения двух прямых и опишите варианты взаимного расположения прямых на плоскости.
9. Запишите и объясните формулу расстояния от точки до прямой.
10. Получите уравнение окружности.
11. Дайте определение кривых второго порядка и получите уравнения этих кривых в общем виде.
12. Дайте определение эллипса и получите каноническое уравнение эллипса.
13. Получите фокальное свойство эллипса.
14. Дайте определение гиперболы и перечислите ее свойства.

15. Дайте определение параболы и перечислите ее свойства.

Глава 4. ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Поверхность S в пространстве представляет собой множество точек, обладающих геометрическими свойствами, присущими только им.

Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная поверхность S.

Определение 4.1. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется *уравнением поверхности* S в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y; z)$, лежащей на поверхности S, и не удовлетворяют координаты никакой другой точки, не лежащей на этой поверхности.

Линия в пространстве рассматривается как пересечение двух поверхностей, т.е. как множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и соответственно этому линия определяется заданием системы двух уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве относительно прямоугольной системы координат может быть задана различными способами. Например, плоскость однозначно определяется точкой и вектором, ей перпендикулярным; тремя точками; отрезками, отсекаемыми на осях координат, и т.п. В зависимости от способа задания плоскости рассматривают различные виды ее уравнения.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим поверхность в пространстве, в котором установлена прямоугольная система координат, соответствующая ортонормированному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В этом случае можно говорить о координатах вектора и координатах точки. Зададим плоскость фиксированной на ней точкой с известными координатами $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярным этой плоскости вектором $\vec{n}$, координаты которого известны $\vec{n}=(A, B, C)$. Вектор $\vec{n}$ называют вектором нормали.

Пусть $M(x, y, z)$ – любая точка данной плоскости, найдем вектор $\overrightarrow{M_0M}$: $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$, где $\bar{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0; $\bar{r}$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x; y; z)$ данной плоскости (рис. 4.1).

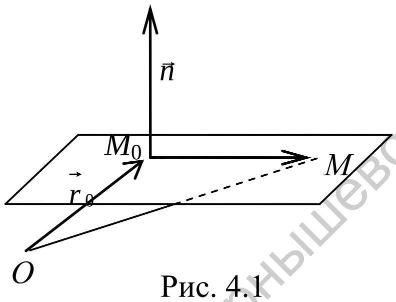


Рис. 4.1

Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости, то он перпендикулярен любому вектору на этой плоскости, то есть $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$, а следовательно, их скалярное произведение равно нулю

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)=0, \tag{4.1}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\bar{n}\cdot\bar{r}+D=0, \tag{4.2}$$

где $D=-(\bar{n}\bar{r}_0)$.

Так как $\bar{n}(A;B;C)$ и $\bar{r}-\bar{r}_0\ (x-x_0; y-y_0; z-z_0)$, то уравнение (4.1) примет вид

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку*.

Если в уравнении (4.3) раскрыть скобки и обозначить $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, то получим *общее уравнение плоскости*

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{4.4}$$

<u>Замечание.</u> В уравнениях (4.3) и (4.4) коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль ($A^2+B^2+C^2\neq 0,$ так как вектор $\bar{n}$ не является нуль-вектором).

В общем уравнении плоскости можно рассмотреть частные случаи, когда некоторые из коэффициентов уравнения (4.4) равны нулю и плоскость имеет в пространстве определенное расположение.

1. $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0,\ D=0$:

$Ax+By+Cz=0$, плоскость проходит через начало координат.

2. Один из коэффициентов A, B, C равен нулю и

а) $D\neq 0$, плоскость параллельна соответствующей оси координат:

$A=0,\quad By+Cz+D=0,$ параллельна оси Ox,

$B=0,\quad Ax+Cz+D=0,$ параллельна оси Oy,

$C=0,\quad Ax+By+D=0,$ параллельна оси Oz;

б) $D=0$, плоскость проходит через соответствующую координатную ось:

$A=0,\quad By+Cz=0$, проходит через ось Ox,

$B=0,\quad Ax+Cz=0$, проходит через ось Oy,

$C=0,\quad Ax+By=0$, проходит через ось Oz.

3. Два коэффициента при текущих координатах равны нулю и

а) $D\neq 0$, плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

$A=0,\quad B=0,\quad Cz+D=0$, параллельна плоскости Oxy,

$B=0,\quad C=0,\ Ax+D=0$, параллельна плоскости Oyz,

$C=0,\quad A=0,\quad By+D=0$, параллельна плоскости Oxz;

б) $D=0$, плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:

$B=0,\ C=0,\ Ax=0\,(x=0)$, уравнение плоскости Oyz,

$C=0,\ A=0, By=0\ (y=0)$, уравнение плоскости Oxz,

$A=0,\ B=0,\ Cz=0\ (z=0)$, уравнение плоскости Oxy.

Если ни один из коэффициентов общего уравнения (4.4) не равен нулю, то делением всех членов уравнения на $D\neq 0$ и переносом свободного члена в правую часть оно может быть приведено к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{4.5}$$

где $a=-\dfrac{D}{A},\quad b=-\dfrac{D}{B},\quad c=-\dfrac{D}{C}$ – алгебраические величины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат.

Уравнение (4.5) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Примеры.

1. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат $Ox,\ Oy,\ Oz$ отрезки $l=1, m=2, n=-3$ соответственно.

Решение. Для решения воспользуемся уравнением (4.5).

Для нашего случая $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{3}=1$ или $6x+3y-2z-6=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;2;1)$ и параллельной векторам $\bar{p}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{q}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

Решение. Сначала построим вектор, перпендикулярный векторам $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Это будет вектор нормали к искомой плоскости, и в качестве этого вектора можно взять векторное произведение векторов $\bar{p}(1;1;1)$ и $\bar{q}(1;1;-1)$ данных плоскостей

$$\bar{N}=\bar{p}\times\bar{q}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\1&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=-2\bar{i}+2\bar{j}.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;2;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}\,(-2;2;0)$, получаем

$$-2(x-0)+2(y-2)+0\cdot(z-1)=0 \text{ или } x-y+2=0.$$

Нормальное уравнение плоскости

<u>Определение 4.2.</u> *Нормальным уравнением плоскости* называется уравнение вида

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0, \tag{4.6}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость, а p – его длина.

Общее уравнение плоскости (4.4) умножением на нормирующий множитель μ можно привести к нормальному виду (4.6).

Нормирующий множитель определяется формулой

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.7}$$

Знак μ выбирается противоположным знаку D.

Расстояние от точки до плоскости

<u>Определение 4.3.</u> *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости (4.6) вычисляется по формуле

$$d=\left|x_1\cdot\cos\alpha+y_1\cdot\cos\beta+z_1\cdot\cos\gamma-p\right|, \tag{4.8}$$

а до плоскости (4.4) – по формуле

$$d=\frac{\left|A\cdot x_1+B\cdot y_1+C\cdot z_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.9}$$

Угол между двумя плоскостями

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы своими уравнениями две плоскости

$$A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0, \tag{4.10}$$

$$A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0. \tag{4.11}$$

Следовательно, известны координаты векторов, перпендикулярных данным плоскостям: $\overline{n}_1(A_1;B_1;C_1)$, $\overline{n}_2(A_2;B_2;C_2)$. Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярными к ним векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$. Используя формулу скалярного произведения векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, получим выражение для угла между плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{4.12}$$

Из (4.12) получаем условие перпендикулярности плоскостей ($\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$):

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей получаем из условия коллинеарности векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \qquad (4.13)$$

или $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 \neq \lambda D_1$ (коэффициенты при текущих координатах пропорциональны).

Условие совпадения плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \qquad (4.14)$$

(все соответствующие коэффициенты пропорциональны).

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая линия в пространстве относительно прямоугольной декартовой системы координат может быть задана различными способами. Например, прямая однозначно определяется точкой и параллельным ей вектором, двумя точками и т.п. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнений.

Параметрические уравнения прямой

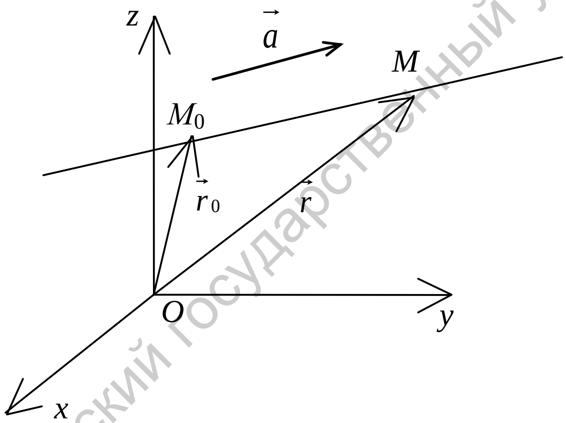


Рис. 4.2

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\bar{a} = (l; m; n)$. Для вывода уравнения прямой, проходящей через данную точку M_0 параллельно вектору $\bar{a}$, совместим начало вектора с точкой M_0. На направлении вектора $\bar{a}$ выберем произвольную точку $M(x; y; z)$ (рис. 4.2). Вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\bar{a}$ коллинеарны, следовательно, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{a}t$. Введем радиусы-векторы точек M и M_0, обозначив их $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ соответственно. Используя формулу сложения векторов, из треугольника OM_0M получаем $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$ или уравнение прямой в векторном виде

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t, \qquad (4.15)$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой $M(x; y; z)$; $\bar{r}_0$ – радиус-вектор определенной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$; t – параметр, принимающий всевозможные действительные значения.

Вектор $\bar{a}$ называется *направляющим вектором прямой*.

Уравнение (4.15) в координатах примет вид

$$x = x_0 + lt;\; y = y_0 + mt;\; z = z_0 + nt. \tag{4.16}$$

Уравнения (4.16) называют *параметрическими уравнениями прямой*.

Если параметр t рассматривать как время, а уравнения (4.16) как уравнения движения точки M, то эти уравнения будут определять прямолинейное и равномерное движение точки M. При M=0 точка совпадает с M_0. Скорость точки M постоянна и определяется формулой

$$v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}. \tag{4.17}$$

Канонические уравнения прямой

Исключая из уравнений (4.16) параметр t, получим *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{4.18}$$

Если $n = 0$, т. е. аппликата направляющего вектора нулевая, то для любой точки прямой координата z постоянна $z = z_0$, то есть прямая параллельна плоскости XOY. Аналогично, в случае равенства нулю других координат направляющего вектора.

Уравнения прямой, проходящей через две точки

Пусть в некоторой прямоугольной системе координат даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Возьмем в качестве направляющего вектора прямой вектор $\overrightarrow{M_2M_1} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1)$, тогда уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.19}$$

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется совместным заданием двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 первого уравнения не

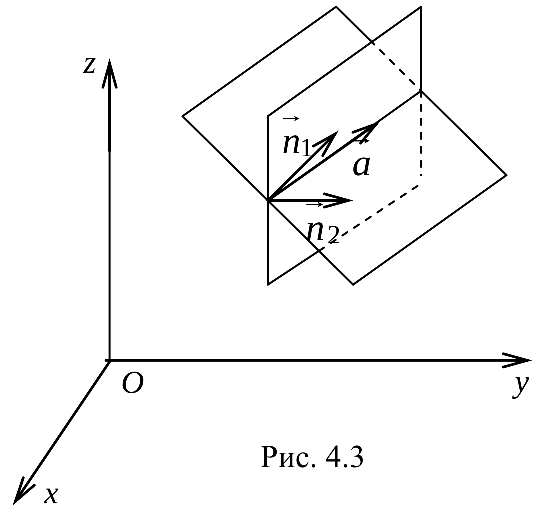


Рис. 4.3

пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 второго.

За направляющий вектор прямой (4.20) можно принять векторное произведение $\bar{a} = \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1\ (A_1;B_1;C_1)$, $\bar{n}_2\ (A_2;B_2;C_2)$ – векторы нормалей к соответствующим плоскостям (рис. 4.3). Направляющий вектор $\vec{a}$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (4.21)$$

или в координатах вектора $\bar{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$.

Если $M_0(x_0;y_0;z_0)$ точка прямой (4.20), $\bar{a} = \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2$ ее направляющий вектор, то *канонические уравнения* прямой имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad (4.22)$$

а ее *параметрические уравнения* запишутся так:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t; \quad y = y_0 - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} t; \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t. \qquad (4.23)$$

Угол между двумя прямыми

Определение 4.4. *Углом между прямой и координатной осью* называется угол между направляющим вектором и ортом оси.

Определение 4.5. *Углом между двумя прямыми* называется угол между направляющими векторами этих прямых.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две прямые своими параметрическими уравнениями:

$$x = x_1 + l_1 t; \quad y = y_1 + m_1 t; \quad z = z_1 + n_1 t; \qquad (4.24)$$

$$x = x_2 + l_2 t; \quad y = y_2 + m_2 t; \quad z = z_2 + n_2 t. \qquad (4.25)$$

Косинус угла между двумя прямыми можно определить как косинус угла между направляющими векторами этих прямых $\vec{a}_1(l_1;m_1;n_1)$ и $\vec{a}_2(l_2;m_2;n_2)$. Из формулы скалярного произведения этих векторов получаем формулу для косинуса угла между прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (4.26)$$

Условие перпендикулярности прямых (4.24) и (4.25) $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ получим из условия $\cos\varphi = 0$:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (4.27)$$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть две прямые заданы своими направляющими векторами $\vec{a}_1(l_1;m_1;n_1)$, $\vec{a}_2(l_2;m_2;n_2)$, а точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ принадлежат соответствующим прямым.

Построим вектор $\overline{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ и составим смешанное произведение $\Delta=\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$, которое в координатах представляет собой определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}. \tag{4.28}$$

Условие компланарности векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overline{M_1M_2}$ сводится к равенству $\Delta=0$, которое означает условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Рассмотрим три возможных варианта равенства $\Delta=0$.

1. Если в определителе (4.28) все строки пропорциональны, т.е.

$$l_2=\lambda l_1,\ m_2=\lambda m_1,\ n_2=\lambda n_1,$$
$$x_2-x_1=\mu l_1,\ y_2-y_1=\mu m_1,\ z_2-z_1=\mu n_1,$$

то прямые (4.24) и (4.25) совпадают.

2. Если пропорциональны только две первые строки, т.е.

$$l_2=\lambda l_1,\ m_2=\lambda m_1,\ n_2=\lambda n_1, \tag{4.29}$$

то прямые (4.24) и (4.25) параллельны.

3. Если $\Delta=0$, но условие (4.29) не выполнено, то прямые (4.24) и (4.25) пересекаются.

В случае $\Delta\neq 0$, прямые (4.24) и (4.25) скрещиваются, т.е. лежат в разных не параллельных плоскостях.

Расстояние от точки до прямой

Расстоянием d от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямой $L\ \vec{a}(l_0;m_0;n_0);M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

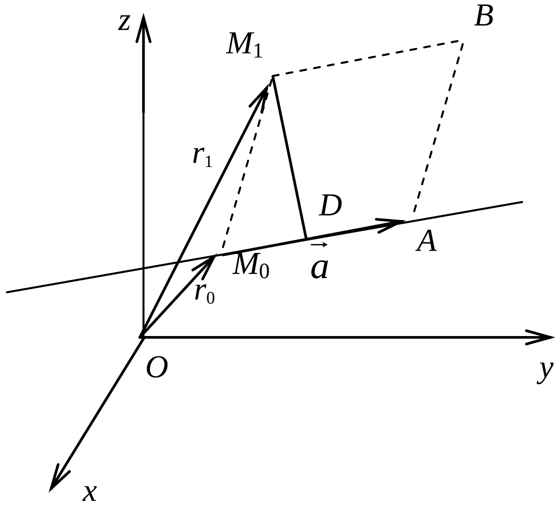


Рис. 4.4

Это расстояние рассчитывается как высота M_1D параллелограмма M_0M_1BA, построенного на направляющем векторе $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}=r_1-r_0$ (рис. 4.4), где r_0, r_1 – радиус-векторы точек M_0 и M_1:

$$d=\frac{S_{пар}}{|\vec{a}|}.$$

Площадь параллелограмма,

построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{a}$, можно рассчитать по формуле

$$S_{пар} = \left| \left[(r_1 - r_0)\vec{a} \right] \right|.$$

Тогда расстояние d определяется формулой

$$d = \frac{\left| \left[(r_1 - r_0)\vec{a} \right] \right|}{\sqrt{\vec{a}^2}}, \tag{4.30}$$

где r_1 и r_0 – радиус-векторы точек M_1, M_0; $\vec{a}(l_0;m_0;n_0)$ – направляющий вектор.

В координатах формула расстояния d принимает вид

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m_0 & n_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l_0 & n_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l_0 & m_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_0^2 + m_0^2 + n_0^2}}. \tag{4.31}$$

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

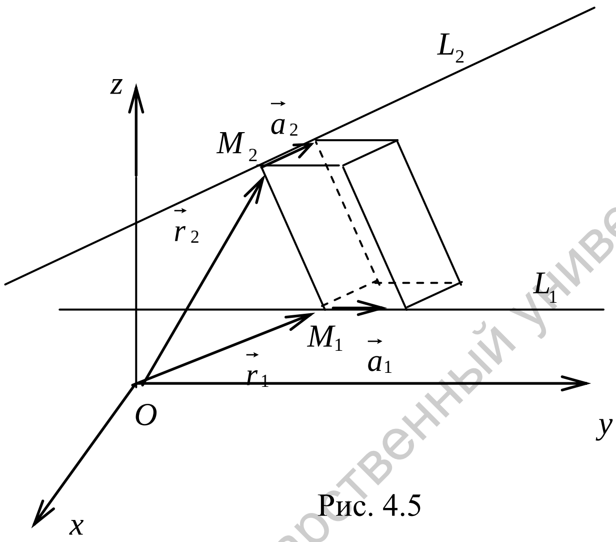


Рис. 4.5

Пусть прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и ее направляющий вектор $\vec{a}_1(l_1;m_1;n_1)$, а прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и ее направляющий вектор $\vec{a}_2(l_2;m_2;n_2)$.

Уравнения прямых L_1, L_2 в векторном виде:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t, \quad \bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t.$$

Кратчайшим расстоянием между двумя прямыми в пространстве называется высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и векторе $\overline{M_1M_2}$, где M_1 и M_2 – начальные точки $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ (рис. 4.5).

Кратчайшее расстояние между прямыми L_1 и L_2 определяется формулой

$$d = \frac{\left| (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{a}_1\bar{a}_2 \right|}{\left| \left[\bar{a}_1\bar{a}_2 \right] \right|} \tag{4.32}$$

или в координатной форме

$$d = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}},$$

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положителен и знак минус в противном случае.

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Углом φ *между прямой* L $\vec{a}(l;m;n);M_0(x_0;y_0;z_0)$ *и плоскостью* π $(\vec{n}(A,B,C))$ называется угол между направляющим вектором $\vec{a}$ прямой и любым вектором, принадлежащим плоскости. Если прямая L перпендикулярна плоскости (ее ортогональной проекцией на плоскость является точка), то искомый угол равен 90°. Но так как задан нормальный вектор $\vec{n}$ для плоскости π, то задача сводится к нахождению из скалярного произведения $\vec{a} \cdot n = |\vec{a}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ величины $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$ или в координатах

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (4.33)$$

Если прямая L и плоскость π пересекаются, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ не ортогональны и $Al + Bm + Cn \neq 0$.

Координаты точки пересечения прямой L и плоскости π находятся из системы уравнений, определяющей прямую и плоскость.

Параллельность прямой L и плоскости π $(\varphi = 0)$ означает, что $\vec{a}$ и $\vec{n}$ ортогональны, а точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не принадлежит плоскости, что соответствует условиям

$$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \qquad (4.34)$$

Условие, при котором прямая L лежит на плоскости π, определяется соотношениями

$$Al + Bm + Cn = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (4.35)$$

<u>Определение 4.6.</u> *Пучком плоскостей* называется совокупность плоскостей, проходящих через данную прямую.

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

имеет вид

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (4.36)$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Уравнение (4.36) можно записать так:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \text{ где } \lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \ \alpha \neq 0.$$

Примеры.

Даны точки $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$. Найти:

1) уравнение ребер тетраэдра;
2) длину ребра DC;
3) длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC;
4) угол между ребрами BD и AD;
5) площадь грани DBC;
6) объем тетраэдра.

Решение.

1. В соответствии с формулой (4.19) запишем уравнения всех ребер тетраэдра:

ребро AB $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{z-1}{5-1}$; $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$;

ребро BC $\dfrac{x-2}{6-2} = \dfrac{y-3}{2-3} = \dfrac{z-5}{3-5}$; $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-5}{-2}$;

ребро CD $\dfrac{x-6}{3-6} = \dfrac{y-2}{7-2} = \dfrac{z-3}{2-3}$; $\dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{-1}$;

ребро AD $\dfrac{x-0}{3-0} = \dfrac{y-0}{7-0} = \dfrac{z-1}{2-1}$; $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{7} = z-1$;

ребро BD $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-3}{7-3} = \dfrac{z-5}{2-5}$; $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{-3}$;

ребро AC $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y-0}{2-0} = \dfrac{z-1}{3-1}$; $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

2. Ищем длину ребра DC:

$$|DC| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2},$$

$$|DC| = \sqrt{(6-3)^2 + (2-7)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{35}.$$

3. Сначала найдем уравнение грани DBC как уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $D(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $C(\bar{r}_3)$ (здесь $\bar{r}_1 = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{r}_2 = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{r}_3 = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$), можно найти из условия компланарности векторов $\bar{r} - \bar{r}_1 = MD$, $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = BD$, $\bar{r}_3 - \bar{r}_1 = CD$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ – радиус-вектор текущей точки M искомой плоскости DBC (см. с. 60):

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\cdot(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\cdot(\bar{r}_3-\bar{r}_1)=0$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Тогда имеем $\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 2-3 & 3-7 & 5-2 \\ 6-3 & 2-7 & 3-2 \end{vmatrix}=0.$

Откуда получим уравнение плоскости, проходящей через три точки,

$$11x+10y+17z-137=0.$$

Теперь подсчитаем длину высоты, опущенной на грань DBC, по формуле (4.9)

$$d=AH=\frac{|11\cdot 0+10\cdot 0+17\cdot 1-137|}{\sqrt{11^2+10^2+17^2}}=\frac{120}{\sqrt{510}}.$$

4. По формуле (4.12) имеем

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 1+4\cdot 7-3\cdot 1}{\sqrt{1+4^2+3^2}\sqrt{3^2+7^2+1}}=\frac{14\sqrt{26}}{13\sqrt{59}}.$$

5. Длина ребра BC определяется аналогично длине ребра DC:

$$|BC|=\sqrt{(6-2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{21}.$$

Найдем косинус угла C. По формуле угла между прямыми CD и CB (4.26) получим

$$\cos C=\frac{(-3)\cdot 4+5\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}}=-\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тогда находим $\sin C=\sqrt{1-\frac{15}{49}}=\frac{\sqrt{34}}{7}$. И по формуле площади треугольника имеем

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|CD|\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{34}}{7}=\frac{\sqrt{510}}{2}.$$

6. Объем тетраэдра, вершинами которого являются четыре заданные точки, определяется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|.$$

В нашем случае получаем

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2-0 & 3-0 & 5-1 \\ 6-0 & 2-0 & 3-1 \\ 3-0 & 7-0 & 2-1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=20.$$

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 4.7. *Поверхностью второго порядка* называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат в пространстве:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0. \qquad (4.37)$$

Уравнение (4.37) называется *общим уравнением* поверхности второго порядка.

Далее рассмотрим частные случаи поверхностей.

Сфера

Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (4.38)$$

определяет сферическую поверхность радиуса R с центром в точке $S(a;b;c)$ и называется *каноническим (простейшим) уравнением сферы*.

Если $a=b=c=0$, получаем уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+E=0$$

с помощью дополнения до полных квадратов можно привести к виду

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d. \qquad (4.39)$$

Если $d>0$, то уравнение (4.39) определяет сферу радиуса $R=\sqrt{d}$. Если $d=0$, то уравнению (4.39) удовлетворяют координаты единственной точки $S(a;b;c)$. Если $d<0$, то уравнению (4.39) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Взаимное расположение точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и сферы (4.39) определяется следующими условиями:

если $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2=d$, то точка M_1 лежит на сфере;

если $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2>d$, то точка M_1 лежит вне сферы;

если $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2<d$, то точка M_1 лежит внутри сферы.

Примеры.

1. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$.

Р е ш е н и е . Приведем уравнение сферы к каноническому виду (4.39), для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие x, y, z, т.е. перепишем уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + (y^2 + 2y + 1) - 1 + z^2 + 1 = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, центр сферы – точка $S(\frac{1}{2};-1;0)$, а ее радиус $R = \frac{1}{2}$.

2. Определить, как расположена относительно сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 49$ точка $M(1;-1;3)$.

Р е ш е н и е . Для решения подставим координаты точки в каноническое уравнение сферы: $(1-2)^2 + (-1+3)^2 + 9 = 14$.

Откуда получаем, что 14<49, т.е. точка лежит внутри сферы.

3. Определить, как расположена относительно сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 49$ плоскость $x - 3y + z = 0$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 49, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Для решения достаточно показать, как расположены друг относительно друга окружность $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$ и прямая $x - 3y = 0$ (полагая $z = 0$, т.е. в плоскости Oxy):

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 49, \\ x = 3y. \end{cases}$$

Получаем при решении, что y_1=3; x_1=9; y_2=2,4; x_2=7,2. Прямая пересекает окружность. Следовательно, сфера пересекается с данной плоскостью.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из видов:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид трехосный, рис. 4.6); (4.40)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополостный гиперболоид, рис. 4.7); (4.41)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (двуполостный гиперболоид, рис. 4.8); (4.42)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (конус, рис. 4.9);} \qquad (4.43)$$

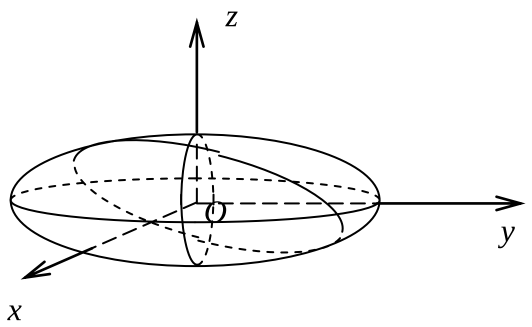


Рис. 4.6

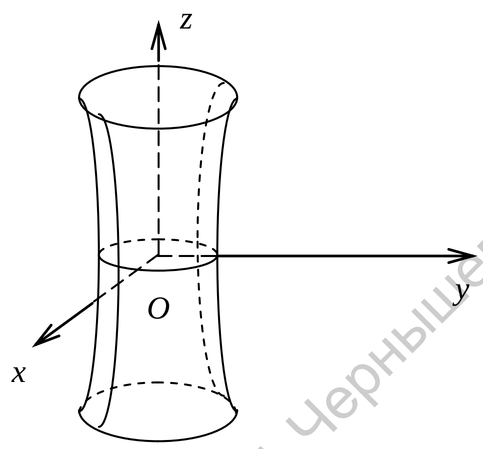


Рис. 4.7

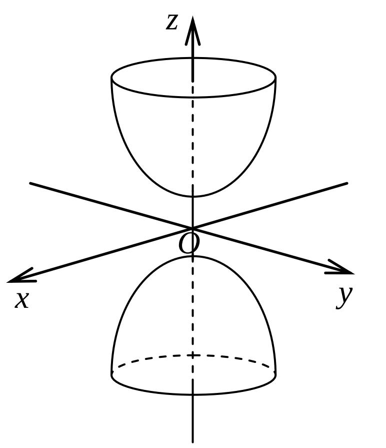


Рис. 4.8

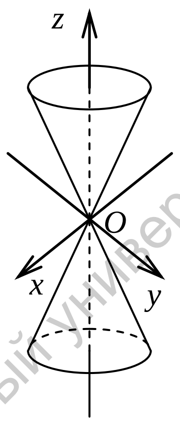


Рис. 4.9

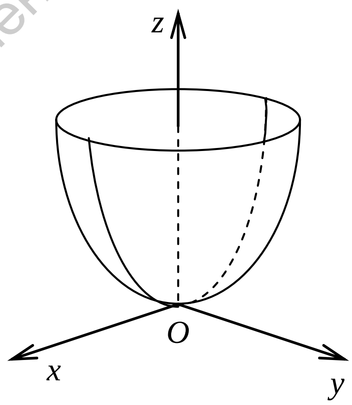


Рис. 4.10

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (эллиптический параболоид, рис. 4.10).} \qquad (4.44)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \text{ (гиперболический параболоид, рис. 4.11);} \qquad (4.45)$$

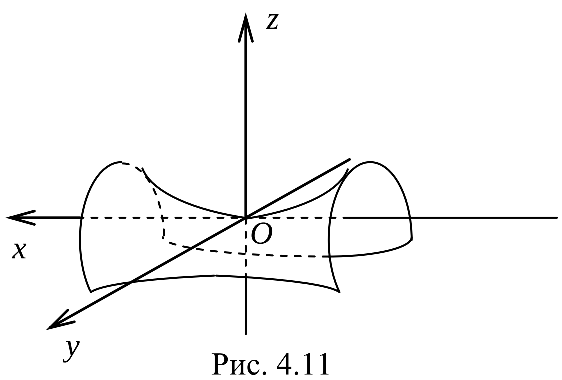


Рис. 4.11

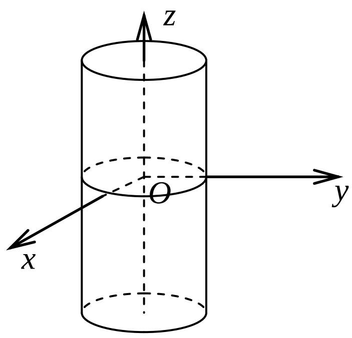


Рис. 4.12

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (эллиптический цилиндр, рис. 4.12).} \qquad (4.46)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (гиперболический цилиндр, рис. 4.13);} \qquad (4.47)$$

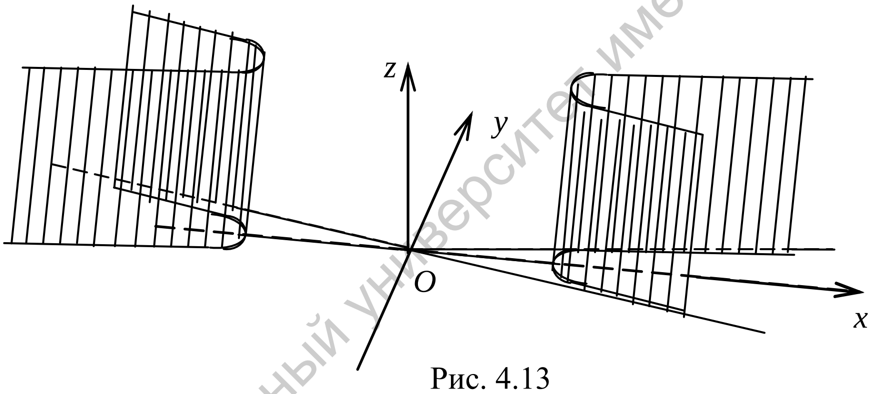


Рис. 4.13

$$y^2 = 2px \text{ (параболический цилиндр, рис. 4.14);} \qquad (4.48)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ (пара пересекающихся плоскостей, рис. 4.15).} \qquad (4.49)$$

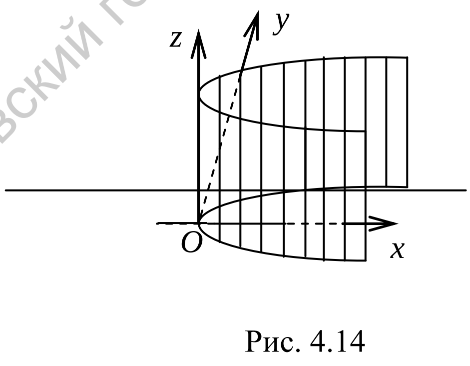


Рис. 4.14

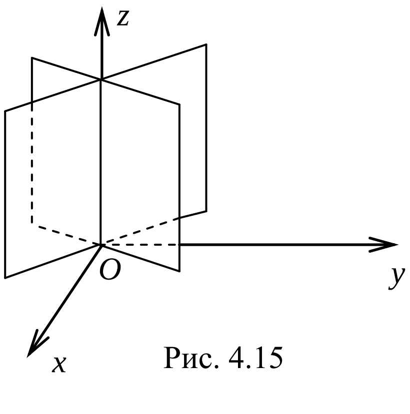


Рис. 4.15

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \text{ (пара параллельных плоскостей, рис. 4.16);} \qquad (4.50)$$

$$x^2 = 0 \text{ (пара совпадающих плоскостей, рис. 4.17).} \qquad (4.51)$$

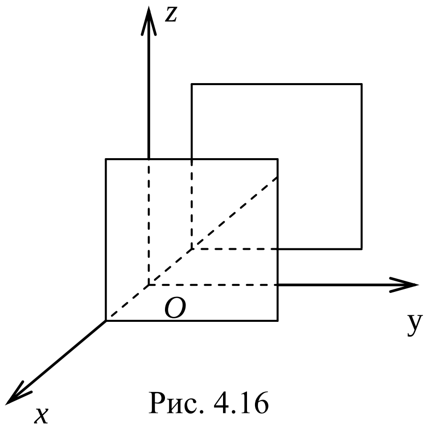


Рис. 4.16

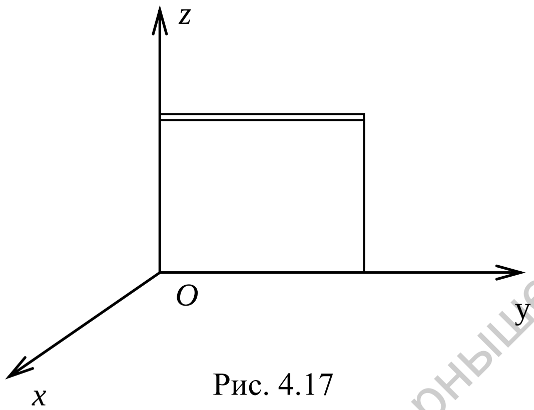


Рис. 4.17

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Поверхность, образованная вращением линии l:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(z) \\ y &= \varphi_2(z) \end{aligned}\right\} \qquad (4.52)$$

вокруг оси Oz, определяется уравнением

$$x^2 + y^2 = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z). \qquad (4.53)$$

Уравнение (4.53) называется *уравнением поверхности вращения*.

Определение 4.8. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, описываемая прямой (*образующей*), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (*направляющую*).

Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, имеет вид

$$F(x, y) = 0. \qquad (4.54)$$

Уравнение направляющей цилиндрической поверхности (4.54) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.55)$$

Канонические уравнения цилиндров второго порядка имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – эллиптический цилиндр,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – гиперболический цилиндр,}$$

$$y^2 = 2px \text{ – параболический цилиндр.}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси Oz, а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости *Oxy*.

Коническая поверхность

Определение 4.9. *Конической поверхностью* называется поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку (*вершину конуса*) и пересекающей данную линию (*направляющую конуса*).

Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz, определяется формулой (4.43).

Аналогично уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси Oy и Ox.

Уравнения второй степени могут выражать, кроме поверхностей в собственном смысле, и другие образы, которые лишь условно можно назвать поверхностями.

Общее уравнение второй степени относительно *x*, *y*, *z* может быть приведено к одному из уравнений (4.40)–(4.51) или к одному из следующих уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (мнимый конус);} \qquad (4.56)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ (пара мнимых пересекающихся плоскостей);} \qquad (4.57)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (мнимый эллипсоид);} \qquad (4.58)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (мнимый эллиптический цилиндр);} \qquad (4.59)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1 \text{ (пара мнимых параллельных плоскостей).} \qquad (4.60)$$

Уравнению (4.56) удовлетворяют координаты единственной точки $O(0;0;0)$, уравнению (4.57) – координаты точек, лежащих на прямой $x=0$, $y=0$. Уравнениям (4.58)–(4.60) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Поверхности, образованные движением прямой, называются *линейчатыми*, а прямые, целиком лежащие на поверхности, называются *прямолинейными* образующими.

Однополосный гиперболоид (4.41) имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=q\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=p\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=q'\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ q'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=p'\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Гиперболический параболоид (4.45) имеет также два семейства образующих:

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=qz\\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2p\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned} p'\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=2q'\\ q'\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=p'z\end{aligned}\right\}.$$

Примеры.

1. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

а) $x^2+y^2=4$; б) $z^2=y$; в) $z^2=xz$?

Решение:

а) приведём уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, получим уравнение кругового цилиндра;

б) уравнение $z^2=y$ определяет параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси Ox, направляющей служит парабола, лежащая в плоскости Oyz;

в) уравнение $z^2=zx$ может быть представлено в виде $z(z-x)=0$ и распадается на два уравнения: $z=0$ и $z=x$, т.е. оно определяет две плоскости – плоскость Oxy и биссектральную плоскость $z=x$, проходящую через ось Oy.

2. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка $M(0;0;0)$, а направляющей – эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $z=3$.

Решение. Составим уравнение образующей AM, где $A(x_0;y_0;z_0)$ – точка, лежащая на эллипсе. Уравнения этой образующей имеют вид $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$. Так как точка A лежит на эллипсе, то её координаты удовлетворяют уравнениям эллипса, т.е. $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$, $z_0=3$. Исключив теперь x_0, y_0 и z_0 из системы $\frac{x}{x_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$, $\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$, $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$, $z_0=3$, получим уравнение искомого конуса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

1. Выведите уравнение плоскости в векторной форме, а также общее уравнение плоскости.
2. Получите и объясните уравнение плоскости в отрезках.
3. Определите расстояние от точки до плоскости.
4. Определите угол между плоскостями и сформулируйте условия параллельности, перпендикулярности и совпадения плоскостей.
5. Дайте определение прямой в пространстве, получите векторное уравнение прямой.
6. Выведите каноническое уравнение прямой и уравнение прямой, проходящей через две точки.
7. Опишите прямую линию как результат пересечения двух плоскостей.
8. Определите угол между прямыми, а также условие перпендикулярности прямых.
9. Опишите возможные варианты взаимного расположения двух прямых в пространстве.
10. Дайте определение и формулу для нахождения расстояния от точки до прямой.
11. Сформулируйте понятие кратчайшего расстояния между двумя прямыми.
12. Как определяется угол между прямой и плоскостью Сформулируйте условия параллельности прямой и плоскости.
13. Дайте определение сферы.
14. Приведите классификацию канонических уравнений поверхностей второго порядка.
15. Дайте определение и классификацию цилиндров второго порядка.
16. Дайте определение и перечислите уравнения конусов второго порядка.

Глава 5. МАТРИЦЫ

В главе 2 было дано определение матрицы размера $m{\times}n$ как таблицы, состоящей из m строк и n столбцов.

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение матриц

<u>Определение 5.1.</u> *Суммой (разностью)* двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$.

Обозначается $C=A+B$ $(C=A–B)$.

<u>Замечание</u>. Матрицы разного размера складывать нельзя.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0-1 & -1+3 \\ 2-4 & 3+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

<u>Определение 5.2.</u> *Произведением матрицы A и числа* α называется матрица C того же размера, что и матрица A с элементами $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Обозначается $C=\alpha A$.

Пример. $$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot -1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

<u>Определение 5.3.</u> *Произведением* матрицы A размера $m{\times}n$ и матрицы B размера $n{\times}p$ называется матрица C размера $m{\times}p$ $(C=AB)$, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,p. \tag{5.1}$$

Каждый элемент c_{ij} результирующей матрицы C определяется как скалярное произведение строки с номером i матрицы A и столбца с номером j матрицы B.

Пример.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 4+0\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 5+0\cdot 3\\ 3\cdot 2-1\cdot 4+1\cdot 0 & 3\cdot(-1)-1\cdot 5+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 2 & -5\end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B, то произведение AB не определено.

Для квадратных матриц одного размера в общем случае $AB\neq BA$.

Пример.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 5\\ -1\cdot 0+1\cdot 4 & -1\cdot 3+1\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 13\\ 4 & 2\end{pmatrix}, \text{ но}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1-3\cdot 1 & 0\cdot 2+3\cdot 1\\ 4\cdot 1-5\cdot 1 & 4\cdot 2+5\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -1 & 13\end{pmatrix}.$$

Отметим, что существуют матрицы со свойством $AB=BA$. Такие матрицы называются *коммутирующими.*

Транспонирование

Для матрицы A размера $m\times n$ *транспонированной* называется матрица C размера $n\times m$ с элементами $c_{ij}=a_{ji}$.

Обозначается $C=A^{\mathrm{T}}$.

Пример. $$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Свойства операций над матрицами

1.	$A+B=B+A$	(коммутативность сложения);
2.	$(A+B)+C=A+(B+C)$	(ассоциативность сложения);
3.	$A+O=A$	(сложение с нулевой матрицей);
4.	$A–A=O$	(вычитание матрицы из самой себя);
5.	$1\cdot A=A$	(умножение матрицы на единицу);
6.	$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$	(ассоциативность относительно произведения чисел);
7.	$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B$	(дистрибутивность относительно суммы чисел);
8.	$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$	(дистрибутивность относительно числового множителя);
9.	$\alpha(AB)=(\alpha A)B$	(ассоциативность относительно произведения на число);
10.	$A(B+C)=AB+AC$	(дистрибутивность);
11.	$A(BC)=(AB)C$	(ассоциативность);
12.	$AE=EA=A$	(произведение с единичной матрицей);
13.	$AO=OA=O$	(произведение с нулевой матрицей);

14. $(A+B)^T = A^T + B^T$ (транспонирование суммы матриц);

15. $(AB)^T = B^T A^T$ (транспонирование произведения матриц).

Доказательство всех свойств проводится по одной и той же схеме: доказывается, что матрица, являющаяся результатом вычисления левой части равенства, и матрица, являющаяся результатом вычисления правой части равенства, имеют одинаковую размерность и элементы, стоящие в i-й строке и j-м столбце обеих матриц равны. Для примера докажем только свойство 15.

Доказательство свойства 15.

Пусть матрица A размера $m\times n$, B размера $n\times p$, тогда их произведение имеет размер $m\times p$, а матрица, транспонированная к произведению (левая часть равенства) - $p\times m$. Справа стоит произведение матрицы размера $p\times n$ (транспонированной к B) и матрицы размера $n\times m$ (транспонированной к A), то есть матрица так же, как и слева, размера $p\times m$.

Покажем теперь равенство элементов:

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} = \sum_k (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}.$$

МИНОРЫ И РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу A произвольного размера (не обязательно квадратную). Вычеркнем из нее несколько строк и столбцов, чтобы осталось ровно k строк и k столбцов. Определитель оставшейся квадратной матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы A.

<u>Определение 5.4.</u> *Рангом* матрицы A называется наибольший порядок не равного нулю минора.

Пусть k – ранг матрицы A.

<u>Определение 5.5.</u> *Базисным минором* матрицы A называется любой ненулевой минор порядка k.

ТЕОРЕМА 5.1 (о базисном миноре). Любая строка матрицы A может быть представлена как линейная комбинация строк, входящих в базисный минор. (Аналогичное утверждение имеет место и для столбцов.)

Доказательство.

Пусть матрица A имеет ранг k и мы хотим представить в виде линейной комбинации строк базисного минора i-ю строку матрицы A. Не уменьшая общности, можно считать, что базисный минор стоит в левом верхнем углу матрицы A. Рассмотрим квадратную матрицу B порядка k+1, составленную из k строк и столбцов базисного минора, i-й строки матрицы A (не всей строки, а тех ее элементов, которые входят в столбцы, образующие базисный минор) и j-го столбца матрицы A (не всего столбца, а тех его элементов, которые входят в строки, образующие базисный минор и i-ю строку).

Если i-я строка матрицы A входила в базисный минор, то в построенном нами определителе есть две одинаковые строки, и он равен нулю. Если i-я строка матрицы A не входила в базисный минор, то построенный нами определитель является минором $(k+1)$-го порядка матрицы A и должен равняться нулю, поскольку ранг матрицы A равен k. Следовательно, в любом случае $\det B=0$.

Разложим определитель матрицы B по элементам последнего столбца (который является частью j-го столбца матрицы A):

$$\det B = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \ldots + c_k a_{kj} + c_{k+1} a_{ij} = 0,$$

где $c_1, \ldots, c_{k+1}$ – некоторые числа. Заметим, что коэффициент c_{k+1} с точностью до знака совпадает с базисным минором, следовательно, отличен от нуля. Разделив на него, получим:

$$a_{ij} = -\frac{c_1}{c_{k+1}} a_{1j} - \frac{c_2}{c_{k+1}} a_{2j} - \ldots - \frac{c_k}{c_{k+1}} a_{kj}.$$

Мы представили элемент a_{ij} в виде линейной комбинации элементов, входящих в базисный минор, причем коэффициенты не зависят от номера выбранного столбца. Следовательно, всю i-ю строку можно представить как линейную комбинацию строк базисного минора.

Вычисление ранга матрицы

Основываясь на свойствах определителей, можно сформулировать правила преобразования матрицы, сохраняющие ее ранг и облегчающие нахождение ранга матрицы.

1. Ранг матрицы не изменится, если поменять местами две ее строки (столбца).
2. Ранг матрицы не изменится, если все элементы ее строки (столбца) умножить на число, отличное от нуля.
3. Ранг матрицы не изменится, если из матрицы вычеркнуть нулевую строку (столбец).
4. Если в матрице есть две пропорциональных строки (столбца), то ранг матрицы не изменится при вычеркивании одной из них.
5. Ранг матрицы не изменится, если одну строку (столбец) заменить ее суммой с другой строкой (столбцом).

Действительно, все эти преобразования переводят нулевые определители в нулевые, а ненулевые – в ненулевые. Метод вычисления ранга матрицы состоит в том, что, применяя указанные преобразования, приводят матрицу к виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & a_{1n+1} & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & a_{2n+1} & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} & a_{3n+1} & a_{3m} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} & a_{nn+1} & a_{nm} \end{pmatrix}$, поскольку в этом случае легко указать ненулевой минор: его образуют первые n столбцов. (Здесь подразумевается, что $n \le m$. Если окажется, что $n > m$, то следует сначала транспонировать матрицу, что тоже не меняет ранг, поскольку определители транспонированных матриц равны.)

Отметим, что всегда можно привести произвольную матрицу к указанному ступенчатому виду, например, следующим способом:

3) вычтем первую строку, умноженную на подходящий множитель из всех остальных, чтобы получить нули в первом столбце со второй по последнюю строку;
4) вычтем вторую строку, умноженную на подходящий множитель из всех остальных, кроме первой, чтобы получить нули во втором столбце с третьей по последнюю строку (полученные ранее нули в первом столбце при этом не "портятся", так как от них будем отнимать те же нули;
5) и так далее, спускаясь по строкам вниз, получим требуемое.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(вычтем из второй строки первую, умноженную на 2, из третьей строки − первую, умноженную на 3, из четвертой строки − первую, умноженную на 5)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 4 & -8 & -7 & -18 \end{pmatrix}$$

(вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 1,5, из четвертой строки – вторую, умноженную на 2)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4{,}5 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & -12 \end{pmatrix}$$

(прибавим к четвертой строке третью, умноженную на –8)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 24 \end{pmatrix}.$$

Левый угловой минор четвертого порядка равен произведению диагональных элементов: $1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2 \neq 0$, следовательно, ранг матрицы равен 4.

На практике совсем не обязательно пользоваться именно описанным методом. Лучше вычитать строку и столбцы (не обязательно соседние), в которых много одинаковых элементов, а затем переставить строки и столбцы, чтобы получить нужное расположение нулей.

П р и м е р.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ (вычтем из первой строки четвертую)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ (поскольку первая строка пропорциональна второй (с коэффициентом 2), вычеркнем ее)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ (умножим третий столбец на 2 и вычтем его из первого столбца)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ (поменяем первую строку с третьей строкой и второй столбец с третьим)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первые три столбца полученной матрицы образуют треугольную матрицу с определителем $1 \cdot 5 \cdot 2 \neq 0$, ранг исходной матрицы равен 3.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение 5.6. Если для квадратных матриц A и B, имеющих одинаковую размерность, $AB=E$ или $BA=E$, то матрица B называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1}.

Отметим, что если $AB=E$ и $CA=E$, то $B=C$.

Действительно, $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$.

Обратная матрица существует не для любой квадратной матрицы. Например, очевидно, нулевая матрица не может иметь обратную, поскольку при умножении ее на любую другую матрицу будем получать нулевую, а не единичную.

Условие существования обратной матрицы

Поскольку имеет место очевидная цепочка равенств:

$$\det A \det A^{-1} = \det (AA^{-1}) = \det E = 1,$$

определитель обратной матрицы, если существует, должен быть обязательно отличен от нуля.

С другой стороны, пусть $\det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу B с элементами

$$b_{ij} = \left(\frac{A_{ji}}{\det A} \right), \tag{5.2}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Тогда AB – это матрица с элементами

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik} \left(\frac{A_{jk}}{\det A} \right) = \frac{1}{\det A} \sum_k a_{ik} A_{jk} \, .$$

Последнюю сумму можно рассматривать как разложение некоторого определителя C по элементам j-й строки с элементами $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, причем если $i=j$, то это в точности определитель матрицы A, следовательно, для любого i $c_{ii} = 1$. Если же $i \neq j$, то в определителе C есть две одинаковые строки i-я и j-я. Следовательно, для $i \neq j$ $c_{ij} = 0$. Таким образом, произведение AB это – матрица, у которой по диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули. То есть $AB=E$.

Аналогично доказывается, что $BA=E$. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. Для того чтобы у матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$. Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть A – известная квадратная матрица с ненулевым определителем, B – известная матрица размера $n \times m$, X – неизвестная матрица.

Рассмотрим уравнение $AX=B$.

Для того чтобы это уравнение имело смысл, необходимо, чтобы матрицы A была порядка n. Умножая уравнение слева на матрицу A^{-1}, получим равенство

$$X=A^{-1}B,$$

которое определяет матрицу X как матрицу размера $n \times m$.

Заметим, что для похожего уравнения $XA=B$, матрица A должна быть порядка m, а для нахождения X следует умножить уравнение на A^{-1} справа, а не слева, как выше $X=BA^{-1}$.

Это равенство определяет матрицу X как матрицу размера $n\times m$.

Пример. Решить уравнения: $AX=B$; $XA=B$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. Подсчитаем определитель матрицы A:

$$\det A=1\cdot 1\cdot 1+2\cdot(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot 1\cdot 1-1\cdot(-1)\cdot 0=2.$$

Найдем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ -1 & 1 & -1\\ -3/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Решением первого уравнения будет матрица

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ -1 & 1 & -1\\ -3/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2+0+1/2 & -1/2+0-1 & 3/2+0+5/2\\ -1+4-1 & 1+3+2 & -3+2-5\\ -3/2+4-1/2 & 3/2+3+1 & -9/2+2-5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3/2 & 4\\ 2 & 6 & -6\\ 2 & 11/2 & -5\end{pmatrix}.$$

Решением второго уравнения будет матрица

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ -1 & 1 & -1\\ -3/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2+1-9/2 & 0-1+3 & 1/2+1-3/2\\ 2-3-3 & 0+3+2 & 2-3-1\\ 1/2+2-15/2 & 0-2+5 & 1/2+2-5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Дайте определения операций над матрицами: сложения (вычитание), умножение на число.
2. Определите и поясните операцию перемножения матриц.
3. Дайте определение операции транспонирования.
4. Сформулируйте свойства операций над матрицами.

5. Дайте определения минора k-го порядка, ранга и базисного минора матрицы.
6. Сформулируйте правила преобразования матрицы с целью нахождения ее ранга.
7. Определите обратную матрицу, ее единственность.
8. Сформулируйте условия существования обратной матрицы.

Глава 6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.1}$$

где a_{ij} и b_i – известные числа, x_i – искомые неизвестные. Числа a_{ij} называются *коэффициентами* системы, b_i – *свободными членами*.

Определение 6.1. Система (6.1) называется *однородной*, если все $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ и *неоднородной* в противном случае.

Определение 6.2. *Решением* системы (6.1) называется совокупность n чисел $(x_1; x_2;...; x_n)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения системы, обращают эти уравнения в тождества.

Определение 6.3. Система называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно решение, и *несовместной*, если у нее нет решения.

Определение 6.4. Совместная система называется *определенной*, если она имеет только единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет больше одного решения.

Рассмотрим однородную систему. Очевидно, что эта система всегда совместна, так как ее решением являются нули. Если помимо нулевых решений у однородной системы имеются другие решения, то такая система называется *нетривиально совместимой*.

Определение 6.5. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей* системы (6.1).

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Определение 6.6. Определитель D, составленный из коэффициентов системы, называется *определителем системы*.

Система (6.3), если определитель системы $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по *формулам Крамера*:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}; \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}. \qquad (6.4)$$

Эти формулы были получены при рассмотрении взаимного расположения двух прямых (см. (3.14)).

Если определитель $D=0$, то система является либо несовместной, либо неопределенной. В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого.

Условие несовместности системы (6.3) можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}. \qquad (6.5)$$

Условие неопределенности системы (6.3) можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}. \qquad (6.6)$$

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно из неизвестных выражается через два других, значения которых остаются произвольными.

Если условие $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ *не выполнено*, то решения системы находятся по формулам:

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \; y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \; z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot t, \qquad (6.8)$$

где t может принимать любые значения.

Эти решения можно записать также в виде

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = -\frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t.$$

При этой форме записи решений следует помнить, что если один из знаменателей обращается в нуль, то следует приравнять к нулю и соответствующий числитель.

Примеры.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1, \\ x + 11y = 6. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель D системы и определители D_x, D_y, входящие в числители формул (6.4):

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - (-3) \cdot 1 = 58, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - (-3) \cdot 6 = 29,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 29. \text{ Отсюда, } x = \frac{D_x}{D} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{2}.$$

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

Решение. Используя формулы (6.8), находим

$$x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = -22t, \quad y = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = 14t, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 2t,$$

где t можно придавать любые значения.

СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \tag{6.9}$$

при $D \neq 0$ находится по формулам Крамера:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \tag{6.10}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Если D=0, то исходная система либо неопределенная, либо несовместная.

Рассмотрим однородную систему трех уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases} \qquad (6.11)$$

Если определитель системы (6.11) $D \neq 0$, то она имеет единственное (нулевое) решение: $x=0,\ y=0,\ z=0$.

Если определитель системы (6.11) $D=0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Во втором случае, если среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один отличный от нуля, то система сводится к двум независимым уравнениям (третье является следствием), а если все миноры этого определителя равны нулю, то система сводится к одному уравнению (остальные два являются его следствием).

Примеры.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 3x+2y+z=10, \\ 4x+3y-2z=4. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель D системы. При вычислении определителя воспользуемся теоремой о разложении по элементам первой строки:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-7+20+1=14\neq 0.$$

Вычислим определители $D_x,\ D_y,\ D_z,$ входящие в числители формул (6.10):

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-56+48+22=14.$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}-8\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=-24+80-28=28.$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+8\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-22+56+8=42.$$

Подставляя найденные значения в формулы (6.10), получим решение системы: $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{14}{14}=1,\ \ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{28}{14}=2,\ \ z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{42}{14}=3$.

2. Решить систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x + \ \ y + \ z = 0, \\ \ x + 3y + \ z = 0, \\ \ x + \ \ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы D. При вычислении определителя к элементам 1-й строки прибавим элементы 3-й строки, умноженные на –4, а к элементам 2-й строки – элементы 3-й, умноженные на –1:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0.$$

Так как $D \neq 0$, то система имеет только нулевое решение: $x = y = z = 0$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - \ z = 0, \\ \ x + 2y + 9z = 0, \\ \ x + \ \ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 14 + 1 = 0.$$

Следовательно, система имеет решения, отличные от нулевого. Решаем систему первых двух уравнений (третье является их следствием):

$$\begin{cases} 3x + 2y - \ z = 0, \\ \ x + 2y + 9z = 0. \end{cases}$$

Отсюда по формулам (6.8) получаем

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = 20t, \ \ y = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = -28t, \ \ z = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 4t.$$

СИСТЕМЫ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система n линейных уравнений с n переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (6.12)$$

где a_{ij}, b_i $(i, j = 1, 2, ..., n)$ – числа.

С системой линейных уравнений (6.12) ассоциируют три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (6.13)$$

В сделанных обозначениях система линейных уравнений может быть записана в матричной форме:

$$AX=B. \qquad (6.14)$$

Действительно, матрица AX имеет размер $(n,1)$, то есть является матрицей-столбцом, у которой элемент i-ой строки совпадает с левой частью i-го уравнения системы (6.12), а элемент i-ой строки матрицы B есть число b_i.

Введем следующие векторы $\overrightarrow{a_i}=(a_{i1}, a_{i2},..., a_{in})$ – i-ая строка матрицы A, $\vec{a}^{\,j}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ – j-ый столбец матрицы A, $\vec{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$, $\vec{b}=(b_1, b_2,..., b_n)$. Систему (6.12) можно записать в векторной форме

$$\overrightarrow{a_i}\cdot\vec{x}=b_i,\ i=1, 2,..., n, \qquad (6.15)$$

или

$$\sum_{j=1}^{n}\vec{a}^{\,j}\cdot\overrightarrow{x_j}=\vec{b},\ \ i, j=1, 2,..., n. \qquad (6.16)$$

<u>Определение 6.7.</u> Решением системы (6.12) называется упорядоченная совокупность n чисел $x_1^0, x_2^0,..., x_n^0$ (вектор $\vec{x}^{\,0}$ или матрица-столбец X^0), при подстановке которых вместо соответствующих переменных все уравнения системы превращаются в истинные числовые равенства. Иными словами, матрица-столбец X^0 есть решение системы (6.14), если

$$AX^0=B. \qquad (6.17)$$

ТЕОРЕМА 6.1. (теорема Крамера). Если определитель матрицы A системы n линейных уравнений с n переменными не равен нулю (то есть матрица системы неособенная), то система совместна и имеет единственное решение (то есть является определенной). Это решение вычисляется по формулам

$$x_1^0=\frac{|A_1|}{|A|},\ x_2^0=\frac{|A_2|}{|A|},...,\ x_n^0=\frac{|A_n|}{|A|}, \qquad (6.18)$$

где матрица A_j $(j=1, 2,..., n)$ получается из матрицы A в результате замены j-го столбца столбцом свободных членов B.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем единственность решения. Пусть X^0 – решение системы (6.12), то есть $AX^0 = B$.

Так как $|A| \neq 0$, то существует единственная матрица A^{-1}, обратная матрице A. Умножим обе части последнего равенства слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}AX^0 = A^{-1}B$, то есть $EX^0 = A^{-1}B$ или $X^0 = A^{-1}B$. Так как матрица $A^{-1}B$ единственная, то решение системы X^0 – единственное.

Далее докажем существование решения системы (6.12). Для этого покажем, что вектор (матрица-столбец) $A^{-1}B$ является решением данной системы. Подставим этот вектор в систему, записанную в матричной форме (6.14)

$$A(A^{-1}B) = B, \ (AA^{-1})B = B, \ EB = B, \ B = B.$$

Получено верное равенство, а это означает, что вектор $A^{-1}B$ является решением данной системы.

Выведем теперь формулы Крамера (6.18), для этого найдем элементы матрицы $A^{-1}B$, то есть значения $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$

$$X^0 = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n$ есть разложение определителя $|A_j|$ по j-му столбцу, элементами которого являются числа b_i, то

$$X^0 = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \dots \\ |A_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \dots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \dots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Отсюда по определению равенства матриц следуют формулы Крамера. Теорема доказана.

Заметим, что отличие определителя $|A|$ от нуля – не только достаточное, но и необходимое условие определенности линейной системы с одинаковым числом уравнений и неизвестных. Можно доказать, что если такая системы имеет единственное решение, то определитель ее матрицы отличен от нуля.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ТЕОРЕМА 6.2 (Кронекера-Капелли). Для совместности системы (6.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу расширенной матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем достаточность. Пусть ранг матрицы A равен рангу ее расширенной матрицы A_1 (6.2), то есть существует базисный минор, общий для матриц A и A_1. Обозначим ранг обеих матриц буквой r; будем считать, что базисный минор занимает первые r строк и первые r столбцов матрицы A. Следовательно, вектор-столбцы $\vec{a}^{\,1}, \vec{a}^{\,2},\dots, \vec{a}^{\,r}$ образуют базис совокупности векторов-столбцов матрицы A_1, и по теореме (5.1) о базисном миноре (которая говорит, что каждая строка (каждый столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов), соответствующих любому базисному минору)вектор $\vec{b}$ является их линейной комбинацией, то есть существуют числа $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_r$, такие, что $\lambda_1\vec{a}^{\,1} + \lambda_2\vec{a}^{\,2} + \dots + \lambda_r\vec{a}^{\,r} = \vec{b}$ или $\sum_{j=1}^{r}\vec{a}^{\,j}\lambda_j = \vec{b}.$

Прибавив к левой части этого равенства остальные векторы-столбцы матрицы A, умноженные на $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_{r+n} = 0,$ получим

$$\lambda_1\vec{a}^{\,1} + \lambda_2\vec{a}^{\,2} + \dots + \lambda_r\vec{a}^{\,r} + 0\cdot\vec{a}^{\,r+1} + 0\cdot\vec{a}^{\,r+2} + \dots + 0\cdot\vec{a}^{\,n} = \vec{b}, \text{ или}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\vec{a}^{\,j}\lambda_j = \vec{b}.$$

Сравнивая поученное равенство с записью системы (6.1) в векторной форме $\sum_{j=1}^{n}\vec{a}^{\,j}x_j = \vec{b}$, видим, что числа $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_r, 0, 0,\dots, 0$ образуют решение системы (6.1), то есть эта система совместна.

Докажем теперь необходимость условия теоремы. Пусть система (6.1) имеет решение $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0,\dots, x_n^0)$, то есть справедливо векторное равенство $\sum_{j=1}^{n}\vec{a}^{\,j}\lambda_j = \vec{b}.$ Это означает, что вектор-столбец $\vec{b}$ является линейной комбинацией остальных векторов-столбцов расширенной матрицы и, следовательно, его можно удалить из матрицы A_1, не изменяя ее ранга, после чего матрица A_1 превратится в матрицу A. Следовательно, ранг матрицы A_1 равен рангу матрицы A. Теорема доказана.

Таким образом, система (6.1) совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A_1) = r$. В этом случае число r называется *рангом системы* (6.1).

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных (т.е. $r=n$), то система является определенной.

Если же ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система – неопределенная. В самом деле, предположим, что система (6.1) совместна, причем $r<n$. Рассмотрим какой-нибудь базисный минор матрицы A. Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (6.1). Эти r неизвестных называются *базисными неизвестными* рассматриваемой системы уравнений. Остальные $n–r$ неизвестных системы называются *свободными неизвестными*.

Выделим из системы (6.1) систему r уравнений, среди коэффициентов которых содержатся элементы базисного минора. Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащие свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные неизвестные.

Таким образом, придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных и, следовательно, как было сказано выше, система (6.1) имеет бесчисленное множество решений.

Примеры.

1. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение. Определим ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Выпишем расширенную матрицу системы, отделяя вертикальной чертой элементы матрицы системы A от свободных членов системы:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки, а затем разделим все элементы 2-й строки на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Вычтем из элементов 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right);$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $r(A)=2$, $r(A_1)=3$, т.е. $r(A)\neq r(A_1)$, следовательно, система несовместна.

2. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим элементы 2-й строки к соответствующим элементам 1 и 4-й строк, а затем разделим элементы 1-й строки на 4, а элементы 4-й строки на 5:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Вычтем из элементов 3-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 5-й строки вычтем элементы 4-й строки, после этого вычеркнем 1 и 5-ю строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right); \qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A)=3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы A_1.

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим, что $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

3. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Разделим элементы 3-й строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю; затем вычеркнем 3-ю строку:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что $r(A)=r(A_1)=2$. Следовательно, система совместна.

Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем x_1 и x_2. Это можно сделать, так как определитель из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля ($D=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$). Свободными неизвестными служат x_3 и x_4. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4. Воспользуемся формулами Крамера (6.4):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Полагая $x_3 = u,\ x_4 = v$, получим решение системы в виде

$$x_1 = -\frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v + \frac{1}{11},\quad x_2 = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11},\quad x_3 = u,\ x_4 = v.$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Численное решение линейных алгебраических уравнений с помощью определителей удобно производить с квадратными матрицами. В случае же систем произвольного вида (6.1) возможно пользоваться *методом Гаусса*, который заключается в последовательном исключении неизвестных. Поясним смысл этого метода на системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = a_{15}, & (a) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = a_{25}, & (b) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = a_{35}, & (c) \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}u = a_{45}. & (d) \end{cases}$$

Допустим $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то изменим порядок уравнений, выбрав первым такое уравнение, в котором коэффициент при x не равен нулю).

1 шаг: делим уравнение (a) на a_{11}, умножаем полученное уравнение на a_{21} и вычитаем из (b); затем умножаем на a_{31} и вычитаем из (c); наконец, умножаем на a_{41} и вычитаем из (d). В результате первого шага приходим к системе

$$\begin{cases} x + a_{12}^{(1)} y + a_{13}^{(1)} z + a_{14}^{(1)} u = a_{15}^{(1)}, & (e) \\ \quad a_{22}^{(1)} y + a_{23}^{(1)} z + a_{24}^{(1)} u = a_{25}^{(1)}, & (f) \\ \quad a_{32}^{(1)} y + a_{33}^{(1)} z + a_{34}^{(1)} u = a_{35}^{(1)}, & (g) \\ \quad a_{42}^{(1)} y + a_{43}^{(1)} z + a_{44}^{(1)} u = a_{45}^{(1)}. & (h) \end{cases}$$

Причем $a_{ij}^{(1)}$ получаются из a_{ij} по следующим формулам:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11} \quad (j = 2,3,4,5);$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_{1j}^{(1)} (i = 2,3,4;\ j = 2,3,4,5).$$

2 шаг: поступаем с уравнениями (f), (g), (h) точно так же, как с уравнениями (a), (b), (c), (d) и т.д. В итоге исходная система может быть преобразована к так называемому *ступенчатому* виду:

$$\begin{cases} x + a_{12}^{(1)} y + a_{13}^{(1)} z + a_{14}^{(1)} u = a_{15}^{(1)}, \\ \quad y + a_{23}^{(2)} z + a_{24}^{(2)} u = a_{25}^{(2)}, \\ \quad\quad z + a_{34}^{(3)} u = a_{35}^{(3)}, \\ \quad\quad\quad u = a_{45}^{(4)}. \end{cases}$$

Если система имеет единственное решение, то система уравнений приведется к *треугольному* виду, в котором последнее уравнение будет содержать одно неизвестное.

В случае неопределенной системы, т.е. такой, в которой число неизвестных больше числа линейно независимых уравнений, допускающей поэтому бесчисленное множество решений, треугольной системы не получится, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного.

Если же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она будет содержать хотя бы одно уравнение вида 0=1, т.е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

В случае однородной системы уравнений справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть A – матрица однородной системы линейных уравнений размера $m \times n$. Для того чтобы система была нетривиально совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше n, т.е. $r(A) < n$.

Доказательство следует из того, что существование нетривиального решения эквивалентно линейной зависимости столбцов матрицы A, а тогда ранг матрицы меньше числа столбцов.

Замечание. Для линейной однородной системы уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, утверждение "ранг матрицы A меньше числа неизвестных" равносильно условию $\det A = 0$.

Примеры.

На практике удобнее приводить к ступенчатому виду не систему уравнений, а матрицу из коэффициентов и свободных членов.

1. Используя метод Гаусса, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=0, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Введем 5-й, так называемый *контрольный столбец*, каждым элементом которого является сумма четырех элементов данной строки. При линейных преобразованиях элементов матрицы такому же преобразованию должны подвергнуться элементы контрольного столбца. Каждый элемент контрольного столбца преобразованной матрицы должен быть равен сумме элементов соответствующей строки.

Для упрощения вычислений поменяем местами первое и второе уравнения:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Выполним 1-й шаг метода Гаусса: из 2 и 3-й строк вычтем 1-ю, умноженную соответственно на 3 и 4:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Изменив знаки во 2-й строке и умножив ее на 5, прибавляем к 3-й:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ y-4z=-5, \\ z=2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем $z=2$, подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y=3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x=-1$.

2. Решить систему уравнений, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 44 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 & 26 \end{array}\right).$$

Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на 3, из 4-й – 1-ю, умноженную на 5:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 34 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 & 26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 34 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \end{array}\right).$$

Прибавим к 3-й строке 2-ю, а из 4-й вычтем 2-ю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 & 34 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнем нулевые строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 & -34 \end{array}\right).$$

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ -x_2-2x_3-2x_4-6x_5=-23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2-x_3-x_4-x_5+7 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5-16 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+23 \end{cases}.$$

Мы получили трехпараметрическое решение системы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. Дайте определения совместной, определенной, неопределенной системы линейных алгебраических уравнений.
2. Найдите решение системы линейных уравнений по формулам Крамера.
3. Сформулируйте условия существования единственного решения, неопределенности и несовместности системы линейных уравнений.
4. Сформулируйте формулы Крамера для нахождения решения системы трех линейных уравнений.
5. Сформулируйте и докажите теорему Крамера для квадратной системы линейных уравнений произвольного порядка.
6. Изложите метод Гаусса решения произвольной системы линейных уравнений.
7. Сформулируйте и докажите теорему Кронекера-Капелли о совместности произвольной системы линейных уравнений.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Задание 1. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов. Как определяется проекция одного вектора на направление другого вектора. Какой угол называется углом между векторами? Запишите формулу для вычисления длины вектора. Дайте определение и свойства скалярного произведения векторов.

Даны пары векторов 1.1-1.8

1.1. $\vec{a}(2;\ -1;\ 1),\ \vec{b}(-2;\ 2;\ 0),$

1.2. $\vec{a}(-3;\ 2;\ -1),\ \vec{b}(0;\ -2;\ 4),$

1.3. $\vec{a}(-2;\ 3),\ \vec{b}(4;\ -6),$

1.4. $\vec{a}(-2;\ 4;\ 2),\ \vec{b}(1;\ 1;\ -1),$

1.5. $\vec{a}(1;\ -5;\ 3),\ \vec{b}(0;\ 3;\ 3),$

1.6. $\overleftarrow{a}(5;\ -3),\ \vec{b}(15;\ -9),$

1.7. $\vec{a}\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right),\ \vec{b}\left(\frac{5}{4};\ -\frac{2}{3}\right),$

1.8. $\vec{a}(-3;\ 4;\ 2),\ \vec{b}(3;\ -4;\ -2).$

Среди этих пар векторов укажите те, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны;
2. Длина вектора $\vec{a}$ равна $\sqrt{34}$;
   длина вектора $\vec{b}$ равна $\sqrt{306}$;
3. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно -6;
4. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $-\dfrac{4}{\sqrt{70}}$;
5. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен π;
6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны;
7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны.

Подсказки: определение (2.7)-(2.9), (2.24); формулы (2.8) – (2.16).

Задание 2. Дайте определение базиса на плоскости и в пространстве, и среди пар векторов 1.1-1.8 из задания 1 найдите те, которые соответствуют следующим условиям:

1. Образуют базис на плоскости;
2. Образуют базис в пространстве.

Подсказка: определения (2.17), (2.18), (2.22).

Задание 3. Изучите определение и свойства векторного произведения векторов и среди пар векторов (1.1)-(1.8) из задания 1 найдите такие, для которых справедливы следующие утверждения:

1. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектором с координатами $(-24;\,-3;\,3)$.
2. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах равна $6\sqrt{2}$.
3. Площадь треугольника со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $\sqrt{3}$.

Подсказка: определение (2.24), формулы (2.28), (2.33), (2.34).

Задание 4. Дайте определение смешанного произведения векторов. Сформулируйте основные свойства смешанного произведения векторов. Запишите формулу вычисления смешанного произведения векторов через их прямоугольные декартовы координаты.

Даны тройки векторов:

4.1. $\vec{a}(2;\,0;\,0),\ \vec{b}(0;\,2;\,0),\ \vec{c}(0;\,0;\,2),$

4.2. $\vec{a}(0;\,1;\,0),\ \vec{b}(0;\,-3;\,0),\ \vec{c}(0;\,0;\,1),$

4.3. $\vec{a}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\,\frac{2}{\sqrt{3}};\,0\right),\ \vec{b}\left(0;\,\frac{1}{\sqrt{6}};\,\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ \vec{c}\left(\frac{4}{\sqrt{10}};\,0;\,-\frac{1}{\sqrt{10}}\right),$

4.4. $\vec{a}(2;\,-1;\,3),\ \vec{b}(-1;\,2;\,1),\ \vec{c}(3;\,-2;\,5),$

4.5. $\vec{a}(1;\,-1;\,2),\ \vec{b}(3;\,4;\,1),\ \vec{c}(1;\,2;\,-3),$

4.6. $\vec{a}(2;\,1;\,0),\ \vec{b}(0;\,3;\,1),\ \vec{c}(-1;\,0;\,-1).$

Для каждой тройки векторов вычислите смешанное произведение и укажите номера тех троек, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ компланарны.
2. Смешанное произведение $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ равно 4.
3. Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$, равен 20.
4. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ как на сторонах, равен $1/3$.
5. Векторы $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ образуют правую тройку.

Подсказка: формулы (2.37), (2.40), определение (2.43).

Задание 5. Дайте определение базиса в пространстве, и среди троек векторов (4.1-4.6) из задания 4 найдите те, которые образуют базис.

Подсказка: определение (2.23).

Задание 6. Запишите различные виды уравнений прямой на плоскости.

Среди следующих уравнений прямых на плоскости

6.1. $2x-5=0,$

6.2. $2y-2=3(x+5),$

6.3. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-4}=1,$

6.4. $y=\dfrac{3}{2}x-5,$

6.5. $3x+4y+8=0,$

6.6. $y=-7,$

6.7. $4x-3y=12,$

укажите

1) уравнение прямой в отрезках;
2) уравнение прямой с угловым коэффициентом;
3) общее уравнение прямой;
4) уравнение прямой, составленное по известной точке и угловому коэффициенту.

Подсказка: формулы (3.2), (3.4)-(3.6), (3.9)-(3.11).

Задание 7. Среди прямых, заданных уравнениями (6.1-6.7), укажите те , для которых выполняются следующие условия:

1) прямая проходит через точку $A(5;1)$,
2) прямая проходит через точку $B(0;-2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3;4)$,
3) угловой коэффициент равен $\dfrac{3}{2}$,
4) прямая отсекает на осях координат Ox и Oy соответственно отрезки с длинами $|a|=3,\ |b|=4.$

Подсказка: формулы (3.2), (3.4), (3.9), (3.10).

Задание 8. Среди прямых, заданных уравнениями (6.1-6.7) из задания 6, укажите прямые, удовлетворяющие следующим условиям:

1) прямая параллельна оси абсцисс,
2) прямая параллельна оси ординат,
3) прямые параллельны,
4) прямые перпендикулярны,
5) прямые совпадают.

Подсказка: формулы (3.3), (3.9), (3.10).

Задание 9. Стороны треугольника ABC лежат на прямых $AB: x+y-3=0,\ AC: y=2x,\ BC: y=0.5x+4.5.$

Постройте треугольник в декартовой системе координат и найдите:

9.1. Координат вершин A, B, C,

9.2. Координаты середины стороны AC,

9.3. Уравнение медианы, проведенной из вершины B,

9.4. Уравнение высоты, проведенной из вершины A,

9.5. Расстояние от точки A до точки B,

9.6. Расстояние от точки C до прямой AB.

Подсказка: формулы (1.1)-(1.3), (3.2), (3.6).

З а д а н и е 10. Запишите канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Даны уравнения кривых второго порядка. Определите из них те, которые определяют:

1) эллипс с центром $A(-1;\ 2)$ и полуосями $a = 3,\ b = 4$,
2) гиперболу с центром $A(1;\ -1)$ и полуосями $a = 2,\ b = 3$,
3) параболу с вершиной в точке $A(2;\ -2)$, осью симметрии, параллельной оси Ox и параметром $p = \dfrac{1}{12}$.

10.1. $9x^2 - 18x + 4y^2 + 8y - 23 = 0$,

10.2. $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 196 = 0$,

10.3. $y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$,

10.4. $2y^2 - 4x + 6y + 19 = 0$.

Подсказка: определения 3.7, 3.11, формулы 3.22, 3.27, 3.34.

З а д а н и е 11. Изучите виды уравнений плоскости и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Даны уравнения плоскостей:

$P_1 : 2x - y + z = 0,\qquad P_2 : x + y + 2z - 2 = 0,$

$P_3 : x - 2z = 0,\qquad P_4 : 3x - y - 5 = 0,$

$P_5 : 3x + 3y + 6z + 7 = 0,\qquad P_6 : -x + 2y + 4z + 11 = 0.$

Из приведенных выше плоскостей выберите те, которые удовлетворяют условиям:

1) плоскость проходит через точку $O(0;\ 0;\ 0)$;
2) плоскость проходит через точку $A(1;\ -1;\ 1)$;
3) плоскость параллельна оси Oz;
4) плоскость отсекает от осей координат отрезки, длины которых равны соответственно $\left|-\dfrac{7}{3}\right|, \left|-\dfrac{7}{3}\right|, \left|-\dfrac{7}{6}\right|$;
5) плоскость проходит через ось Oy;
6) плоскость имеет нормальный вектор $\vec{n}(1;\ 1;\ 2)$;
7) плоскости параллельны;
8) плоскости перпендикулярны.

Подсказка: формулы 4.4, 4.5, 4.13, 4.14, 4.18.

З а д а н и е 12. Пусть заданы :

плоскость $P : -x + y + 2z + 2 = 0$ и прямые

$$L_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}, \quad L_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{4},$$

$$L_3: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}, \qquad L_4: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{4}.$$

Среди заданных прямых найдите такие прямые, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) прямая параллельна плоскости;
2) прямая лежит в плоскости;
3) прямая перпендикулярна плоскости;
4) прямая пересекает плоскость под углом φ, косинус которого равен $\sqrt{3}/3$. Подсказка: формулы 4.34, 4.35.

Задание 13. Решите следующие уравнения

13.1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};$

13.2. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3-x \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix};$

13.3. $\begin{vmatrix} x & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}.$

Варианты ответов

1) $x = 0$ 4) $x = 2$ 7) $x = -2.$
2) $x = 3$ 5) $x = -1$
3) $x = -3/2$ 6) $x = -1/2$

Задание 14. Решите уравнение и неравенства и укажите соответствующие варианты ответов.

14.1. $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$ 14.2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} = 0,$

14.3. $\begin{vmatrix} 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

Варианты ответов

1) $x \in 0; 5$ 5) $x = -2; \pm\sqrt{10}$
2) $x = 0; \pm 2$ 6) $x = 0;\ 2$
3) $x = \pm 1$ 7) $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$

4) $x \in$ ◀5; 5 8) $x \in \left(\dfrac{7-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{7+\sqrt{21}}{2} \right)$.

Задание 15. Вычислите определители, разлагая их, соответственно, по второй строке и третьему столбцу и укажите верные ответы.

15.1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & b & c \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, 15.2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -3 & -2 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix}$.

Варианты ответов

1) $2b+4a-5c$ 4) $7b+5a+7c$
2) $-2a-4b-5c$ 5) $-7a-5b+7c$.
3) $-7a-5b-c$

Задание 16. Найдите значение параметра a (если оно существует), при котором систему $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ ax+5y=-a-4 \end{cases}$ можно решить методом Крамера.

Варианты ответов

1) при $a \neq \dfrac{15}{4}$
2) ни при каких a систему нельзя решить методом Крамера
3) при $a \neq -\dfrac{15}{4}$
4) при любом a.

Ответы к заданиям 1-16.

1.

1	2	3	4	5	6	7
1.3 1.6	1.6	1.1 1.5	1.2	1.3	1.4	1.8

2.

1	2
1.7	1.1, 1.2, 1.4, 1.5

3.

1	2	3
1.5	1.4	1.1

4.

1	2	3	4	5
4.2	4.4	4.5	4.6	4.1, 4.3, 4.4

5.

4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6.

6.

1	2	3	4
6.3	6.4	6.5, 6.1	6.2

7.

1	2	3	4
6.2	6.5	6.4	6.3

8.

1	2	3	4	5
6.6	6.1	6.2, 6.4	6.3, 6.5	6.3, 6.7

9.

1	2	3	4	5	6
$A(1; 2)$ $B(-1; 4)$ $C(3; 6)$	$(2; 4)$	$y = 4$	$y = -2x + 4$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$

10.

1	2	3
10.2	10.1	10.3

11.

1	2	3	4	5	6	7	8
P_1, P_3	P_2	P_4	P_5	P_3	P_2	P_2, P_5	P_1, P_6

12.

1	2	3	4
L_2	L_4	L_1	L_3

13.

13.1	13.2	13.3
2	4	5

14.

14.1	14.2	14.3
2	5	8

15.

15.1	15.2
2	3

16.
Ответ 1.

Приложение. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №1

по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
для студентов 1 курса биологического
факультета СГУ
1 семестр

Исходные данные:

α - первая цифра варианта +4;

β - вторая цифра варианта;

$\gamma = \alpha + \beta - 2$;

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 1 & \gamma & 3 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 3 & \gamma & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \gamma & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \\ \beta & 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \gamma \\ \beta & \gamma & 2 & \beta \\ 3 & 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 4 & \gamma \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Контрольные задания

Вычислить:

1. матрицу $\gamma A + \alpha B - \beta C$;
2. матрицу $\gamma A \cdot B + (\beta + 1) B \cdot A$;
3. произведение $3A \cdot D$;
4. произведение $\alpha F \cdot \gamma D$;
5. результат $(\beta B + E) \cdot A + \gamma C^T$;
6. определитель матрицы H;
7. определитель матрицы A;
8. определитель матрицы G;
9. матрицу, обратную к матрице C.

Решить матричные уравнения:

10. $A \cdot X = D$;
11. $X \cdot B = D$.
12. Определить ранг матрицы G.
13. Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\alpha, \\ 3x_1 + \beta x_2 + x_3 = 10, \\ \alpha x_1 + 3x_2 - \beta x_3 = \alpha. \end{cases}$

14. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + \beta x_2 + x_3 + x_4 - (\beta+1)x_5 = -\beta, \\ x_2 + (\alpha-2)x_3 + \beta x_4 + 3\beta x_5 = 23, \\ (\alpha+1)x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 3\gamma. \end{cases}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №2

по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
для студентов 1 курса биологического
факультета СГУ
1 семестр

Исходные данные:

α - первая цифра варианта +4;

β - вторая цифра варианта;

$\gamma = \alpha + \beta - 2$;

Задан равносторонний треугольник ABC со стороной γ и вектора

$\bar{a}(\alpha-1,\ 1)$; $\bar{b}(3\beta,\ \gamma+1)$; $\bar{c}(\alpha+1,\ \beta-1)$;

$\bar{u}(1,\ \alpha,\ \beta)$; $\bar{v}(-1,\ \gamma,\ 2)$; $\bar{w}(\alpha,\ \gamma,\ -3)$.

Контрольные задания:

1. Изобразить вектора $\alpha\overline{AB}$, $(\alpha-\beta)\overline{AC}$, $\gamma\overline{AB} + \overline{AC} - 2\beta\overline{BC}$.
2. Пусть $\bar{d} = (\alpha+\beta)\overline{AB} - (\gamma-1)\overline{BC} + \beta\overline{CA}$. Разложить вектор $\bar{d}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
3. Найти координаты векторов $\alpha\bar{a} + 2\beta\bar{b}$, $3\alpha\bar{a}$, $\gamma\bar{a} - (\beta+3)\bar{b} + \bar{c}$.
4. Проверить, что вектора $\bar{e}_1(\alpha-1,\ 1,\ \beta-1)$, $\bar{e}_2(1,\ \alpha+1,\ \beta+1)$, $\bar{e}_3(1+\gamma,\ 0,\ 0)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ в этом базисе.
5. Найти, при каком значении параметра λ вектора $\bar{x}(\lambda,\ 2\alpha)$, $\bar{y}(\beta,\ -3\gamma)$ будут коллинеарны.
6. Найти, при каком значении параметра λ вектора $\bar{x}(\alpha,\ \lambda,\ \beta)$, $\bar{y}(\alpha,\ 1,\ 0)$, $\bar{z}(1,\ \beta,\ -\gamma)$ будут компланарны.
7. Найти скалярные произведения $\overline{\alpha\bar{a}\cdot\bar{b}}$, $(\beta\bar{a}+\bar{b})^2$, $(\gamma\bar{a} + (\beta-1)\bar{b})\cdot(\bar{a} - \alpha\bar{b})$.
8. Найти, при каком значении параметра λ вектора $\bar{x} = \alpha\bar{a} + \lambda\bar{b}$ и $\bar{y} = (\beta+2)\bar{a} - \gamma\bar{b}$ будут перпендикулярны.
9. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{v}$ и удовлетворяющий условию $\bar{x}\cdot\bar{v} = \alpha$.

10.Найти векторные произведения $\overline{AB}\ \ \overline{AC}$, $\overline{BC}\ \ \overline{AC}$, $\overline{AB}\ \ \overline{CB}$.

11.Найти векторное произведение $\alpha\overline{AB}\ \gamma\overline{AC}$, построить этот вектор и найти его длину.

12.Найти площадь треугольника, сторонами которого служат вектора $\bar{u}, \quad \bar{v}$.

13.Найти скалярное произведение между векторами $\alpha\bar{a}$ и $\beta\bar{b}$ и угол между этими векторами.

14.Найти объём тетраэдра, рёбрами которого служат вектора $\bar{u}, \quad \bar{v}, \quad \bar{w}$.

15.Проверить, будут ли компланарны три вектора

$(\alpha+1)\bar{u}, \quad 2\beta\bar{v}, \quad (\gamma+2)\bar{w}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА №3

для студентов 1 курса биологического
факультета СГУ
1 семестр

Задание №1

(тема «Основные формулы аналитической геометрии»)

N - номер варианта (совпадает с номером в списке группы)

16. На плоскости относительно декартовой системы координат даны координаты трёх точек:

При N - чётном: $A\left(\frac{N+2}{4};\ \ 1\right),\ \ B\left(\frac{N+6}{4};\ \ 3\right),\ \ C\left(\frac{N+8}{4};\ \ 6\right);$

при N нечётном : $A\left(1;\ \ \frac{N+1}{2}\right),\ \ B\left(2;\ \ \frac{N+5}{2}\right),\ \ C\left(4;\ \ \frac{N+9}{2}\right).$

Найти:

17.координаты вектора $\overline{CA}$;

18.координаты точек M_1, M_2, M_3, делящих отрезки AB, BC, AC в отношениях $\lambda_1 = N+1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -3$, соответственно;

19.длину отрезка AB;

20.угол B;

21. В пространстве относительно декартовой системы координат даны координаты четырёх точек:

При N - чётном: $A\left(\frac{N+4}{2},\ \ 0,\ \ \frac{N+4}{2}\right),\ \ B\left(\frac{N+2}{2},\ \ \frac{N+6}{2},\ \ 1\right),$

$C\left(-2,\ \ \frac{N-2}{2},\ \ N\right),\ \ D(N+3,\ \ 4,\ \ N-1);$

При N - нечётном: $A\left(3,\quad \frac{N+1}{2},\quad \frac{N-3}{2}\right),\quad B\left(\frac{N-1}{2},\quad 3,\quad \frac{N+3}{2}\right),$

$C(N,\quad 0,\quad N-1),\quad D\left(\frac{N+5}{2},\quad \frac{N-5}{2},\quad 7\right).$

Найти:
координаты центра тяжести треугольника ABC;
направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;
объём тетраэдра $ABCD$.

Задание №2

(тема «Прямая на плоскости»)

N - номер варианта (совпадает с номером в списке группы)

Относительно декартовой системы координат даны координаты вершин треугольника:

При N - чётном: $A\left(\frac{N+6}{2};\quad 5\right),\quad B\left(\frac{N-4}{2};\quad 2\right),\quad C\left(\frac{N+10}{2};\quad -1\right);$

при N нечётном $A\left(3;\quad \frac{N+3}{2}\right),\quad B\left(-7;\quad \frac{N-1}{2}\right),\quad C\left(6;\quad \frac{N-5}{2}\right).$

Составить уравнения:
трёх сторон этого треугольника;
медианы, проведённой из вершины C;
прямой l, проходящей через точку $M(5,\quad N)$ и параллельной стороне AB;

Найти:
расстояние от точки $M\left(\frac{N}{2},\quad 8\right)$ до стороны BC;
угловой коэффициент прямой AC;
расстояние между прямыми l и AB.

Задание №3

(тема «Плоскость»)

N - номер варианта (совпадает с номером в списке группы)

Относительно декартовой системы координат даны координаты вершин тетраэдра:

При N - чётном:

$$A\left(N,\quad \frac{N}{2},\quad -\frac{N}{2}\right),\quad B\left(\frac{N+4}{2},\quad \frac{6-N}{2},\quad \frac{N-4}{2}\right),$$

$$C\left(\frac{N}{2},\quad -\frac{N}{2},\quad -\frac{N}{2}\right),\quad D\left(\frac{N-2}{2},\quad \frac{N-2}{2},\quad \frac{N-2}{2}\right);$$

при N - нечётном:

$$A\left(\frac{N+1}{2},\quad \frac{N+3}{2},\quad \frac{N+5}{2}\right),\quad B\left(\frac{N-1}{2},\quad \frac{N-3}{2},\quad \frac{N-5}{2}\right),$$

$$C\left(-1,\quad \frac{N}{2},\quad -1\right),\quad D\left(\frac{1-N}{2},\quad -1,\quad \frac{1-N}{2}\right).$$

Составить уравнения плоскостей:

1. π_1, проходящей через точки A, B, D;
2. π_2, проходящей через точки B, C параллельно оси Oy;
3. π_3, проходящей через ось Ox и точку M - центр тяжести треугольника ABC;
4. π_4, проходящей через точку M и отсекающей на осях координат равные отрезки.

Найти:

расстояние от точки M до плоскости π_2;

отрезки, отсекаемые плоскостью π_1 на осях координат;

косинус угла между плоскостями π_2 и Oxz.

Задание №4

(тема «Прямая в пространстве. Прямая и плоскость»)

N - номер варианта (совпадает с номером в списке группы)

Относительно декартовой системы координат даны координаты точки A и координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

При N - чётном:

$$A\left(N,\quad \frac{N}{2},\quad \frac{2-N}{2}\right),\quad \bar{a}\left(\frac{4-N}{2},\quad -1,\quad 2\right),\quad \bar{b}\left(\frac{N-10}{2},\quad \frac{N}{2},\quad 3\right);$$

при N нечётном

$$A\left(1,\quad \frac{N+3}{2},\quad \frac{N-1}{2}\right),\quad \bar{a}\left(1,\quad N,\quad -1\right),\quad \bar{b}\left(1,\quad \frac{5-N}{2},\quad 2\right).$$

Составить:

каноническое уравнение прямой l_1, проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{a}$;
параметрическое уравнение прямой l_2, проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{b}$;
каноническое уравнение прямой l_3, проходящей через начало координат O и середину вектора $\bar{a}$;представить прямую l_3 как линию пересечения двух плоскостей;
уравнение плоскости π_1, проходящей через прямые l_1 и l_3;
уравнение плоскости π_2, проходящей через начало координат O перпендикулярно прямой l_2;
каноническое уравнение прямой l_4 - линии пересечения плоскостей π_1 и π_2.

Проверить:
пересекаются ли прямые l_1 и l_4;
принадлежит ли прямая l_3 плоскости π_2;

Найти:
кратчайшее расстояние между прямыми l_1 и l_4;
косинус угла между прямыми l_1 и l_2;
координаты точки пересечения плоскости π_2 и прямой l_2.

Задание №5

(тема «Фигуры второго порядка»)

N - номер варианта (совпадает с номером в списке группы)

В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние между фокусами равно $2c$, большая полуось равна a:

При N - чётном: $c = \dfrac{N+2}{2}, \quad a = \dfrac{N+4}{2}$;

при N - нечётном: $c = \dfrac{N+3}{2}, \quad a = \dfrac{N+7}{2}$.

Найти:
эксцентриситет эллипса;
уравнения директрис;
расстояние от правого фокуса эллипса до ближайшей директрисы;
уравнение касательной к эллипсу в точке $M(a,\ 0)$;
взаимное расположение точки $M\left(\dfrac{10-N}{2}, \quad \dfrac{5-N}{2}\right)$ и эллипса.

В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние между фокусами равно $2c$, большая полуось равна a:

При N - чётном: $c = \dfrac{N+8}{2}$, $a = \dfrac{N+6}{2}$;

при N - нечётном: $c = \dfrac{N+5}{2}$, $a = \dfrac{N+3}{2}$.

Найти:

эксцентриситет гиперболы;

уравнения асимптот;

длины полуосей гиперболы;

на гиперболе точку, расстояние которой от правого фокуса равно N;

каноническое уравнение эллипса, фокусы которого совпадают с фокусами гиперболы.

В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние от фокуса до директрисы равно N.

Найти:

координаты фокуса;

координаты вершины;

на параболе такую точку M, что прямая, проходящая через эту точку и фокус параболы, образует угол $\dfrac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси Oy.

Составить уравнения и определить типы фигур, образованных вращением:

эллипса из задачи №1 вокруг прямой $y = Nx + 2$;

гиперболы из задачи №2 вокруг оси Ox;

параболы из задачи №3 вокруг прямой $x = \dfrac{N}{2}y - 4$;

сопряжённой гиперболы из задачи №2 вокруг оси Oy.

Итоговые тесты

Часть1. Аналитическая геометрия на плоскости

В заданиях 1-7 указаны координаты вершин ΔABC: $A(-9;\ 20)$, $B(15;\ 13)$, $C(-3;\ 37)$. Тогда

1. Длина стороны BC равна

1	2	3	4
$12\sqrt{5}$	30	$16\sqrt{5}$	45

2. Уравнение стороны BC имеет вид

1	2	3	4
$4x+3y-99=0$	$4x+3y-41=0$	$4x-3y-99=0$	$-4x+3y-99=0$

3. Уравнение высоты, проведенной из вершины A имеет вид

1	2	3	4
$3x-4y+53=0$	$3x+4y+107=0$	$3x-4y+107=0$	$4x-3y-107=0$

4. Длина высоты, проведенной из вершины A равна

1	2	3	4
10	16	25	15

5. Уравнение биссектрисы внутреннего угла B имеет вид

1	2	3	4
$9x+13y-304-0$	$13x-9y-78=0$	$13x-9y+78=0$	$9x-13y-304=0$

6. Угол B равен

1	2	3	4
$\arccos\frac{3}{4}$	$\arccos\frac{4}{5}$	$\pi-\arccos\frac{4}{5}$	$\pi-\arccos\frac{3}{4}$

7. Площадь ΔABC равна

1	2	3	4
390	130	225	270

8. Координаты точки симметричной точке $(4;\ -3)$ относительно прямой $4x+3y+12=0$ равны

1	2	3	4
$(2;7)$	$\left(-2\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{3}\right)$	$(-3;\ -7)$	$(-2.08;\ -7.56)$

9. Дано уравнение линии в полярных координатах $r=\dfrac{1}{2+\cos\varphi}$. Уравнение этой линии в прямоугольных декартовых координатах имеем вид

1	2	3	4
$3x^2+4y^2+2x-1=0$	$4x^2-3y^2+2x-1=0$	$4x^2+3y^2+2x-1=0$	$4x^2+3y^2-16=0$

10. Определите тип линии из задания 9

1	2	3	4
Гипербола	Парабола	Эллипс	Окружность

11. Определите уравнение и тип линии, представляющей геометрическое место точек оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, проходящие через точку $(2;\,0)$.

1	2	3	4
$(x-2)^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 + y^2 = 1$	$y^2 = (x-2)$	$2(x-1)^2 + 4y^2 = 1$
Гипербола	Парабола	Эллипс	Окружность

Ответ представить парой $(i;\, j)$, где i – номер уравнения, j – номер соответствующей линии.

Часть 2. Операции с векторами и векторное пространство

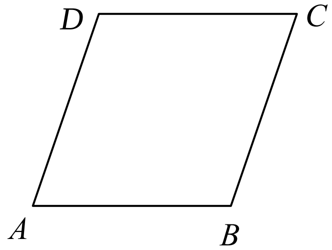
12. При каком значении коэффициента $\alpha \in R$ векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, ($\vec{a}$ не параллелен $\vec{b}$) окажутся коллинеарными?

1	2	3	4
$\alpha = 5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 3$	$\alpha = -15$

13. При каких значениях коэффициентов $\alpha, \beta \in R$ векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = 4\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0)$ являются компланарными?

1	2	3	4
$\alpha \in R,\ \beta = -1$	$\alpha, \beta \in R$	$\alpha = -1,\ \beta = 3$	$\alpha = 0,\ \beta = 0$

14. Изображен параллелограмм $ABCD$. Какие системы векторов образуют базис в плоскости параллелограмма?

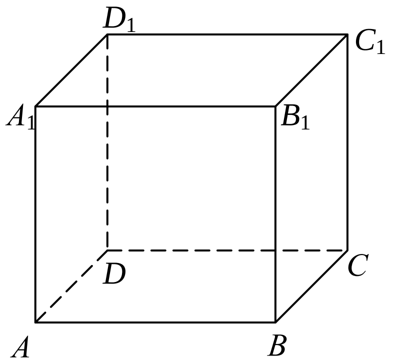


1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 2) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ 3) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ 4) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$

15. Изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие системы векторов образуют базис в пространстве?

1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ 3) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC_1}$ 4) $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}$

16. Решите уравнение $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$, где $\vec{a}(1;\,1;\,1)$, $\vec{b}(2;\,-3;\,0)$, $\vec{c}(0;\,4;\,0)$, $\vec{d}(2;\,-1;\,0)$.



1) $x=0,\ y=5,\ z=-\dfrac{3}{2}$	2) $x=1,\ y=0,\ z=\dfrac{1}{2}$	3) $x=0,\ y=1,\ z=\dfrac{1}{2}$	4) $x=1,\ y=1,\ z=\dfrac{1}{2}$

17. Решите уравнение $x(1;\, y;\, yz)+y(1;\, z;\, xz)+z(1;\, x;\, xy)=(2;\, -1;\, 6)$. Сколько решений имеет это уравнение?

1) 3 2) 0 3) 1 4) 6

18. Даны векторы $\vec{a}(0;\, 1;\, -1)$, $\vec{b}(2;\, -1;\, 0)$, $\vec{c}(0;\, 0;\, 1)$. Определите координаты $(x_1;\, x_2;\, x_3)$ вектора $\vec{x}$ такого, что система векторов образует замкнутый контур.

1) $(-2;\, 0;\, 0)$ 2) $(2;\, 0;\, 0)$ 3) $(0;\, 0;\, 0)$ 4) $(0;\, -2;\, 0)$

19. При каком условии выполняются равенства $[\vec{a}\,\vec{b}]=[\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{c}\,\vec{a}]$.

1) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 3) $\vec{b}\parallel\vec{c}$ 4) другой ответ

20. Определите вектор $\vec{x}$ из условия $\vec{x}\vec{a}=\alpha,\ \vec{x}\vec{b}=\beta,\ \vec{x}\vec{c}=\gamma$, где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – заданные векторы, $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

1) $\vec{x}=\alpha[\vec{a}\,\vec{c}]+\beta[\vec{b}\,\vec{c}]+\gamma\vec{a}$

2) $\vec{x}=\dfrac{\alpha[\vec{b}\,\vec{c}]+\beta[\vec{c}\,\vec{a}]+\gamma[\vec{a}\,\vec{b}]}{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}$

3) $\vec{x}=\alpha[\vec{a}\,\vec{c}]+\beta[\vec{c}\,\vec{b}]+\beta\vec{a}$

4) другой ответ

21. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Выполните действия $\dfrac{A+B}{C}$ и выберите ответ.

1) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 5 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 5 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}2 & 4 & -9\\ -1 & -1 & 7\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$

22. Решите матричное уравнение $XC=A$, где C, A – матрицы из предыдущего задания, а X – неизвестная матрица.

1) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -1 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ -1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

23. Определите x, y, z из уравнения $x(1;\, 0;\, -1)+y(0;\, 2;\, 3)+z(1;\, 1;\, 0)=(0;\, 9;\, 1)$.

1) $x=13,\ y=-8,\ z=-13$	2) $x=-25,\ y=-8,\ z=25$	3) $x=-15,\ y=0,\ z=15$	4) $x=15,\ y=0,\ z=-15$

24. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x_1+3x_2-6x_3-2x_4=0 \\ 6x_1+x_2-2x_4=-2 \\ 6x_1-7x_2+21x_3+4x_4=3 \\ 9x_1+4x_2+2x_4=3 \\ 12x_1-6x_2+21x_3+2x_4=1 \end{cases}$.

1) система несовместна 2) бесчисленное множество решения 3) $x_1x_2x_3x_4=\dfrac{4928}{125}$ 4) другой ответ

25. Решите систему по методу Крамера $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=11 \\ x_1+2x_2-x_3=11 \\ 4x_1-3x_2-3x_3=24 \end{cases}$ и выберите ответ.

1) $x_1x_2+x_3=20$ 2) $x_1+x_2x_3=15$ 3) система несовместна 4) другой ответ

26. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ и выберите ответ.

1) 36 2) -20 3) 42 4) -42

27. Даны два линейных преобразования $\begin{cases} x_1' = 4x_1+3x_2+5x_3 \\ x_2' = 6x_1+7x_2+x_3 \\ x_3' = 9x_1+x_2+8x_3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1'' = -x_1'+3x_2'-2x_3' \\ x_2'' = -x_1'+x_2'+2x_3' \\ x_3'' = 3x_1'-4x_2'+5x_3' \end{cases}$. Преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3 имеет вид

1) другой ответ

2) $\begin{cases} x_1'' = -x_1-5x_2+23x_3 \\ x_2'' = -31x_1+21x_2+7x_3 \\ x_3'' = 11x_1-4x_2-24x_3 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} x_1'' = -7x_2-14x_3 \\ x_2'' = -7x_1-14x_3 \\ x_3'' = -7x_1-14x_2 \end{cases}$,

4) $\begin{cases} x_1'' = -4x_1+16x_2-18x_3 \\ x_2'' = 8x_1-3x_2-3x_3 \\ x_3'' = 33x_1-14x_2+51x_3 \end{cases}$,

Часть 4. Аналитическая геометрия в пространстве. В заданиях 28-36 даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$. Тогда

28. Длина стороны A_1A_2 равна

1) $5\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{5}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{3}$

29. Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 равен

1) другой ответ	2) $\arccos\frac{42}{5\sqrt{86}}$	3) $-\arccos\frac{42}{5\sqrt{86}}$	4) $\pi-\arccos\frac{42}{5\sqrt{43}}$

30. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ равен

1) $\arccos\frac{7}{3\sqrt{23}}$	2) $\pi-\arccos\frac{7}{3\sqrt{23}}$	3) $\arcsin\frac{7}{3\sqrt{23}}$	4) другой ответ

31. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна

1) другой ответ 2) 45 3) 30 4) 15

32. Объем пирамиды равен

1) 17,5 2) 35 3) $\frac{35}{3}$ 4) 70

33. Уравнение стороны A_1A_2 имеет вид

1) $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-5}{-3}$	2) $\frac{x}{-4}=\frac{y-7}{5}=\frac{z-2}{-3}$	3) $\frac{x}{4}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-2}{5}$	4) другой ответ

34. Уравнение грани $A_1A_2A_3$ имеет вид

1) $x+2y+2z=-18$	2) $x+2y+2z=18$	3) другой ответ	4) $2x+y+2z=18$

35. Уравнение высоты из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ имеет вид

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-2}{0}$	2) другой ответ	3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{0}$	4) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{2}$

36. Координат точки пересечения высоты из вершины A_4 с гранью $A_1A_2A_3$ равны

1) другой ответ	2) $\left(\frac{16}{9};\frac{59}{9};\frac{14}{9}\right)$	3) $\left(\frac{16}{3};\frac{59}{3};\frac{14}{3}\right)$	4) $\left(\frac{14}{3};\frac{59}{3};\frac{16}{3}\right)$

37. Определить тип поверхности, которая получается вращением линии $\begin{cases} x=2z \\ y=1 \end{cases}$ вокруг оси Oz.

1) однополостной гиперболоид	2) двухполостной гиперболоид	3) эллипсоид	4) другой ответ

38. К сфере $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$ через точку $(4;1;2)$ проведена касательная плоскость

1) $x+y+z=5$ 2) $x=4$ 3) другой ответ 4) $4x+y+2z=13$

39. Уравнение проекции на плоскость xOy линии пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ и плоскости $x+2y-4=0$ имеет вид

1) другой ответ

2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

3) $(4;\ 0;\ 0)$

4) $x^2+2y^2-4x=0$

40. Используя данные задачи 39, определите координаты центра линии пересечения эллипсоида и плоскости

1) $\left(2;\ 0;\ \dfrac{1}{2}\right)$

2) другой ответ

3) $(2;\ 0;\ 0)$

4) $\left(4;\ 0;\ \dfrac{1}{2}\right)$

Ответы к итоговым тестам

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ верного ответа	2	1	3	4	1	2	3	4	1	3	2, 4	4
№ задания	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
№ верного ответа	1	2	3	3	4	1	2	3	4	1	2	3
№ задания	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
№ верного ответа	1	2	4	1	2	3	4	3	1	2	4	2
№ задания	37	38	39	40								
№ верного ответа	1	2	4	1								

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Иванов В.А., Лукашов А.Л. Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов заочного отделения мех.-мат. факультета. – Саратов: изд-во Сарат. Ун-та, 2004, 100 с.: илл. (библиотека "Основы математики", вып. 25).

Кудрявцев В. А., Демидович В. П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Наука, 1989.

Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебник. М.: Наука, 1975.

Пензов Ю. Е. Аналитическая геометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972.

Идельсон А.В., Блюмкина И.А. Математика для экономистов. Т.1: Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Учеб. пособие. М: ИНФА-М, 2000,–200 с.

Проскуряков И.В. Сборника задач по линейной алгебре. М: Наука, гл. ред физ.-мат. литературы, 1967. – 384 с.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1978.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 288с.: илл.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Галаев С. В., Иванов В. А. Аналитическая геометрия на плоскости: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. (Б-ка «Основы математики»; Вып. 2).

Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. М.: Наука, 1978.

Щипачев В. С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.

Баврин И. И. Высшая математика: Учеб. пособие для студ. хим. и биол. фак. пед. ин-в. М.: Просвещение, 1980.

Гусак А. А. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., доп. М.: Высшая школа, 1980.

Гильдерман Ю. И. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск: Наука, 1974.

Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1980. Ч. 1.

Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие – М: Высшая школа, 2005. – 496 с. Илл. (серия "Прикладная математика").

Черняк Ж.А., Черняк А.А., Федена О.А. и др. Контрольные задания по общему курсу высшей математики. Под общей редакцией Ж.А. Черняка, А.А., Черняка – Спб.: Питер, 2006. – 446 с., илл.