ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

А. М. Водолазов, О.А. Королева, В.В. Кривобок, Е.В. Сецинская

А Л Г Е Б Р А.

ЧАСТЬ II

Аннотация. В учебном пособии отражены основные темы второго семестра курсов «Алгебра» и «Алгебра и теория чисел»: линейные пространства, линейные операторы в линейном пространстве, евклидовы (унитарные) пространства, линейные операторы в евклидовом (унитарном) пространстве, квадратичные формы.

Для студентов младших курсов механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий, изучающих курсы «Алгебра» и «Алгебра и теория чисел».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебное пособие соответствует материалу, изучаемому студентами первого курса в курсе «Алгебра» механико-математического факультета, а также студентами первого курса факультета компьютерных наук и информационных технологий в курсах «Алгебра» и «Алгебра и теория чисел». В данном пособии отражены темы, рассматриваемые во втором семестре: линейные пространства, линейные операторы в линейном пространстве, евклидовы (унитарные) пространства, линейные операторы в евклидовом (унитарном) пространстве, квадратичные формы.

Учебное пособие содержит курс лекций по предлагаемым разделам и может быть использовано при подготовке к экзамену по предметам «Алгебра» и «Алгебра и теория чисел» во втором семестре, а так же при самостоятельной работе студентов, обучающихся по заочной форме обучения.

Для более подробного изучения теоретического материала может быть рекомендована следующая литература:

1. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. М., 1974.

2. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 1975.

3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М., 1978.

4. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., 1970.

5. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. М., 1968.

Глава 1

Линейные пространства

1.1 Понятие линейного пространства

Определение 1.1.1. Пусть k и V — два произвольных множества. Говорят, что на множестве V определена внешняя алгебраическая операция со множеством мультипликаторов k, если задано отображение декартового произведения $k \times V \to V$. При этом отображении, образ упорядоченный пары (α, a), где $\alpha \in k$, $a \in V$ называется произведением α на a и обозначается αa.

Замечание 1.1.1. Алгебраические операции, изучаемые ранее на множестве V, называются внутренними алгебраическими операциями. В качестве множества k чаще всего будет выступать поле, которое будем называть основным. Элементы поля k будем обозначать $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Определение 1.1.2. Линейным (векторным) пространством над полем k называется множество V, рассмотренное вместе с определенной на нем внутренней алгебраической операцией сложения и внешней алгебраической операцией умножения на скаляры поля k, удовлетворяемыми следующим семи аксиомам.

1. $a + b = b + a$;

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3. $(\forall\ a, b \in V)\ (\exists\ x \in V) \quad b + x = a$;

4. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;

5. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

6. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) = \beta(\alpha a)$;

7. $1 \cdot a = a$,

где $a, b, c, x \in V;\ \alpha, \beta, 1 \in k$.

Замечание 1.1.2. Множество V часто называют базисным множеством линейного пространства. Его элементы будем обозначать $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$ и называть векторами.

Свойства линейных пространств

1. $(\forall\ a \in V)\ (\exists\ 0 \in V) \quad a + 0 = a$;

2. $(\forall\ a \in V)\ (\exists\ (-a) \in V) \quad a + (-a) = 0$;

3. $(\forall\ a, b \in V)\ (\exists\ (a - b) \in V) \quad a - b = a + (-b)$;

4. $\alpha a = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $a = 0$;

5. $\alpha(-a) = (-\alpha)a = -\alpha a$;

6. $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$;

7. $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$.

Доказательство. Аксиомы 1–3 линейного пространства указывают на то, что $(V, +)$ образует аддитивную группу, поэтому справедливы свойства 1)–3).

4) *Необходимость.*

Имеем $\alpha a = (\alpha + 0)a = \alpha a + 0a \Rightarrow 0a = \alpha a - \alpha a = 0$. Получаем, что $0a = 0$.

Имеем $\alpha a = \alpha(a+0) = \alpha a + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 = \alpha a - \alpha a = 0$. Получаем, что $\alpha 0 = 0$.

Достаточность.

Пусть $\alpha a = 0$. Если $\alpha = 0$, то все доказано. Если $\alpha \neq 0$ то будет существовать $\alpha^{-1} \in k$. Тогда $a = 1 \cdot a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$.

5) Расмотрим $\alpha a + \alpha(-a) = \alpha(a + (-a)) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha(-a) = -\alpha a$. Далее, $\alpha a + (-\alpha)a = (\alpha + (-\alpha))a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-\alpha)a = -\alpha a$.

6) Имеем, $\alpha(a-b) = \alpha(a + (-b)) = \alpha a + \alpha(-b) = \alpha a - \alpha b$.

7) Подсчитаем $(\alpha - \beta)a = (\alpha + (-\beta))a = \alpha a + (-\beta)a = \alpha a - \beta a$. □

<u>Примеры линейных пространств:</u>

1. $V = \{0\}$ — нулевое линейное пространство (тривиальное).

2. $V = k^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in k\}$ — координатное линейное пространство над полем k.

3. $V = M(m \times n, k)$ — матрицы размерности $m \times n$ с элементами из k.

4. $V = L$ — множество решений однородной системы линейных уравнений.

5. $V = k[x]$ — множество многочленов от одного неизвестного с коэффициентами из k.

6. $V = \{f(x) \in k[x] \, | deg \ f \leqslant n\}$.

1.2 Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Базис линейного пространства

Легко заметить, что основные понятия и факты, определенные в координатном линейном пространстве переносятся на абстрактные линейные пространства. Связано это с тем, что эти понятия и факты использовали только свойства операций над векторами, но не использовали природу самих векторов. А как видно из определения 1.1.2, операции в абстрактном линейном пространстве обладают теми же самыми свойствами, что и операции в координатном линейном пространстве. Поэтому, в абстрактных линейных пространствах можно говорить о линейной комбинации векторов, о линейно зависимых и линейно не зависимых системах векторов, о критерии и свойствах линейной зависимости, об основной теореме о линейной зависимости, о линейном выражении одной системы векторов через другую, об эквивалентных системах векторов, о базисе и ранге системы векторов. Но есть и отличия.

Пример: $V = k[x]$. Рассмотрим следующую систему векторов: $1, x, x^2, \ldots, x^n \in V$. Эта система векторов является линейно не зависимой. Действительно,

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

а это и означает, что $1, x, x^2, \ldots, x^n$ является линейно не зависимой системой векторов. Совершенно ясно, что n можно брать любым и как угодно большим. Поэтому в пространстве V существуют линейно не зависимые системы векторов с каким угодно большим числом этих векторов.

Определение 1.2.1. Линейное пространство V называется конечномерным, если существует натуральное число N такое, что число линейно не зависимых векторов в любой системе пространства V не превосходит N. В противном случае, линейное пространство V называется бесконечномерным.

Пример:

1. $V = k^n$ — конечномерное линейное пространство.

2. $V = k[x]$ — бесконечномерное линейное пространство.

В конечномерных линейных пространствах можно говорить о базисе как конечной, так и бесконечной системы векторов. В частности, можно говорить о базисе всего конечномерного линейного пространства V.

Определение 1.2.2. Базисом ненулевого конечномерного пространства V называется упорядоченная линейно не зависимая подсистема векторов $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, удовлетворяя любому из следующих равносильных условий:

1. любой вектор $a \in V$ линейно выражается через подсистему B;
2. $\forall\ a \in V$ подсистема (B, a) является линейно зависимой;
3. в пространстве V не существует линейно не зависимых подсистем с числом векторов большим, чем в B.

Определение 1.2.3. Размерностью нулевого линейного пространства считается число 0. Размерностью ненулевого конечномерного линейного пространства V называется число векторов в любом базисе этого пространства или максимальное число линейно не зависимых векторов этого пространства V.

Размерность конечномерного линейного пространства V будем обозначать $dim\, V$ или $rang\ V$.

<u>Пример:</u>

1. $dim\ \{0\} = 0$;
2. $dim\ k^n = n$;
3. $dim\ M(m \times n, k) = mn$;
4. $dim\ L = n - r$;
5. $dim\,\{f(x) \in k[x] | deg\ f(x) \leqslant n\} = n + 1$.

Пусть V — конечномерное линейное пространства и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — его базис. Тогда любой вектор $a \in V$ можно выразить чрез этот базис

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n. \tag{1.1}$$

Так как базис является линейно не зависимой системой векторов, то это выражение (1.1) для вектора a единственно. Таким образом, каждому вектору $a \in V$ ставится в соответствие упорядоченная система $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Определение 1.2.4. Координатами (компонентами) вектора $a \in V$ относительно заданного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства V называется упорядоченная совокупность коэффициентов линейного выражения вектора a через этот базис.

Пишут, вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Определение 1.2.5. Координатным столбцом вектора a относительно заданного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется столбец, составленный из координат вектора a относительно этого базиса.

Обозначим $\breve{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Определение 1.2.6. Сопоставление вектору $a \in V$ его координатного столбца относительно заданного базиса пространства V называется стандартным отображением линейного пространства V размерности n в координатное линейное пространство k^n.

Ясно, что каждый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяет свое стандартное отображение $V \to k^n$.

Предложение 1.2.1. *Координатный столбец суммы двух векторов равен сумме координатных столбцов слагаемых векторов. Координатный столбец произведения вектора на скаляр, равен координатному столбцу этого вектора, умноженному на этот скаляр.*

Это предложение 1.2.1 означает, что $\check{a+b} = \check{a} + \check{b}$ и $\check{\alpha a} = \alpha\check{a}$.

Дадим другую форму записи (1.1). Ясно, что $\check{a}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — матрица размерности $1 \times n$. Возьмем базисный столбец пространства V $\tilde{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}$ — матрица размерности $n \times 1$. Тогда

$$\check{a}^T\tilde{e} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = a.$$

Таким образом, $a = \check{a}^T\tilde{e}$ — матричная запись равенства (1.1).

1.3 Изоморфизм линейных пространств

Пусть V и V' — два линейных пространства над одним и тем же основным полем k.

Определение 1.3.1. Изоморфизмом линейного пространства V на линейное пространство V' над одним и тем же основным полем k называется всякая биекция $f : V \to V'$, удовлетворяющая условиям линейности:

1. $(\forall\, a, b \in V) \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $(\forall\, \alpha \in k,\ a \in V) \quad f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

Условие 1 означает, что отображение f является изоморфизмом аддитивной группы $(V, +)$ в аддитивную группу $(V', +)$.

Определение 1.3.2. Линейное пространство V называется изоморфным линейному пространству V' ($V \cong V'$), если существует хотя бы один изоморфизм $f : V \to V'$.

Предложение 1.3.1. *Отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на классе линейных пространств над одним и тем же основным полем* k.

Это предложение 1.3.1 означает, что для отношения изоморфности справедливы следующие утверждения

1. $V \cong V$, то есть выполняется свойство рефлексивности;

2. если $V \cong V'$, то $V' \cong V$ (симметричность);

3. если $V'' \cong V'$ и $V' \cong V$, то $V'' \cong V$ (транзитивность).

ТЕОРЕМА 1.3.1 (о свойствах изоморфных линейных пространств). *Справедливы следующие утверждения:*

1. *при изоморфизме линейно зависимой системы векторов переходят в линейно зависимые, а линейно не зависимые системы векторов переходят в линейно не зависимые;*

2. *изоморфные линейные пространства одновременно либо конечномерные, либо бесконечномерные;*

3. *при изоморфизме базис системы векторов переходит в базис, ранг системы векторов при изоморфизме не изменяется.*

Доказательство. 1) Пусть $f : V \to V'$ является изоморфизмом. Возьмем линейно зависимую систему векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ из V. Это означает, что существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ не все равные нулю такие, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$. Перейдем к образам этих векторов $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s) = f(0)$. Так как f — изоморфизм, то $\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_s f(a_s) = 0$, здесь не все $\alpha_i = 0$. Последнее соотношение указывает на то, что векторы $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_s)$ являются линейно зависимыми в V'.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ линейно не зависимая система векторов из V. Надо доказать, что $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_s)$ также является линейно не зависимой. Допустим противное, то есть система $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_s)$ является линейно зависимой. Тогда рассмотрим отображение $f^{-1} : V' \to V$, которое также является изоморфизмом. При этом отображении линейно зависимые векторы $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_s)$ перейдут в линейно зависимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$, а это противоречит линейной независимости $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

2) Пусть $f : V \to V'$ и V является конечномерным линейным пространством. Это означает, что существует натуральное число N такое, что число векторов в любой линейно не зависимой системы из пространства V не превосходит этого числа N. Так как при изоморфизме только линейно не зависимая система векторов переходит в линейно не зависимую, то в пространстве V' число векторов в любой линейно не зависимой системе также будет ограничено этим числом N, следовательно пространство V' будет конечномерным.

Пусть V является бесконечномерным линейным пространством. Надо доказать, что и V' в этом случае также будет бесконечномерным. Допустим противное, то есть V' является конечномерным линейным пространством. Тогда рассмотрим изоморфизм $f^{-1} : V' \to V$. При этом изоморфизме из конечномерности V' будет следовать конечномерность V, а это противоречит условию.

3) Пусть A — система векторов из V, B — базис системы векторов A и $f : V \to V'$ —изоморфизм. Тогда, так как $B \subset A$, то $f(B) \subset f(A)$. Далее, A линейно выражается через B, тогда $f(A)$ будет линейно выражаться через $f(B)$. Наконец, так как B — линейно независимая система векторов, $f(B)$ также является линейно независимой. Таким образом, $f(B)$ является базисом $f(A)$, то есть базис B системы векторов A переходит в базис $f(B)$ системы векторов $f(A)$. Так как f является биекцией, то чис-

ло векторов в B равно числу векторов $f(B)$, то есть $r(A) = r(f(A))$. $\square$

Следствие 1.3.1.1. Изоморфные конечномерные линейные пространства имеют одинаковую размерность.

Доказательство. Действительно, $f : V \to V'$ — изоморфизм и V и V' являются конечномерными линейными пространствами. Тогда базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V переходит в базис $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ пространства V', то есть $dim\ V = n = dim\ V'$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.3.2. *Любое конечномерное линейное пространство V размерности n изоморфно координатному линейному пространству k^n и при этом изоморфизм достигается с помощью стандартного отображения $f : V \to k^n$ относительно любого базиса пространства V.*

Доказательство. Пусть $dim\ V = n$ и $\tilde{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}$ — базис V. Рассмотрим стандартное отображение $f : V \to k^n$. Известно, что если $a = \check{a}^T \tilde{e}$, то $f(a) = \check{a}$. Покажем, что это отображение f является изоморфизмом.

Во-первых, f является инъекцией. Действительно, если $f(a) = f(b)$, то $\check{a} = \check{b} \Rightarrow a = b$.

Во-вторых, f является сюръекцией. В самом деле, возьмем любой столбец $\check{a} \in k^n$ и построим вектор $a = \check{a}^T \tilde{e}$. Тогда $f(a) = \check{a}$.

Остается показать, что отображение f сохраняет операции. Рассмотрим $f(a + b) = \widecheck{a + b} = \check{a} + \check{b} = f(a) + f(b)$. $f(\alpha a) = \widecheck{\alpha a} = \alpha\check{a} = \alpha f(a)$. Таким образом $f : V \to k^n$ является изоморфизмом, следовательно $V \cong k^n$. $\square$

Следствие 1.3.2.1. Конечномерные линейные пространства одинаковой размерности изоморфны.

Доказательство. Действительно, пусть размерность $dim\ V = n$ и $dim\ V' = n$. Тогда по теореме 1.3.2 $V \cong k^n$ и $V' \cong k^n$, следовательно $V \cong V'$. □

Следствие 1.3.2.2. Ранг системы векторов конечномерного линейного пространства V равен рангу системы координатных столбцов векторов этой системы относительно любого базиса пространства V.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторов из V. Рассмотрим $f : V \to k^n$ — стандартный изоморфизм, тогда система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ переходит в $\check{a}_1, \check{a}_2, \ldots, \check{a}_s$. Но по утверждению 3 теоремы 1.3.1 $r(a_1, a_2, \ldots, a_s) = r(\check{a}_1, \check{a}_2, \ldots, \check{a}_s)$. □

1.4 Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода

Пусть V — конечномерное линейное пространство над k, $dim\ V = n$ и пусть

$$\widetilde{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}$$

— два базиса пространства V. Выразим векторы базиса $\widetilde{u}$ через векторы базиса $\widetilde{e}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n; \\ u_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n; \\ &\ldots \\ u_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Определение 1.4.1. Матрицей перехода от базиса $\widetilde{e}$ к базису $\widetilde{u}$ называется матрица, транспонированная к матрице, составленной из коэффициентов линейного выражения векторов базиса $\widetilde{u}$ через векторы базиса $\widetilde{e}$.

Определение 1.4.1 означает, что матрица перехода

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Первым столбцом матрицы является координатный столбец вектора u_1. Вторым — координатный столбец вектора u_2, и т.д.

Определение 1.4.2. Матрицей перехода от базиса $\widetilde{e}$ к базису $\widetilde{u}$ называется матрица Q, столбцами которой являются координатные столбцы векторов базиса $\widetilde{u}$ относительно базиса $\widetilde{e}$, то есть

$$Q = \left(\check{u}_1|_{\widetilde{e}}, \check{u}_2|_{\widetilde{e}}, \dots, \check{u}_n|_{\widetilde{e}}\right).$$

Определение 1.4.3. Матрицей перехода от базиса $\widetilde{e}$ к базису $\widetilde{u}$ называется матрица Q, определяемая равенством $\widetilde{u} = Q^T\widetilde{e}$ — матричная запись системы (1.2).

ТЕОРЕМА 1.4.1 (о матрице перехода)**.** *Справедливы следующие утверждения*

1. *Матрица перехода от одного базиса к другому является не особенной. Обратно, любую не особенную матрицу можно рассматривать как матрицу перехода от заданного базиса к некоторому другому базису.*

2. *Матрицы перехода от базиса $\widetilde{e}$ к базису $\widetilde{u}$ и от базиса $\widetilde{u}$ к базису $\widetilde{e}$ являются взаимно обратными.*

Доказательство. 1) Пусть Q — любая не особенная матрица и $\widetilde{e}$ — заданный базис пространства V. Построим векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ таким образом, чтобы их координатные столбцы относительно базиса $\widetilde{e}$ совпадали со столбцами матрицы Q.

Так как $|Q| \neq 0$, то столбцы матрицы Q являются линейно независимыми, поэтому и векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будут линейно независимыми. В силу этого, векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ можно взять в качестве базиса $\widetilde{u}$ пространства V.

По построению будем иметь $\widetilde{u} = Q^T\widetilde{e}$, то есть матрица Q является матрицей перехода от заданного базиса $\widetilde{e}$ к вновь построенному базису $\widetilde{u}$.

2) Пусть $\widetilde{e}$ и $\widetilde{u}$ — два базиса пространства V. Пусть Q — матрица перехода от $\widetilde{e}$ к $\widetilde{u}$, R — матрица перехода от $\widetilde{u}$ к $\widetilde{e}$. Тогда по определению 1.4.3 будем иметь $\widetilde{u} = Q^T\widetilde{e}$, $\widetilde{e} = R^T\widetilde{u}$. Отсюда, $\widetilde{e} = R^T(Q^T\widetilde{e}) = (R^TQ^T)\widetilde{e} = (QR)^T\widetilde{e}$.

Это равенство указывает на то, что матрица QR является матрицей перехода от $\widetilde{e}$ к $\widetilde{e}$. Но этой матрицей является матрица E, следовательно $QR = E$. Это соотношение указывает на то, что Q и R — не особенные взаимно обратные матрицы, то есть $Q = R^{-1}$. □

ТЕОРЕМА 1.4.2. *Координатный столбец вектора относительно нового базиса равен координатному столбцу этого вектора относительно старого базиса, умноженному слева на матрицу перехода от нового базиса к старому, то есть*

$$\check{a}|_{\widetilde{u}} = R \cdot \check{a}|_{\widetilde{e}},$$

где R — матрица перехода от базиса $\widetilde{u}$ к базису $\widetilde{e}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{e}$ — старый базис, $\widetilde{u}$ — новый базис, R — матрица перехода от $\widetilde{u}$ к $\widetilde{e}$, то есть $\widetilde{e} = R^T\widetilde{u}$. С одной стороны, вектор $a = \check{a}^T|_{\widetilde{u}} \cdot \widetilde{u}$. С другой стороны, вектор

$$a = \check{a}^T|_{\widetilde{e}} \cdot \widetilde{e} = \check{a}^T|_{\widetilde{e}} \cdot (R^T\widetilde{u}) = (\check{a}^T|_{\widetilde{e}} \cdot R^T)\widetilde{u} = (R \cdot \check{a}|_{\widetilde{e}})^T\widetilde{u}.$$

Так как выражение вектора a через базис $\widetilde{u}$ является единственным, то $\check{a}^T|\widetilde{u} = (R\cdot\check{a}|_{\widetilde{e}})^T$. Транспонируя эти матрицы, получим $\check{a}|_{\widetilde{u}} = R\cdot\check{a}|_{\widetilde{e}}$. □

1.5 Линейные подпространства

Пусть V — линейное пространство над полем k.

Определение 1.5.1. Подмножество L базисного множества V называется устойчивым подмножеством, если оно устойчиво относительно внутреннего сложения и внешнего умножения, то есть

1. $(\forall\, a, b \in L) \quad a + b \in L$;

2. $(\forall\, \alpha \in k,\ a \in L) \quad \alpha a \in L$.

Следствие. Устойчивое подмножество L, рассмотренное вместе с индуцированными на нем операциями, образует линейное пространство.

Доказательство. $L \subset V$ и L — устойчивое подмножество, тогда на L можно рассмотреть индуцированные операции внутреннего сложения и внешнего умножения. Покажем, что $(\forall\, a, b \in L) \quad a - b \in L$. Действительно, $-b = -(1 \cdot b) = (-1)b \in L$, тогда $a - b = a + (-b) \in L$. Таким образом, $(L, +)$ образует аддитивную подгруппу группы $(V, +)$. Поэтому первые три аксиомы линейного пространства выполняются в L, остальные четыре аксиомы, относящиеся к внешнему умножению, выполняясь в пространстве V, будут выполняться и на устойчивом подмножестве L. Этим установлено, что L является линейным пространством. $\square$

Определение 1.5.2. Линейным подпространством пространства V называется всякое его устойчивое подмножество L, рассмотренное вместе с индуцированными на нем операциями.

Предложение 1.5.1. *Пересечение семейства линейных подпространств линейного пространства V снова является подпространством пространства V.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\{L_i\}$ — семейство линейных подпространств пространства V. Рассмотрим множество

$$L = \bigcap_{(i)} L_i.$$

Надо показать, что L — устойчивое подмножество в пространстве V.

Пусть $a, b \in L \Rightarrow (\forall\, i) \quad a, b \in L_i$. Так как L_i — линейное подпространство, то $(\forall\, i) \quad a + b \in L_i \Rightarrow a + b \in \bigcap\limits_{(i)} L_i = L$. Следовательно, L устойчиво относительно внутреннего сложения.

Аналогично показывается, что $(\forall\, \alpha \in k, a \in L) \quad \alpha a \in L$.

Следовательно, L — подпространство пространства V. □

Пусть теперь A — подмножество линейного пространства V. Рассмотрим все линейные подпространства L пространства V, содержащие множество A. Такие подпространства существуют, например, все множество V. Устроим пересечение всех этих подпространств L, то есть

$$\bigcap_{L \supset A} L = L(A).$$

Предложение 1.5.2. *Множество $L(A)$ — наименьшее линейное подпространство пространства V, содержащее множество A.*

Доказательство. Действительно, тот факт, что $L(A)$ является подпространством пространства V следует из предложения 1.5.1. Далее, множество A содержится во всех L которые мы пересекаем, следовательно $A \subset L(A)$.

Наконец, возьмем любое линейное подпространство L', такое, что $A \subset L'$. Тогда оно находится среди пересекаемых подпространств L, следовательно $L(A) \subset L'$. □

Определение 1.5.3. Линейной оболочкой множества A пространства V называется наименьшее линейное подпространство $L(A)$ пространства V, содержащее множество A.

Часто говорят, что подпространство $L(A)$ порождено множеством A или натянуто на множество A.

Предложение 1.5.3 (строение $L(A)$). *Линейная оболочка $L(A)$ состоит из множества линейных комбинаций конечных подмножеств множества A с коэффициентами из основного поля k, то есть*

$$L(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a a \,\middle|\, \alpha_a \in k \text{ и почти все } \alpha_a = 0 \right\}.$$

Доказательство. В самом деле, введем обозначение: $L' = \left\{ \sum\limits_{a \in A} \alpha_a a \right\}$. Необходимо показать, что $L(A) = L'$.

С одной стороны, так как $A \subset L(A)$, то $L(A)$ содержит любую линейную комбинацию конечного подмножества множества векторов A, то есть $L' \subset L(A)$.

С другой стороны, ясно, что L' — устойчивое подмножество пространства V, следовательно, L' — линейное подпространство пространства V. Кроме того, множество $A \subset L'$ (так как $a = 1 \cdot a + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots$). Тогда по предложению 1.5.2 $L(A) \subset L'$.

В итоге получаем, что $L(A) = L'$. □

Следствие. Если $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, где векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ являются линейно независимыми, то $L(A)$ — конечномерно, $dim\ L(A) = s$ и

$$L(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i |\ \alpha_i \in k \right\}.$$

Доказательство. Действительно, тот факт, что $L(A)$ имеет указанный вид следует из предложения 1.5.3. Тогда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ можно взять в качестве базиса $L(A)$, следовательно, $dim\ L(A) = s$. □

Следствие. Если линейное пространство V конечномерное, то любое его линейное подпространство L также является конечномерным и $dim\ L \leqslant \leqslant dim\ V$. Если $dim\ L = dim\ V$, то $L = V$.

Доказательство. В самом деле, пусть $dim\ V = n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис V. Так как L — подпространство линейного пространства V, то оно должно быть конечномерным. В противном случае, из бесконечномерности пространства L вытекало бы бесконечномерность пространства V.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — базис L, то есть $dim\ L = s$. Так как $a_1, a_2, \ldots, a_s$ линейно выражаются через базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V, то по основной теореме о линейной зависимости $s \leqslant n$, то есть $dim\ L \leqslant dim\ V$.

Если $dim\ L = dim\ V$, то есть $s = n$, то векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно взять в качестве базиса пространства V. В силу предложения 1.5.3 будем иметь

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right\} = V.$$

$\square$

Определение 1.5.4. Суммой семейства линейных подпространств $\{L_i\}$ пространства V называется линейная оболочка множества, равная теоретико-множественному объединению базисных множеств этих линейных подпространств, то есть

$$\sum_{(i)} L_i = L\left(\bigcup_{(i)} L_i \right).$$

Определение 1.5.5. Суммой семейства линейных подпространств $\{L_i\}$ пространства V называется наименьшее линейное подпространство пространства V, содержащее все подпространства данного семейства.

Предложение 1.5.4 (строение суммы). *Сумма $L_1 + L_2$ двух линейных подпространств совпадает со множеством векторов вида $\{a_1 + a_2 |\ a_1 \in L_1, a_2 \in L_2\}$.*

Доказательство. Действительно, по определению 1.5.4 имеем $L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2)$. Введем обозначение $L' = \{a_1 + a_2 |\ a_i \in L_i,\ i = 1, 2\}$. Надо показать, что $L_1 + L_2 = L'$.

С одной стороны, ясно, что L' — устойчивое подмножество пространства V, поэтому L' — линейное подпространство пространства V.

Далее, $L_1 \subset L'$. Действительно, $(\forall\, a_1 \in L_1) \quad a_1 = a_1 + 0$, где $0 \in L_2$. Аналогично, $L_2 \subset L'$, имеем $(\forall\, a_2 \in L_2) \quad a_2 = 0 + a_2$, где $0 \in L_1$. Отсюда, $L_1 \cup L_2 \subset L'$, следовательно $L(L_1 \cup L_2) \subset L'$, то есть $L_1 + L_2 \subset L'$.

С другой стороны, возьмем произвольный вектор $a \in L'$. Его можно представить в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1,\ a_2 \in L_2$. Векторы $a_1, a_2 \in \in L_1 \cup L_2$, следовательно $a = a_1 + a_2 \in L(L_1 \cup L_2) = L_1 + L_2$, то есть $a \in L_1 + L_2$. Имеем $L' \subset L_1 + L_2$.

Таким образом, из двух включений получаем, что $L_1 + L_2 = L'$. $\square$

Замечание 1.5.1. Можно показать, что в общем случае

$$\sum_{(i)} L_i = \left\{ \sum_{(i)} a_i \middle|\ a_i \in L_i \text{ и почти все } a_i = 0 \right\}.$$

Определение 1.5.6. Сумма линейных подпространств $L_1 + L_2$ называется прямой, если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Прямая сумма обозначается $L_1 \oplus L_2$.

Лемма 1.5.1. Любую линейно независимую систему векторов конечномерного линейного пространства V можно дополнить до базиса пространства V.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — линейно независимая система векторов из V и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, $dim\ V = n$. Рассмотрим следующую систему векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_s, e_1, e_2, \ldots, e_n. \tag{1.3}$$

Из этой системы векторов (1.3) начнем удалять векторы, которые линейно выражаются через предыдущие. Первые s векторов остаются на месте, так как они линейно независимые. Получим

$$a_1, a_2, \ldots, a_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}. \tag{1.4}$$

Система векторов (1.4) будет линейно независимой, так как ни один вектор не выражается через остальные векторы.

Далее, любой вектор $a \in V$, линейно выражаясь через систему (1.3), будет линейно выражаться и через систему (1.4), так как удаленные векторы из системы (1.3), линейно выражаются через систему (1.4). Таким образом, система векторов (1.4) будет составлять базис пространства V. Этот базис получен из системы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ добавлением некоторых векторов. $k = n - s$. □

ТЕОРЕМА 1.5.1 (о размерности суммы двух линейных подпространств)**.** *Размерность суммы двух линейных подпространств конечномерного линейного пространства V равна сумме размерностей этих линейных подпространств без размерности их пересечения, то есть*

$$dim\ (L_1 + L_2) = dim\ L_1 + dim\ L_2 - dim\ (L_1 \cap L_2).$$

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 — два линейных подпространства пространства V. Обозначение через $L = L_1 \cap L_2$. Пусть система векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_r \tag{1.5}$$

— базис L. Если $L = \{0\}$, то $r = 0$ и базисом будет пустое множество. По лемме базис L можно дополнить до базиса L_1

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, u_{r+1}, \ldots, u_s, \tag{1.6}$$

где (1.6) — базис L_1, $dim\ L_1 = s$. Аналогично, по лемме базис L можно дополнить до базиса L_2

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, v_{r+1}, \ldots, v_t, \tag{1.7}$$

где (1.7) — базис L_2, $dim\ L_2 = t$.

Рассмотрим следующую систему векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, u_{r+1}, \ldots, u_s, v_{r+1}, \ldots, v_t. \tag{1.8}$$

Покажем что система (1.8) является базисом $L_1 + L_2$. Действительно, возьмем произвольный вектор $x \in L_1 + L_2$. Тогда $x = a + b$, где $a \in \in L_1,\ b \in L_2$. Разлагая вектор a по базису (1.6), вектор b по базису (1.7) и складывая полученные выражения, мы получим, что вектор x линейно выражается через систему (1.8).

Остается показать, что система векторов (1.8) является линейно независимой. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_s u_s + \gamma_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \gamma_t v_t = 0. \quad (1.9)$$

Нужно показать, что все скаляры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0$. Рассмотрим вектор

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_s u_s. \quad (1.10)$$

Из равенства (1.9) видно, что вектор

$$x = -\gamma_{r+1} v_{r+1} - \ldots - \gamma_t v_t. \quad (1.11)$$

Равенство (1.10) указывает на то, что вектор $x \in L_1$, а равенство (1.11) указывает на то, что вектор $x \in L_2$, следовательно $x \in L_1 \cap L_2 = L$. Следовательно, вектор x можно выразить через базис L.

$$x = \alpha'_1 e_1 + \ldots + \alpha'_r e_r. \quad (1.12)$$

Сравним (1.10) и (1.12). Выражение вектора x через базис (1.6) должно быть единственным, тогда

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots, \alpha_r = \alpha'_r, \beta_{r+1} = 0, \ldots, \beta_s = 0.$$

Тогда равенство (1.9) принимает вид

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r + \gamma_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \gamma_t v_t = 0. \quad (1.13)$$

Так как базис (1.7) является линейно независимой системой векторов, то из равенства (1.13) следует, что все скаляры $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \gamma_{r+1} = = \ldots = \gamma_t = 0$.

Видно, что система векторов (1.8) является линейно независимой, следовательно, система векторов (1.8) является базисом $L_1 + L_2$. Тогда $dim\ (L_1 + L_2) =$ числу векторов в базисе (1.8) $= r + (s - r) + (t - r) = s + t - r = dim\ L_1 + dim\ L_2 - dim\ L = dim\ L_1 + dim\ L_2 - dim\ (L_1 \cap L_2)$. □

Следствие 1.5.1.1. Размерность прямой суммы равна сумме размерностей слагаемых.

Доказательство. Действительно, если $L_1 + L_2$ — прямая сумма, то по определению $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, $dim\ \{0\} = 0$. Получаем, что $dim\ (L_1 \oplus L_2) = dim\ L_1 + dim\ L_2$. □

Глава 2

Линейные операторы в линейном пространстве

2.1 Пространство и алгебра линейных операторов

Пусть V и V' — два линейных пространства над одним и тем же основным полем k.

Определение 2.1.1. Линейным оператором из пространства V в пространство V' над одним и тем же полем k называется всякое отображение $f : V \to V'$, удовлетворяющее двум условиям:

1. $(\forall\ a, b \in V) \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$;

2. $(\forall\ \alpha \in k, a \in V) \quad f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

Видно, что понятие «линейный оператор» является обобщением понятия «изоморфизм». В случае изоморфизма, требовалось чтобы f было биекцией. Условие 1) означает, что f является гомоморфизмом $(V, +)$ на $(V', +)$. Условие 1) называется условием аддитивности, а условие 2) называется условием однородности.

Определение 2.1.2. Линейным оператором из пространства V в пространство V' над одним и тем же основным полем k называется всякое отображение $f : V \to V'$, удовлетворяющее условию линейности:

$$(\forall\ \alpha, \beta \in k,\ a, b \in V) \quad f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Обозначим через $L(V, V')$ множество всех линейных операторов из пространства V в пространство V'. На этом множестве рассмотрим две алгебраические операции: внутреннее сложение и внешнее умножение.

Определение 2.1.3. Пусть $f, g \in L(V, V')$ и $\alpha \in k$. Полагают, что $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ и $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)$.

Определение 2.1.3 корректно в том смысле, что $f + g$ и αf являются линейными операторами.

Действительно, $(\forall\ \alpha, \beta \in k,\ a, b \in V) \quad (f+g)(\alpha a+\beta b) = f(\alpha a+\beta b)+ + g(\alpha a+\beta b) = \alpha f(a)+\beta f(b)+\alpha g(a)+\beta g(b) = \alpha(f(a)+g(a))+\beta(f(b)+ + g(b)) = \alpha(f+g)(a) + \beta(f+g)(b)$. Следовательно $f + g \in L(V, V')$.

Еще проще доказывается, что $\alpha f \in L(V, V')$.

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Множество $L(V, V')$, рассмотренное вместе с определенными на нем внутренней алгебраической операцией сложения и внешней алгебраической операцией умножения, образует линейное пространство над полем k.*

Доказательство. Пусть $f, g, h \in L(V, V'), \alpha, \beta, 1 \in k$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что выполняются 7 аксиом линейного пространства, а именно

1. $f + g = g + f$;

2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;

3. $(\forall\ f, g)\,(\exists\ h) \quad g + h = f$;

4. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$;

5. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$;

6. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f) = \beta(\alpha f)$;

7. $1 \cdot f = f$.

Проверим некоторые из них.

1) Имеем $(\forall\ a \in V) \quad (f+g)(a) = f(a)+g(a) = g(a)+f(a) = (g+f)(a)$. Следовательно, $f + g = g + f$.

3) Имеем $f, g \in L(V, V')$. Рассмотрим отображение $h : V \to V'$, определенное следующим образом $(\forall\ a \in V) \quad h(a) = f(a) - g(a)$. Легко показать, что это отображение удовлетворяет условию линейности, следовательно, $h \in L(V, V')$. Подсчитаем $(\forall\ a \in V) \quad (g+h)(a) = g(a)+h(a) = g(a) + (f(a) - g(a)) = f(a)$. Следовательно, $g + h = f$. □

Пусть V, V', V'' — три линейных пространства над полем k, пусть $f \in L(V, V')$, $\varphi \in L(V', V'')$. Тогда можем рассматривать композицию линейных операторов $\varphi \circ f : V \to V''$, которая определяется следующим образом $(\varphi \circ f)(a) = \varphi(f(a))$. Эту композицию $\varphi \circ f$ будем обозначать φf.

Покажем, что φf есть линейный оператор из пространства V в V''.

Действительно, $\varphi f(\alpha a + \beta b) = \varphi(f(\alpha a + \beta b)) = \varphi(\alpha f(a) + \beta f(b)) = \alpha\varphi(f(a)) + \beta\varphi(f(b)) = \alpha(\varphi f)(a) + \beta(\varphi f)(b)$. Следовательно, $\varphi f \in L(V, V'')$.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Пусть* $f, g \in L(V, V')$, $\varphi, \psi \in L(V', V'')$, $h \in L(V'', V''')$, $\alpha \in k$. *Тогда справедливы следующие соотношения:*

1. $\varphi(f + g) = \varphi f + \varphi g$;

2. $(\varphi + \psi)f = \varphi f + \psi f$;

3. $h(\varphi f) = (h\varphi)f$;

4. $\alpha(\varphi f) = (\alpha\varphi)f = \varphi(\alpha f)$.

Пусть $f, g, \varphi, \psi, h \in L(V, V)$, то есть это линейные операторы из линейного пространства V в себя.

Определение 2.1.4. Линейный оператор из V в V называется эндоморфизмом.

На множестве $L(V, V)$ можно рассматривать третью алгебраическую операцию — внутреннее умножение. Если $f, \varphi \in L(V, V)$, то полагают $\varphi f = \varphi \circ f : V \to V$, $\varphi f \in L(V, V)$. Для этой операции умножения операторов справедливы соотношения 1)– 4) теоремы 2.1.2.

ТЕОРЕМА 2.1.3. *Множество $L(V, V)$, рассмотренное вместе с определенными на нем тремя алгебраическими операциями: внутренними сложением и умножением и внешним умножением, образует алгебру над полем k.*

Теорема 2.1.3 означает, что операции в множестве $L(V, V)$ удовлетворяют следующим 10 аксиомам:

1)–7) — аксиомы линейного пространства;

8) $f(g + h) = fg + fh$, $(f + g)h = fh + gh$;

9) $f(gh) = (fg)h$;

10) $\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$.

Как и всякая алгебра, алгебра линейных операторов есть соединение двух алгебраических структур: структуры линейного пространства (аксиомы 1)–7)) и структуры кольца (аксиомы 1)–3) и 8)–9)). Эти структуры связаны между собой свойством 10).

В дальнейшем, множество $L(V, V)$ будем обозначать $L(V)$.

Примеры:

1) Нулевой линейный оператор из $L(V)$. Он обозначается 0_V. Определяется следующим образом: $(\forall\ a \in V) \quad 0_V(a) = 0$. Ясно, что

$$(\forall\ f \in L(V)) \quad f + 0_V = f.$$

2) Тождественный линейный оператор из $L(V)$. Обозначается 1_V. Определяется следующим образом: $(\forall\ a \in V) \quad 1_V(a) = a$. Ясно, что

$$(\forall\ f \in L(V)) \quad 1_V \cdot f = f \cdot 1_V = f.$$

Это означает, что в алгебре $L(V)$ есть единица.

2.2 Матрица линейного оператора в конечномерном линейном пространстве

Здесь мы получим обозрение всех линейных операторов алгебры $L(V)$, где $dim\ V = n$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V. Пусть V' — другое линейное пространство над полем k и $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ — произвольная система векторов из V'. Тогда существует единственный линейный оператор $f \in L(V, V')$, переводящий базис пространства V в заданную систему векторов пространства V', то есть*

$$(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n) \quad f(e_i) = a'_i.$$

Доказательство. 1) Единственность.

Пусть существует линейный оператор $f \in L(V, V')$ такой, что $(\forall\ 1 \leqslant \leqslant i \leqslant n) \quad f(e_i) = a'_i$. Любой вектор $a \in V$ можно представить в виде $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Тогда

$$f(a) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a'_i.$$

Допустим, что существует другой линейный оператор $f_1 \in L(V, V')$, удовлетворяющий условию $(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n) \quad f_1(e_i) = a'_i$. Тогда

$$f_1(a) = f_1\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_1(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a'_i = f(a).$$

Следовательно $f_1 = f$.

2) Существование.

Пусть $a \in V$. Тогда $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Определим отображение $f : V \to V'$ следующим образом

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i'.$$

Покажем, что это отображение удовлетворяет условиям линейности. Действительно, пусть $b \in V$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Тогда

$$f(b) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i'.$$

$$f(a+b) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) a_i' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i' = f(a) + f(b).$$

Еще проще доказывается, что $f(\alpha a) = \alpha f(a)$, где $\alpha \in k$. Таким образом, отображение $f \in L(V, V')$. Наконец, $(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant 1) \quad f(e_i) = f(0 \cdot e_1 + \ldots + 1 \cdot e_i + \ldots + 0 \cdot e_n) = 0 \cdot a_i' + \ldots + 1 \cdot a_i' + \ldots + 0 \cdot a_n' = a_i'$. $\square$

Следствие 2.2.1.1. Линейный оператор из V в V' однозначно определяется образами базисных векторов пространства V.

Это вытекает из доказательства первой части теоремы 2.2.1.

Следствие 2.2.1.2. Множество линейных операторов из V в V' находится во взаимно однозначном соответствии с множеством упорядоченных систем из n-векторов пространства V.

Пусть V — линейное пространство над полем k, $dim\ V = n$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Пусть, далее, $f \in L(V)$, по следствию из теоремы 2.2.1, этот оператор единственным образом определяется образами базисных векторов $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \in V$. Разложим эти образы по базису пространства V, получим

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots + \alpha_{1n}e_n; \\ f(e_2) &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{2n}e_n; \\ &\ldots \\ f(e_n) &= \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Определение 2.2.1. Матрицей линейного оператора $f \in L(V)$ относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица, транспонированная к матрице, составленной из коэффициентов линейного выражения образов базисных векторов через этот базис.

$$A_{f|_{\widetilde{e}}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.2.2. Матрицей линейного оператора $f \in L(V)$ относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ относительно базиса $\widetilde{e}$, то есть

$$A_{f|_{\widetilde{e}}} = (\check{f}(e_1)|_{\widetilde{e}}, \check{f}(e_2)|_{\widetilde{e}}, \ldots, \check{f}(e_n)|_{\widetilde{e}}).$$

Определение 2.2.3. Если обозначить

$$\widetilde{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f(\widetilde{e}) = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \ldots \\ f(e_n) \end{pmatrix},$$

то матрицей линейного оператора f относительно базиса $\widetilde{e}$ называется матрица A_f, определяемая из равенства

$$f(\widetilde{e}) = A_f^T \widetilde{e}.$$

ТЕОРЕМА 2.2.2. *При фиксированном базисе $\widetilde{e}$ линейного пространства V, $dim\, V = n$, отображение $\sigma : L(V) \to M(n,k)$, сопоставляющее линейному оператору f его матрицу относительно базиса $\widetilde{e}$ $(f \to A_{f|\widetilde{e}})$, является изоморфизмом алгебры линейных операторов $L(V)$ на алгебру квадратных матриц n-го порядка $M(n,k)$.*

Доказательство. Путь $\widetilde{e}$ некоторый базис пространства V. Рассмотрим отображение $\sigma : L(V) \to M(n,k)$, $\sigma(f) = A_f$, где A_f — матрица линейного оператора f относительно базиса $\widetilde{e}$. Покажем, что это отображение является изоморфизмом.

1) *Инъективность σ.*

Пусть $\sigma(f) = \sigma(g)$, где $f, g \in L(V)$. Это означает, что $A_f = A_g \Rightarrow$ $\Rightarrow A_f^T = A_g^T \Rightarrow A_f^T\widetilde{e} = A_g^T\widetilde{e} \Rightarrow f(\widetilde{e}) = g(\widetilde{e})$. Мы получили, что образы базисных элементов пространства V совпадают. Тогда по следствию из теоремы 2.2.1 следует, что $f = g$.

2) *Сюръективность σ.*

Пусть $A \in M(n,k)$. Построим n векторов пространства V так, чтобы координатные столбцы этих векторов относительно базиса $\widetilde{e}$ совпадали со столбцами матрицы A. Тогда по теореме 2.2.1 существует линейный оператор $f \in L(V)$, переводящий базис $\widetilde{e}$ в построенные нами векторы. По построению будем иметь $f(\widetilde{e}) = A^T\widetilde{e}$. Отсюда видно, если сравнивать с определением 2.2.3, что $A^T = A_f^T$. Таким образом, $\sigma(f) = A_f = A$.

3) *Сохранение операций.*

Пусть $f, g \in L(V)$ и A_f, A_g — матрицы этих линейных операторов относительно базиса $\widetilde{e}$. Тогда $f(\widetilde{e}) = A_f^T\widetilde{e},\ g(\widetilde{e}) = A_g^T\widetilde{e}$.

Рассмотрим действие суммы линейных операторов $f + g$ на базисные векторы. С одной стороны, $(f+g)(\widetilde{e}) = A_{f+g}^T\widetilde{e}$.

С другой стороны, $(f+g)(\widetilde{e}) = f(\widetilde{e})+g(\widetilde{e}) = A_f^T\widetilde{e}+A_g^T\widetilde{e} = (A_f^T+A_g^T)\widetilde{e} =$ $= (A_f + A_g)^T\widetilde{e}$.

Отсюда, $A_{f+g}^T = (A_f + A_g)^T \Rightarrow A_{f+g} = A_f + A_g$. Таким образом, матрица суммы линейных операторов равна сумме матриц этих операторов. Следовательно

$$\sigma(f+g) = A_{f+g} = A_f + A_g = \sigma(f) + \sigma(g),$$

то есть отображение σ сохраняет внутреннее сложение.

Рассмотрим действие произведения линейных операторов fg на базисные векторы. С одной стороны, $(fg)(\widetilde{e}) = A^T_{fg}\widetilde{e}$.

С другой стороны, $(fg)(\widetilde{e}) = f(g(\widetilde{e})) = f(A^T_g\widetilde{e}) = A^T_g f(\widetilde{e}) = A^T_g(A^T_f\widetilde{e}) = (A^T_g A^T_f)\widetilde{e} = (A_f A_g)^T\widetilde{e}$.

Отсюда, $A^T_{fg} = (A_f A_g)^T \Rightarrow A_{fg} = A_f A_g$, то есть матрица произведения линейных операторов равна произведению матриц этих операторов. Следовательно

$$\sigma(fg) = A_{fg} = A_f A_g = \sigma(f)\sigma(g),$$

то есть отображение σ сохраняет внутреннее умножение.

Наконец, совсем просто доказывается, что $A_{\alpha f} = \alpha A_f \Rightarrow \sigma(\alpha f) = \alpha\sigma(f)$, где $\alpha \in k$. □

Предложение 2.2.1. *Координатный столбец образа вектора при действии линейным оператором равен координатному столбцу этого вектора, умноженному слева на матрицу этого линейного оператора, то есть*

$$\check{f(a)} = A_f\check{a}.$$

Доказательство. Действительно, вектор $a = \check{a}^T\widetilde{e}$. С одной стороны, $f(a) = \check{f(a)}^T\widetilde{e}$. С другой стороны, $f(a) = f(\check{a}^T\widetilde{e}) = \check{a}^T f(\widetilde{e}) = \check{a}^T(A^T_f\widetilde{e}) = (\check{a}^T A^T_f)\widetilde{e} = (A_f\check{a})^T\widetilde{e}$. Имеем, $\check{f(a)}^T = (A_f\check{a})^T \Rightarrow \check{f(a)} = A_f\check{a}$. □

Определение 2.2.4. Матрица B называется подобной матрице A ($B \sim A$) над полем k, если существует не особенная матрица Q с элементами из поля k такая, что

$$B = Q^{-1}AQ.$$

Иногда говорят, что матрица B получена трансформированием матрицы A с помощью матрицы Q, или матрица B преобразована из матрицы A с помощью матрицы Q.

Замечание 2.2.1. Если матрицы B и A подобны, то они должны быть квадратными одинаковой размерности.

Предложение 2.2.2. *Отношение подобия является отношением эквивалентности на множестве $M(n,k)$.*

Доказательство. 1) *Рефлексивность.*

Имеем $A = E^{-1}AE$, тогда $A \sim A$, роль матрицы Q играет единичная матрица.

2) *Симметричность.*

Пусть $B \sim A$. Это означает, что $(\exists\, Q,\ |Q| \neq 0)\quad B = Q^{-1}AQ \Rightarrow$ $\Rightarrow QBQ^{-1} = Q(Q^{-1}AQ)Q^{-1} \Rightarrow QBQ^{-1} = A \Rightarrow A = (Q^{-1})^{-1}BQ^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow A \sim B$, роль матрицы Q играет Q^{-1}.

3) *Транзитивность.*

Пусть $C \sim B$, $B \sim A$, тогда $(\exists\, R,\ |R| \neq 0)\quad C = R^{-1}BR$, и $(\exists\, Q,\ |Q| \neq 0)\quad B = Q^{-1}AQ$. Следовательно $C = R^{-1}(Q^{-1}AQ)R =$ $= (QR)^{-1}A(QR) \Rightarrow C \sim A$, роль матрицы Q играет QR. □

ТЕОРЕМА 2.2.3. *Матрицы одного и того же линейного оператора f в различных базисах подобны. При этом матрица $A_{f|\widetilde{u}}$ получается из матрицы $A_{f|\widetilde{e}}$ трансформированием при помощи матрицы перехода от базиса $\widetilde{e}$ к базису $\widetilde{u}$, то есть*

$$A_{f|\widetilde{u}} = Q^{-1}A_{f|\widetilde{e}}Q,$$

где Q — матрица перехода от $\widetilde{e}$ к $\widetilde{u}$.

Доказательство. Пусть $dim\ V = n$, $\widetilde{e}$ и $\widetilde{u}$ — два базиса пространства V, $f \in L(V)$, $A_{f|\widetilde{e}}$ и $A_{f|\widetilde{u}}$ — матрицы оператора f относительно $\widetilde{e}$ и $\widetilde{u}$

соответственно. Тогда

$$f(\widetilde{e}) = A^T_{f|_{\widetilde{e}}}\widetilde{e}, \quad f(\widetilde{u}) = A^T_{f|_{\widetilde{u}}}\widetilde{u}.$$

Пусть, наконец, Q — матрица перехода от $\widetilde{e}$ к $\widetilde{u}$, то есть $\widetilde{u} = Q^T\widetilde{e}$. С одной стороны, $f(\widetilde{u}) = f(Q^T\widetilde{e}) = Q^T f(\widetilde{e}) = Q^T(A^T_{f|_{\widetilde{e}}}\widetilde{e}) = (Q^T A^T_{f|_{\widetilde{e}}})\widetilde{e} = (A_{f|_{\widetilde{e}}}Q)^T\widetilde{e}$. С другой стороны, $f(\widetilde{u}) = A^T_{f|_{\widetilde{u}}}\widetilde{u} = A^T_{f|_{\widetilde{u}}}(Q^T\widetilde{e}) = (A^T_{f|_{\widetilde{u}}}Q^T)\widetilde{e} = (QA_{f|_{\widetilde{u}}})^T\widetilde{e}$. Таким образом, $(A_{f|_{\widetilde{e}}}Q)^T = (QA_{f|_{\widetilde{u}}})^T \Rightarrow QA_{f|_{\widetilde{u}}} = A_{f|_{\widetilde{e}}}Q \Rightarrow A_{f|_{\widetilde{u}}} = Q^{-1}A_{f|_{\widetilde{e}}}Q$. □

Следствие 2.2.3.1. Если A_f — матрица линейного оператора f относительно базиса $\widetilde{e}$ и $B \sim A_f$, то матрицу B можно рассматривать как матрицу линейного оператора f относительно некоторого другого базиса.

Доказательство. Действительно, так как $B \sim A_f$, то $(\exists\ Q,\ |Q| \neq 0)\quad B = Q^{-1}A_fQ$. Рассмотрим новый базис $\widetilde{u} = Q^T\widetilde{e}$. Так как Q — не особенная матрица, то $\widetilde{u}$ будет новым базисом. По теореме 2.2.3 имеем $A_{f|_{\widetilde{u}}} = Q^{-1}A_fQ = B$. □

2.3 Ранг и дефект линейного оператора

Пусть V и V' — два линейных пространства над полем k, пусть $f \in L(V, V')$.

Определение 2.3.1. Образом линейного оператора f ($Im\ f$) называется множество образов всех элементов пространства V. Ядром линейного оператора f ($Ker\ f$) называется множество тех векторов пространства V, которые при отображении f переводятся в ноль пространства V'.

Из этого определения видно, что

$$Im\ f = \{f(a)|\ a \in V\}, \qquad Ker\ f = \{a \in V|\ f(a) = 0\}.$$

Предложение 2.3.1. *Ядро и образ линейного оператора $f \in L(V, V')$ являются линейными подпространствами пространств V и V' соответственно.*

Доказательство. Действительно, $(\forall\ \alpha, \beta \in k, a, b \in Ker\ f)$ имеем

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha a + \beta b \in Ker\ f.$$

Это означает, что $Ker\ f$ является устойчивым подмножеством пространства V, следовательно, является его линейным подпространством.

Пусть $a', b' \in Imf$. Это означает, что $(\exists\ a, b \in V) \quad f(a) = a', f(b) = b'$. Тогда $(\forall\ \alpha, \beta \in k, a', b' \in Im\ f)$ имеем

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha f(a) + \beta f(b) = f(\alpha a + \beta b) \in Im\ f.$$

Отсюда $Im\ f$ является устойчивым подмножеством пространства V', следовательно, является его линейным подпространством. □

Предложение 2.3.2. *Если V — конечномерное линейное пространство и $f \in L(V, V')$, то ядро и образ линейного оператора f являются конечномерными линейными пространствами.*

Доказательство. В самом деле, так как V конечномерное линейное пространство, то и любое его подпространство, в частности $Ker\ f$, так же является конечномерным.

Перейдем к образу $Im\ f$. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Тогда $V = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \middle| \alpha_i \in k \right\}$. Тогда

$$Im\ f = f(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) \right\} = L(\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}).$$

Но линейная оболочка, порожденная конечным числом векторов, является конечномерной и при этом

$$dim\ L(\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}) = rang\, \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}\,.$$

Следовательно, $Im\ f$ является конечномерным линейным пространством. $\square$

Определение 2.3.2. Если V — конечномерное линейное пространство и $f \in L(V, V')$, то рангом линейного оператора f $r(f)$ называется размерность его образа, а дефектом линейного оператора f $d(f)$ называется размерность его ядра.

Из этого определения видно, что $r(f) = dim\ Im\ f$, а $d(f) = = dim\ Ker\ f$.

Следствие. $r(f) = r\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

Следствие. Если $f \in L(V)$, то ранг линейного оператора f равен рангу матрицы этого линейного оператора относительно любого базиса, то есть $r(f) = r(A_f)$.

Доказательство. Действительно, по предыдущему следствию имеем $r(f) = r\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. Рассмотрим стандартный изоморфизм $\sigma : V \to k^n$ относительно базиса $\widetilde{e}$. Тогда $(\forall\ a \in V)\quad \sigma(a) = \check{a}|_{\widetilde{e}}$. При изоморфизме ранг системы векторов не изменяется, поэтому

$$r\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = r\left\{\check{f}(e_1)|_{\widetilde{e}}, \ldots, \check{f}(e_n)|_{\widetilde{e}}\right\} = r\left\{A_{f|_{\widetilde{e}}}\right\}.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 2.3.1 (о ранге и дефекте линейного оператора). *Если V — конечномерное линейное пространство, $dim\ V = n$, $f \in L(V, V')$, то сумма ранга и дефекта линейного оператора f равна размерности пространства V, то есть $r(f) + d(f) = n$.*

Доказательство. Введем обозначение $d = d(f) = dim\ Ker\ f$. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_d$ — базис $Ker\ f$. Дополним этот базис до базиса пространства V, получим $e_1, e_2, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n$ — базис V. По следствию к предложению 2.3.2 имеем

$$r(f) = r\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_d), f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)\} = r\{f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)\}.$$

Покажем, что векторы $f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)$ являются линейно независимыми. Пусть

$$\alpha_{d+1} f(e_{d+1}) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = 0;$$

$$f(\alpha_{d+1} e_{d+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow \alpha_{d+1} e_{d+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in Ker\ f.$$

Разложим этот элемент по базису $Ker\ f$. Имеем

$$\alpha_{d+1} e_{d+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_d e_d;$$

$$-\beta_1 e_1 - \ldots - \beta_d e_d + \alpha_{d+1} e_{d+1} + \ldots + \alpha_n e_n = 0.$$

Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, то $\beta_1 = \ldots = \beta_d = \alpha_{d+1} = = \ldots = \alpha_n = 0$. Таким образом, векторы $f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)$ являются линейно независимыми. Тогда $r(f) = r\{f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)\} = n - d \Rightarrow \Rightarrow r(f) + d(f) = n - d + d = n$. □

2.4 Обратимость линейного оператора

Пусть V — линейное пространство над полем k. Рассмотрим алгебру $L(V)$. В этой алгебре есть единица, роль единицы выполняет тождественный оператор 1_V. Напомним, что $(\forall\ a \in V) \quad 1_V(a) = a$.

Определение 2.4.1. Линейный оператор $f \in L(V)$ называется обратимым, если он обратим как элемент мультипликативной полугруппы кольца $L(V)$, то есть $(\exists\ f^{-1} \in L(V)) \quad ff^{-1} = f^{-1}f = 1_V$.

ТЕОРЕМА 2.4.1 (критерий обратимости линейного оператора)**.** *Для того, чтобы линейный оператор $f \in L(V)$ был обратимым необходимо и достаточно, чтобы он как отображение был биективным. Другими словами, f — обратим тогда и только тогда, когда f — изоморфизм из V в V.*

Доказательство. 1) *Необходимость.*

Пусть $f \in L(V)$ является обратимым. По определению 2.4.1 $(\exists\ f^{-1} \in L(V))\quad ff^{-1} = f^{-1}f = 1_V$. Надо показать, что f является биекцией. Пусть $f(a) = f(b)$. Применим к этому равенству отображение f^{-1}, получим $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b)) \Rightarrow (f^{-1}f)(a) = (f^{-1}f)(b) \Rightarrow 1_V(a) = 1_V(b) \Rightarrow$ $\Rightarrow a = b$.

Пусть $b \in V$. Надо показать, что $(\exists\ a \in V)\quad f(a) = b$. Построим по данному вектору b вектор $a = f^{-1}(b)$. Тогда $f(a) = f(f^{-1}(b)) =$ $= (ff^{-1})(b) = 1_V(b) = b$, то есть f является биекцией.

2) *Достаточность.*

Пусть $a \in L(V)$ и f является биекцией. Тогда $(\exists\ f^{-1} : V \to V)$ $ff^{-1} = ff^{-1} = 1_V$. Это отображение f^{-1} также является биекцией. Надо показать, что $f^{-1} \in L(V)$, то есть f^{-1} удовлетворяет условиям линейности. Пусть $a', b' \in V'$, тогда $(\exists\ a, b \in V)\quad f(a) = a', f(b) = b'$. Отсюда $f^{-1}(a') = a,\ f^{-1}(b') = b$. Возьмем произвольные $\alpha, \beta \in k$, сосчитаем

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha a' + \beta b' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\alpha a' + \beta b') = \alpha a + \beta b = \alpha f^{-1}(a') + \beta f^{-1}(b').$$

Отображение f^{-1} удовлетворяет условиям линейности, следовательно $f^{-1} \in L(V)$. □

2.5 Характеристический многочлен матрицы и линейного оператора

Пусть k —основное поле и $k[\lambda]$ — кольцо многочленов от неизвестного λ.

Определение 2.5.1. λ-матрицей (многочленной матрицей) над полем k называется матрица, элементами которой являются элементы кольца $k[\lambda]$, то есть многочлены от λ с коэффициентами из поля k.

λ-матрицы можно складывать, умножать, умножать на скаляры по тем же правилам, что и скалярные матрицы. Пусть теперь $A = (\alpha_{ij}),\ \alpha_{ij} \in k,\ i, j = \overline{1, n}$. Такие матрицы будем называть скалярными.

Определение 2.5.2. Характеристической матрицей для квадратной скалярной матрицы A называется λ-матрица вида $\lambda E - A$, то есть

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & \lambda - \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.5.3. Характеристическим многочленом для скалярной матрицы A называется определитель, порожденный характеристической матрицей для матрицы A.

Характеристический многочлен матрицы A обозначается через $\chi_A(\lambda) = |\lambda E - A|$.

Определение 2.5.4. Следом квадратной скалярной матрицы A $(Tr(A))$ называется сумма элементов ее главной диагонали. Нормой матрицы A $(N(A))$ называется ее определитель.

Это определение означает, что

$$Tr(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}, \qquad N(A) = |A|.$$

Ясно, что $Tr(\alpha A + \beta B) = \alpha Tr(A) + \beta Tr(B)$; $N(AB) = N(A) \cdot N(B)$.

ТЕОРЕМА 2.5.1 (о строении характеристического многочлена). *Характеристический многочлен для скалярной матрицы A является нормированным многочленом от λ степени n, имеющим следующий вид:* $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - Tr(A)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n N(A)$.

Доказательство. Имеем,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \lambda-\alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & \lambda-\alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{(\lambda-\alpha_{11})(\lambda-\alpha_{22})\dots(\lambda-\alpha_{nn})}_{(*)} + \text{еще } (n!-1) \text{ слагаемых.}$$

В оставшихся $(n!-1)$ слагаемых отсутствует по крайней мере два элемента главной диагонали. Поэтому оставшиеся слагаемые могут дать степень у λ не выше, чем $n-2$. Слагаемые с λ^n и с λ^{n-1} получаются за счет произведения $(*)$. В произведение $(*)$ λ^n входит с коэффициентом 1. Коэффициент при λ^{n-1} равен $-\alpha_{11}-\alpha_{22}-\dots-\alpha_{nn} = -Tr(A)$. Получаем $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - Tr(A)\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, где $\alpha_0 = \chi_A(0) =$ $= |0\cdot E - A| = |-A| = (-1)^n|A| = (-1)^n N(A)$. $\square$

Определение 2.5.5. Характеристическими корнями (числами) матрицы A называются все n корней ее характеристического многочлена, лежащие, вообще говоря, в алгебраическом замыкании основного поля k.

Замечание 2.5.1. В самом основном поле k может вообще не быть характеристических корней, или их может быть меньше, чем n.

<u>Пример</u>: $k = \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1.$$

$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2+1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$. Видно, что $\lambda_1, \lambda_2 \notin$ $\notin \mathbb{R},\ \lambda_1,\lambda_2 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$. В дальнейшем характеристические корни матрицы A будем обозначать $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Следствие 2.5.1.1. Сумма характеристических корней матрицы A равно ее следу, а произведение характеристических корней равно ее норме.

Доказательство. Это вытекает из теоремы 2.5.1 и теоремы Виета. Действительно,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = -(-Tr(A)) = Tr(A),$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot N(A) = N(A).$$

□

Следствие 2.5.1.2. Квадратная матрица A не особенная тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа отличны от нуля.

Доказательство. В самом деле, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow N(A) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq$ $\neq 0 \Leftrightarrow (\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n) \quad \lambda_i \neq 0.$ □

Пусть V — конечномерное линейное пространство над k и $f \in L(V)$. Пусть $\tilde{e}$ — базис V и $A_{f|_{\tilde{e}}}$ — матрица f относительно базиса $\tilde{e}$. Так как эта матрица зависит от базиса, то понятие характеристической матрицы для линейного оператора не вводится.

Предложение 2.5.1. *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

Доказательство. Пусть $B \sim A$, то есть $(\exists\ Q,\ |Q| \neq 0) \quad B = Q^{-1}AQ$. Рассмотрим характеристический многочлен матрицы B. $\chi_B(\lambda) = |\lambda E -$ $- B| = |\lambda E - Q^{-1}AQ| = |Q^{-1}(\lambda E)Q - Q^{-1}AQ| = |Q^{-1}(\lambda E - A)Q| =$ $= |Q^{-1}||\lambda E - A||Q| = |\lambda E - A| = \chi_A(\lambda).$ □

Следствие. Следы и нормы подобных матриц равны.

Следствие. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, относительно которого строилась матрица оператора, а зависит только от самого линейного оператора.

Определение 2.5.6. Характеристическим многочленом линейного оператора называется характеристический многочлен матрицы этого линейного оператора относительно любого базиса.

Обозначим характеристический многочлен линейного оператора f через $\chi_f(\lambda)$. Тогда $\chi_f(\lambda) = \chi_{A_f}(\lambda)$.

Определение 2.5.7. Следом $Tr(f)$ и нормой $N(f)$ линейного оператора f называется след и норма матрицы этого линейного оператора относительно любого базиса.

Определение 2.5.8. Характеристическимим корнями линейного оператора называются все корни характеристического многочлена этого линейного оператора, лежащие, в общем случае, в алгебраическом замыкании основного поля.

2.6 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора и матрицы

Пусть V — линейное пространство над полем k, $f \in L(V)$. Пусть V' — линейное подпространство пространства V. В общем случае $f(V') \subset V$, но может быть так, что $f(V') \subset V'$.

Определение 2.6.1. Подпространство V' линейного пространства V называется инвариантным относительно линейного оператора $f \in L(V)$, если $f(V') \subset V'$, то есть любой вектор из подпространства V' переходит в вектор того же подпространства.

Займемся изучением одномерных инвариантных подпространств. Пусть V' — одномерное инвариантное подпространство. Возьмем любой вектор $a \in V'$, $a \neq 0$. Так как $dim\ V' = 1$, то вектор a можно взять в качестве базиса V' и тогда $V' = \{\alpha a | \alpha \in k\}$. $f(a)$ будет принадлежать V', так как V' инвариантно. Тогда $f(a) = \alpha a,\ a \neq 0,\ \alpha \in k$.

Обратно, пусть V' — одномерное подпространство и $a \neq 0$, $a \in V'$, $f(a) = \alpha a$, где $\alpha \in k$. Так как V' — одномерное подпространство, то a можно взять в качестве базиса V'. Поэтому $V' = \{\beta a | \beta \in k\}$. Сосчитаем $f(\beta a) = \beta f(a) = \beta(\alpha a) = (\beta\alpha)a \in V'$. Таким образом $f(V') \subset V'$, то есть V' — инвариантное подпространство. Таким образом изучение одномерных инвариантных подпространств приводит нас к изучению ненулевых векторов $a \in V'$, для которых $f(a) = \alpha a$, где $\alpha \in k$.

Определение 2.6.2. Скаляр α называется собственным значением линейного оператора $f \in L(V)$, если существует ненулевой вектор $a \in V$ такой, что $f(a) = \alpha a$. В этом случае вектор a называется собственным вектором линейного оператора f, принадлежащим скаляру α.

В этом случае говорят, что α и a есть принадлежащие друг другу собственное значение и собственный вектор линейного оператора f.

Определение 2.6.3. Говорят, что скаляр α и ненулевой столбец $X \neq 0$ из k^n есть принадлежащие друг другу собственное значение и собственный вектор матрицы $A \in M(n, k)$, если $AX = \alpha X$.

Предложение 2.6.1. *Для того, чтобы скаляр α и вектор $a \in V$ были принадлежащими друг другу собственным значением и собственным вектором линейного оператора f конечномерного линейного пространства V необходимо и достаточно, чтобы α и координатный столбец $\check{a}$ относительно некоторого базиса были принадлежащими друг другу собственным значением и собственным вектором матрицы A_f этого линейного оператора относительно того же базиса.*

Доказательство. Действительно, пусть $f(a) = \alpha a$, где $a \neq 0$ и $\alpha \in k$, тогда $f(a) = \alpha a \Leftrightarrow \widecheck{f(a)} = \alpha\check{a} \Leftrightarrow A_f\check{a} = \alpha\check{a}$. Причем $\check{a} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$. □

ТЕОРЕМА 2.6.1 (критерий собственного значения)**.** *Для того, чтобы скаляр α был собственным значением матрицы A (линейного оператора конечномерного пространства) необходимо и достаточно, чтобы α*

был характеристическим корнем матрицы A (линейного оператора), лежащим в основном поле.

Доказательство. 1) *Необходимость.*

Пусть α является собственным значением матрицы A, это означает, что

$$AX = \alpha X, \tag{2.2}$$

где $X \neq 0$ и $X \in k^n$. Перепишем равенство (2.2):

$$\alpha EX - AX = 0,$$

$$(\alpha E - A)X = 0. \tag{2.3}$$

На равенство (2.3) можно смотреть как на однородную систему n-линейных уравнений с n неизвестными. Эта система записана в матричном виде. Видно, что ненулевым решением этой системы является столбец $X \in k^n$, $X \neq 0$. Тогда по следствию из критерия наличия ненулевого решения ОСЛУ следует, что определитель системы (2.3) должен быть равен нулю, то есть $|\alpha E - A| = 0$. Таким образом $\chi_A(\alpha) = 0$, следовательно α является характеристическим корнем матрицы A и $\alpha \in k$.
2) *Достаточность.*

Пусть $\alpha \in k$ и α является характеристическим корнем матрицы A. Тогда $\chi_A(\alpha) = 0$, это означает, что $|\alpha E - A| = 0$. Рассмотрим однородную систему n-линейных уравнений с n неизвестными (2.3)

$$(\alpha E - \alpha)X = 0,$$

где X — столбец неизвестных. По следствию из критерия наличия ненулевого решения ОСЛУ следует, что эта система (2.3) имеет ненулевое решение $X \neq 0$. Это ненулевое решение $X \in k^n$, так как элементы матрицы $(\alpha E - A)$ принадлежат полю k. Подставив это ненулевое решение в систему (2.3) получим тождество. Будем иметь $\alpha EX - AX = 0$, то есть $AX = \alpha X$, где $X \neq 0$ и $X \in k^n$. По определению 2.6.2 видно, что α является собственным значением матрицы A. $\square$

Следствие 2.6.1.1. Если основное поле k алгебраически замкнуто, то все собственные значения матрицы A совпадают с ее характеристическими корнями.

Предложение 2.6.2. *Все собственные векторы линейного оператора (матрицы), принадлежащие собственному значению α вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство пространства V (координатного пространства k^n).*

Доказательство. Действительно, пусть α — собственное значение линейного оператора $f \in L(V)$. Множество всех собственных векторов оператора f, принадлежащих собственному значению α вместе с ненулевым вектором, совпадает с множеством всех решений уравнения $f(a) = \alpha a$. Обозначим множество решений этого уравнения через

$$V_\alpha = \{a \in V \,|\, f(a) = \alpha a\}.$$

Надо показать, что V_α — устойчивое подмножество пространства V. Это означает, что

$$(\forall\ \beta, \gamma \in k,\ a, b \in V_\alpha) \quad \beta a + \gamma b \in V_\alpha.$$

Подсчитаем $f(\beta a + \gamma b) = \beta f(a) + \gamma f(b) = \beta(\alpha a) + \gamma(\alpha b) = \alpha(\beta a + \gamma b)$. Следовательно $\beta a + \gamma b$ является решением уравнения $f(a) = \alpha a$, то есть $\beta a + \gamma b \in V_\alpha$. Таким образом V_α является устойчивым подмножеством пространства V, а следовательно, его линейным подпространством. □

Определение 2.6.4. Если α — собственное значение линейного оператора $f \in L(V)$, то V_α называется собственным подпространством оператора f, принадлежащим скаляру α.

ТЕОРЕМА 2.6.2 (о собственных векторах, принадлежащих различным собственным значениям). *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ попарно различные собственные значения линейного оператора $f \in L(V)$ и в каждом собственном подпространстве V_{α_i} выбрана линейно независимая система* *векторов* $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}$. *Тогда объединение всех этих линейно независимых систем векторов* $\left\{a_j^{(i)}\right\}$, *где* $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s}$, *является линейно независимой системой векторов.*

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции по s.

Если $s = 1$, то из собственного подпространства V_{α_1} выбрана система векторов: $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)}$, которая является линейно не зависимой по условию.

Предположим, что теорема верна для $s - 1$ попарно различных собственных значений. Докажем справедливость теоремы для s попарно различных собственных значений.

Имеем систему векторов $\left\{a_j^{(i)}\right\}$, где $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s}$. Надо показать ее линейную независимость. Пусть

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}a_j^{(i)} = 0. \tag{2.4}$$

Подействуем на равенство (2.4) оператором f. Получим

$$f\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}a_j^{(i)}\right) = f(0);$$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}f(a_j^{(i)}) = 0,$$

но $f(a_j^{(i)}) = \alpha_i a_j^{(i)}$, то есть

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}\alpha_i a_j^{(i)} = 0. \tag{2.5}$$

Умножим равенство (2.4) на α_s и вычтем из него равенство (2.5). Получим

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}(\alpha_s - \alpha_i)a_j^{(i)} = 0.$$

Если $i = s$, то $\alpha_s - \alpha_i = 0$ и поэтому

$$\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}(\alpha_s-\alpha_i)a_j^{(i)} = 0.$$

Но по предположению индукции система $\left\{a_j^{(i)}\right\}$, где $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s-1}$ является линейно независимой. Поэтому из последнего равенства следует, что $\gamma_{ij}(\alpha_s - \alpha_i) = 0$, $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s-1}$. Но $\alpha_s - \alpha_i \neq 0$, следовательно

$$\gamma_{ij} = 0,\ j = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, s-1}. \tag{2.6}$$

Подставим равенство (2.6) в равенство (2.4). Получим

$$\sum_{j=1}^{n_s}\gamma_{sj}a_j^{(s)} = 0.$$

Но система векторов $a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \ldots, a_{n_s}^{(s)}$, которые принадлежат V_{α_s}, взята линейно независимой по условию, тогда из последнего равенства следует, что

$$\gamma_{sj} = 0,\ j = \overline{1, n_s}. \tag{2.7}$$

Объединение равенств (2.6) и (2.5) означает, что $\gamma_{ij} = 0$ при $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s}$. Следовательно система векторов $\left\{a_j^i\right\}$, $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s}$ является линейно независимой. □

Следствие. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ попарно различные собственные значения линейного оператора $f \in L(V)$ и $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — собственные векторы оператора f, принадлежащие соответственно, этим собственным значениям. Тогда система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ является линейно независимой.

Доказательство. Это есть частный случай теоремы 2.6.2, когда из каждого собственного подпространства выбирается по одному ненулевому вектору ($n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 1$ и $a_1^{(i)} = a_i$). □

Определение 2.6.5. Линейный оператор $f \in L(V)$ называется диагонализируемым, если в пространстве V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора f, то есть существует $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис V такой, что $(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n) \quad f(a_i) = \alpha_i a_i$.

Ясно, что

$$A_{f|\tilde{a}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Определение 2.6.6. Линейный оператор $f \in L(V)$ называется диагонализируемым, если в пространстве V существует базис, относительно которого матрица этого линейного оператора f имеет диагональный вид. Этот базис называется диагонализирующим.

Предложение 2.6.3 (первый критерий диагонализируемости)**.** *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — все попарно различные собственные значения линейного оператора $f \in L(V)$, то оператор f является диагонализируемым тогда и только тогда, когда*

$$dim\ V_{\alpha_1} + dim\ V_{\alpha_2} + \ldots + dim\ V_{\alpha_s} = dim\ V.$$

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть сумма размерностей

$$\sum_{i=1}^{s} dim\ V_{\alpha_i} = dim\ V.$$

Обозначим $dim\ V_{\alpha_i} = n_i$, тогда по теореме 2.6.2 можно построить линейно независимую систему собственных векторов оператора f $\left\{a_j^{(i)}\right\}$, где $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, s}$. Количество этих собственных векторов оператора f равно $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$. По условию

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = \sum_{i=1}^{s} dim\ V_{\alpha_i} = dim\ V.$$

Тогда векторы $\left\{a_j^{(i)}\right\}$ можно взять в качестве базиса пространства V, а тогда (по определению 2.6.5) оператор f является диагонализируемым.

2) *Необходимость.* Пусть линейный оператор $f \in L(V)$ является диагонализируемым, по определению 2.6.5 это означает, что существует базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства V, состоящий из собственных векторов оператора f, то есть $(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n) \quad f(a_i) = \alpha_i a_i$. Пусть среди $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ попарно различными будут $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $s \leqslant n$. Пусть собственному значению α_i, $(1 \leqslant i \leqslant s)$ принадлежат собственные векторы $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}$ из базиса $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В этом случае $dim\ V_{\alpha_i} = n_i$. Заметим, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$, то есть $dim\, V_{\alpha_1} + dim\, V_{\alpha_2} + \ldots + dim\, V_{\alpha_s} = dim\, V$. $\square$

Предложение 2.6.4 (второй критерий диагонализируемости). *Линейный оператор $f \in L(V)$ является диагонализируемым тогда и только тогда, когда матрица этого оператора A_f относительно какого-либо базиса, преобразованием подобия может быть приведена к диагональному виду.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть f — диагонализируемый линейный оператор и $A_{f|\tilde{e}}$ — его матрица в базисе $\tilde{e}$. По определению 2.6.6 существует базис $\tilde{a}$ пространства V, относительно которого матрица $A_{f|\tilde{a}}$ имеет диагональный вид. Известно, что $A_{f|\tilde{a}} = Q^{-1} A_{f|\tilde{e}} Q$, где Q — матрица перехода от базиса $\tilde{e}$ к $\tilde{a}$. Это равенство указывает на то, что матрица $A_{f|\tilde{e}}$ подобна диагональной матрице $A_{f|\tilde{e}}$.

2) *Достаточность.* Пусть $f \in L(V)$ и $A_{f|\tilde{e}}$ преобразованием подобия приводится к диагональному виду. Это означает, что существует такая не особенная матрица Q такая, что

$$Q^{-1} A_{f|\tilde{e}} Q = A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

По следствию к теореме 2.2.3 матрицу A можно рассматривать как матрицу линейного оператора f относительно базиса $\tilde{a} = Q^T \cdot \tilde{e}$. Таким образом видно, что в пространстве V существует базис $\tilde{a}$, относительно которого матрица $A_{f|\tilde{a}} = A$ имеет диагональный вид. Тогда по определению 2.6.6 оператор f является диагонализируемым. $\square$

Глава 3

Евклидовы (унитарные) пространства

В этой главе в качестве основного поля k будет выступать поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В этом случае скаляр $\alpha \in k$ является действительным или комплексным числом. Как всегда через $\overline{\alpha}$ будем обозначать комплексно сопряженное число для α. Напомним, что если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha = \overline{\alpha}$.

3.1 Основные понятия

Определение 3.1.1. Действительным (комплексным) пространством называется линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел.

Определение 3.1.2. Говорят, что в действительном (комплексном) пространстве задано скалярное умножение, если каждой упорядоченной паре векторов $a, b \in V$ поставлено в соответствие число основного поля k, обозначаемое (a, b) и называемое скалярным произведением векторов a и b, для которого выполняются следующие четыре аксиомы:

1. $(b, a) = \overline{(a, b)}$;

2. $(a + a', b) = (a, b) + (a', b)$;

3. $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$;

4. если $a \neq 0$, то $(a, a) > 0$.

Замечание 3.1.1. Если $k = \mathbb{R}$, то $(b, a) = (a, b)$, то есть скалярное умножение коммутативно.

Замечание 3.1.2. Аксиомы 2 и 3 означают аддитивность и однородность, то есть линейность скалярного умножения относительно первого сомножителя.

Свойства скалярного умножения

1. $(\alpha a + \alpha' a', b) = \alpha(a, b) + \alpha'(a', b')$.

2. $(a, b + b') = (a, b) + (a, b')$ (аддитивность относительно второго сомножителя).

3. $(a, \beta b) = \overline{\beta}(a, b)$.

4. $\left(\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i a_i, \sum\limits_{j=1}^{t} \beta_j b_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{t} \alpha_i \overline{\beta_j}(a_i, b_j)$.

5. $(a, 0) = (0, a) = 0$.

6. $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Доказательство. 1) Это свойство следует сразу же из аксиом 2 и 3 скалярного умножения.

2) $(a, b+b') = \overline{(b + b', a)} = \overline{(b, a) + (b', a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(b', a)} = (a, b) + (a, b')$.

3) Имеем $(a, \beta b) = \overline{(\beta b, a)} = \overline{\beta(b, a)} = \overline{\beta} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{\beta}(a, b)$.

4) Это свойство является объединением аксиом 2 и 3 и свойств 2 и 3 скалярного умножения.

5) Действительно, $(a, 0) = (a, 0b) = \overline{0}(a, b) = 0(a, b) = 0$. $(0, a) = \overline{(a, 0)} = \overline{0} = 0$.

6) a) *Необходимость.* Если бы $a \neq 0$, то по аксиоме $(a, a) > 0$, а это противоречит тому, что дано.

b) *Достаточность.* Если $a = 0$, то $(a, a) = (0, 0) = 0$. □

Замечание 3.1.3. Если $k = \mathbb{R}$, то свойства 2 и 3 означают линейность скалярного умножения относительно второго сомножителя.

Скалярное произведение (a, a) называется скалярным квадратом вектора a.

Определение 3.1.3. Действительное (комплексное) пространство, рассмотренное вместе с определенным на нем скалярным умножением, называется евклидовым (унитарным) пространством.

Пример.

Рассмотрим в качестве $V = k^n$ ($\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$). Элементы пространства V будем записывать столбцами.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Упорядоченной паре $X, Y \in V$ поставим в соответствие число

$$(X, Y) = X^T\overline{Y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \times \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \dots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_j.$$

Легко показать, что это число (X, Y) удовлетворяет всем четырем аксиомам скалярного умножения. Это скалярное умножение называется стандартным. В дальнейшем оно будет обозначаться $\langle X, Y \rangle$. Ясно, что

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 .$$

Определение 3.1.4. Действительным (комплексным) арифметическим пространством называется действительное (комплексное) координатное линейное пространство, рассматриваемое вместе с определенным на нем стандартным скалярным умножением.

3.2 Длина вектора

Определение 3.2.1. Длиной вектора a евклидова (унитарного) пространства называется число $||a|| = \sqrt{(a,a)}$, то есть арифметическое значение квадратного корня из скалярного квадрата этого вектора a.

Определение 3.2.2. Вектор e евклидова (унитарного) пространство называется единичным или ортом, если его длина равна 1. Деление ненулевого вектора на его длину называется нормированием вектора.

Свойства длины вектора

1. $||a|| \geqslant 0$, причем $||a|| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.
2. $||\alpha a|| = |\alpha|\, ||a||$.
3. Если $a \neq 0$, то вектор $\dfrac{a}{||a||}$ является единичным.

Доказательство. 1) Если $a \neq 0$, то $||a|| = \sqrt{(a,a)} > 0$. Пусть $||a|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(a,a)} = 0 \Leftrightarrow (a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

2) $||\alpha a|| = \sqrt{(\alpha a, \alpha a)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(a,a)} = |\alpha|\,\sqrt{(a,a)} = |\alpha|\,||a||$. В частности, при $\alpha = -1$, имеем $||-a|| = ||a||$.

3) По свойству 2 длины вектора

$$\left|\left|\frac{a}{||a||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||a||}\right| \cdot ||a|| = \frac{1}{||a||} \cdot ||a|| = 1.$$

□

ТЕОРЕМА 3.2.1 (Коши-Буняковского)**.** *Для любых двух векторов a и b евклидова (унитарного) пространства справедливо неравенство*

$$|(a,b)| \leqslant ||a|| \cdot ||b||,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. 1) Рассмотрим ситуацию, когда векторы a и b не являются пропорциональными. В этом случае вектор $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Если бы, например, $a = 0$, то мы имели бы $a = 0 \cdot b$, а это означало, бы пропорциональность векторов a и b.

Рассмотрим вектор
$$\frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot b.$$
Так как векторы a и b не пропорциональны, то
$$a \neq \frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot b,$$
то есть
$$a - \frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot b \neq 0.$$
Применим аксиому 4 скалярного умножения
$$\left(a - \frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot b, a - \frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot b\right) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a,a) - \frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot (b,a) - \frac{\overline{(a,b)}}{||b||^2} \cdot (a,b) + \frac{(a,b)}{||b||^2} \cdot \frac{\overline{(a,b)}}{||b||^2} \cdot (b,b) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ||a||^2 - \frac{(a,b) \cdot \overline{(a,b)}}{||b||^2} - \frac{\overline{(a,b)} \cdot (a,b)}{||b||^2} + \frac{(a,b) \cdot \overline{(a,b)}}{||b||^4} \cdot ||b||^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ||a||^2 - \frac{|(a,b)|^2}{||b||^2} > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ||a||^2 \cdot ||b||^2 > |(a,b)|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ||a|| \cdot ||b|| > |(a,b)|.$$

2) Рассмотрим ситуацию, когда векторы a и b являются пропорциональными. Имеем $b = \alpha \cdot a$, тогда
$$(a,b) = (a, \alpha \cdot a) = \overline{\alpha} \cdot (a,a) = \overline{\alpha} \cdot ||a||^2,$$
то есть
$$|(a,b)| = \left|\overline{\alpha} \cdot ||a||^2\right| = |\overline{\alpha}| \cdot ||a||^2 = |\alpha| \cdot ||a||^2.$$

С другой стороны

$$||a|| \cdot ||b|| = ||a|| \cdot ||\alpha \cdot a|| = ||a|| \cdot |\alpha| \cdot ||a|| = |\alpha| \cdot ||a||^2.$$

Следовательно, $||a|| \cdot ||b|| = |(a, b)|$.

Обратно, пусть $|(a, b)| = ||a|| \cdot ||b||$, тогда векторы a и b должны быть пропорциональными. Если бы векторы a и b не были пропорциональны, то по части первой доказательства имели бы, что $|(a, b)| < ||a|| \cdot ||b||$, а это противоречит тому, что дано. □

ТЕОРЕМА 3.2.2 (неравенство треугольника). *Для любых двух векторов a и b евклидова (унитарного) пространства справедливы неравенства:*

1. $||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b||$;
2. $||a - b|| \geqslant \big| ||a|| - ||b|| \big|$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $z = a + bi$, то $Re\, z = a \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

1) $||a + b||^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + (b, a) + (a, b) + (b, b) = ||a||^2 + \left(\overline{a, b}\right) + (a, b) + ||b||^2 = ||a||^2 + 2Re\,(a, b) + ||b||^2 \leqslant ||a||^2 + 2||a|| \cdot ||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$. Извлечем корень, получим $||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b||$.

2) Имеем $||a|| = ||\,(a - b) + b|| \leqslant ||a - b|| + ||b||$. То есть $||a - b|| \geqslant ||a|| - ||b||$. Но $||a - b|| = ||b - a|| \geqslant ||b|| - ||a||$. Следовательно, $||a - b|| \geqslant \big| ||a|| - ||b|| \big|$. □

Пример. Рассмотрим $V = \mathbb{C}^n$ — комплексное арифметическое пространство. $\langle X, Y\rangle = X^T\overline{Y}$. Из неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i\right| \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\right) \cdot \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}\right).$$

Из неравенства треугольника

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}.$$

3.3 Ортогонализация

Определение 3.3.1. Два вектора a и b евклидова (унитарного) пространства называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(a, b) = 0$.

Определение 3.3.2. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ евклидова (унитарного) пространства называется ортогональной, если векторы этой системы попарно ортогональны, то есть $(\forall\ 1 \leqslant i, j \leqslant s,\ i \neq j) \quad (a_i, a_j) = 0$.

Определение 3.3.3. Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_s$ евклидова (унитарного) пространства называется ортонормированной, если эта система ортогональна и все векторы этой системы являются единичными.

Предложение 3.3.1. *Всякая ортогональная система ненулевых векторов евклидова (унитарного) пространства является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — ортогональная система ненулевых векторов. Пусть

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j a_j = 0.$$

Возьмем любое $1 \leqslant i \leqslant s$ и умножим это равенство скалярно на a_i, получим

$$\left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j a_j, a_i\right) = (0, a_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \cdot (a_j, a_i) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i \cdot ||a_i||^2 = 0.$$

Так как $||a_i|| \neq 0$, то получаем, что $(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant s) \quad \alpha_i = 0$, следовательно система $a_1, a_2, \ldots, a_s$ линейно независима. $\square$

ТЕОРЕМА 3.3.1 (об ортогонализации). *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — линейно независимая система векторов евклидова (унитарного) пространства. Тогда существует ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots, e_s$ такая, что для любого $1 \leqslant k \leqslant s$ подпространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$, совпадает с подпространством, натянутым на векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

Доказательство. Применим метод математической индукции по k. Если $k = 1$, то в качестве вектора e_1 будет вектор $\dfrac{a_1}{||a_1||}$, $a_1 \neq 0$, то есть $||e_1|| = 1$. Так как векторы e_1 и a_1 пропорциональны, то $L(e_1) = L(a_1)$. Предположим, что удалось построить систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1. $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ортонормирована,

2. $(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant k) \quad L(\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}) = L(\{a_1, a_2, \ldots, a_i\})$.

Покажем, что можно построить систему из $k+1$ векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}$, удовлетворяющую условиям 1 и 2. Рассмотрим вектор

$$e'_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j + a_{k+1}, \qquad (3.1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ пока неопределенные числа. Выберем эти числа так, чтобы

$$(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant k) \quad (e'_{k+1}, e_i) = 0.$$

Итак, скалярное произведение

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j + a_{k+1},\ e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (e_j, e_i) + (a_{k+1}, e_i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i + (a_{k+1}, e_i) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = -(a_{k+1}, e_i).$$

Получили ортогональную систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k, e'_{k+1}$.

Покажем, что вектор $e'_{k+1} \neq 0$. Из равенства (3.1) видно, что вектор e'_{k+1} линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}$. По предположению индукции векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно выражаются через $a_1, a_2, \ldots, a_k$. По транзитивности вектор e'_{k+1} линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, причем коэффициент при a_{k+1} равен единице. Тогда, так как система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ линейно независима (как часть линейно независимой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$), то $e'_{k+1} \neq 0$.

Нормируем вектор e'_{k+1}, получим

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{||e'_{k+1}||} \tag{3.2}$$

После этого, система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$ является ортонормированной, то есть она удовлетворяет условию 1.

Покажем, что она удовлетворяет и условию 2. Условие 2 выполняется для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ по предположению индукции. Остается показать, что $L(\{e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}\}) = L(\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\})$. Чтобы в этом убедиться, надо показать, что вектор e_{k+1} линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ и обратно, вектор a_{k+1} линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$. Из равенства (3.2) видно, что вектор e_{k+1} линейно выражается через вектор e'_{k+1}, а вектор e'_{k+1} (как было уже доказано) линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. По транзитивности, e_{k+1} линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$.

Из равенства (3.1) видно, что вектор a_{k+1} линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_k, e'_{k+1}$, а вектор e'_{k+1}, как видно из равенства (3.2), линейно выражается через e_{k+1}. По транзитивности, a_{k+1} линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$. $\square$

Замечание 3.3.1. Можно из линейно независимой системы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ построить ортогональную систему $e'_1, e'_2, \ldots, e'_s$ с тем же самым условием

$$(\forall\ 1 \leqslant k \leqslant s) \quad L(\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\}) = L(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}).$$

В этом случае отпадает необходимость нормирования векторов e'_i.

Замечание 3.3.2. Если в линейно независимой системе $a_1, a_2, \ldots, a_s$ первые k векторов ортонормированны, то процесс ортогонализации нужно начинать с вектора a_{k+1} .

Следствие 3.3.1.1. В евклидовом (унитарном) пространстве существуют ортонормированные базисы.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любой базис евклидова (унитарного) пространства V. Применим процесс ортогонализации к этому базису. Получим ортонормированную систему $e_1, e_2, \ldots, e_n$, которую можно взять в качестве базиса евклидова (унитарного) пространства V. □

Следствие 3.3.1.2. Любую ортогональную (ортонормированную) систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ евклидова (унитарного) пространства V можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса пространства V.

Доказательство. В самом деле, систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ можно дополнить до базиса пространства V, а именно $e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ — базис V (так как $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно независимы). Достаточно теперь применить процесс ортогонализации, начиная с вектора a_{k+1}, при этом для получения ортонормированного базиса необходимо нормировать получившиеся векторы. □

ТЕОРЕМА 3.3.2 (критерий ортонормированности базиса)**.** *Для того, чтобы базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова (унитарного) пространства был ортонормированным, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение любых двух векторов этого пространства равнялось стандартному скалярному произведению координатных столбцов этих векторов относительно базиса $\tilde{e}$ в соответствующем арифметическом пространстве, то есть* $(a, b) = \langle \check{a}|_{\tilde{e}}, \check{b}|_{\tilde{e}} \rangle$.

Доказательство. Пусть V — евклидово (унитарное) пространство, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ его базис. $a, b \in V$, тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \qquad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_i e_i,$$

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j \left(e_i, e_j \right).$$

1) *Необходимость.* Пусть базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ является ортонормированным, тогда $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ и

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \times \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \overline{\beta}_2 \\ \ldots \\ \overline{\beta}_n \end{pmatrix} = \check{a}^T|_{\tilde{e}} \cdot \overline{\check{b}|_{\tilde{e}}} = \left\langle \check{a}|_{\tilde{e}}, \check{b}|_{\tilde{e}} \right\rangle.$$

2) *Достаточность.* Пусть $(a, b) = \left\langle \check{a}|_{\tilde{e}}, \check{b}|_{\tilde{e}} \right\rangle$. Подсчитаем

$$(e_i, e_j) = \langle \check{e}_i|_{\tilde{e}}, \check{e}_j|_{\tilde{e}} \rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} (i), \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} (j) \right\rangle = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \overline{1} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} = \delta_{ij}.$$

Следовательно, базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ является ортонормированным. □

Предложение 3.3.2. *Любое конечномерное действительное (комплексное) пространство можно снабдить скалярным умножением, превратив его в конечномерное евклидово (унитарное) пространство, причем так, что заданный базис пространства становится ортонормированным.*

Доказательство. Пусть V — n-мерное действительное (комплексное) пространство и $a_1, a_2, \dots, a_n$ — его базис. Определим в этом пространстве скалярное умножение, положив $(\forall\ a, b \in V) \quad (a, b) = \left\langle \check{a}|_{\tilde{e}}, \check{b}|_{\tilde{e}} \right\rangle$. После этого пространство V становится Евклидовым (унитарным). Покажем, что базис $a_1, a_2, \dots, a_n$ становится ортонормированным.

$$(a_i, a_j) = \langle \check{a}_i|_{\tilde{e}}, \check{a}_j|_{\tilde{e}} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} (i), \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} (j) \right\rangle = \delta_{ij}.$$

□

3.4 Изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств

Определение 3.4.1. Отображение $f : V \to V'$ двух евклидовых (унитарных) пространств, называется изоморфизмом, если оно удовлетворяет следующим двум требованиям

1. f является изоморфизмом линейных пространств $V \to V'$,
2. f сохраняет скалярное умножение, то есть

$$(\forall\ a, b \in V) \quad (f(a), f(b)) = (a, b)\,.$$

Определение 3.4.2. Два евклидовых (унитарных) пространства V, V' называются изоморфными ($V \cong V'$), если существует хотя бы один изоморфизм $f : V \to V'$.

Следствие 3.4.0.1. При изоморфизме евклидовых (унитарных) пространств ортогональная (ортонормированная) система векторов переходит в ортогональную (ортонормированную) систему векторов. При изоморфизме сохраняется длина вектора, то есть $||f(a)|| = ||a||$.

Следствие 3.4.0.2. Отношение изоморфизма евклидовых (унитарных) пространств является отношением эквивалентности на множестве евклидовых (унитарных) пространств.

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Справедливы следующие два утверждения:*

1. *Всякое n-мерное евклидово (унитарное) пространство изоморфно n-мерному действительному (комплексному) арифметическому пространству, при этом изоморфизм задается сопоставлением вектору его координатного столбца относительно ортонормированного базиса;*

2. *Два конечномерных евклидовых (унитарных) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство. 1) Пусть V — евклидово (унитарное) пространство, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — его ортонормированный базис. Рассмотрим стандартное отображение $f : V \to k^n$, ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $(\forall\ a \in V) \quad f(a) = \check{a}|_{\widetilde{e}}$. Мы уже видели в теореме 1.3.2, что это отображение f является изоморфизмом линейных пространств V и k^n.

Далее, так как $\widetilde{e}$ — ортонормированный базис, то скалярное произведение $(a, b) = \left\langle \check{a}|_{\tilde{e}}, \check{b}|_{\tilde{e}} \right\rangle = \langle f(a), f(b) \rangle$, то есть отображение f сохраняет скалярное умножение. Итак, $f : V \to k^n$ является изоморфизмом евклидовых (унитарных) пространств.

2) Если евклидовы (унитарные) пространства V и V' имеют одинаковую размерность n, то согласно утверждению 1 оба они изоморфны арифметическому пространству k^n, следовательно, изоморфны между собой.

Обратно, если $V \cong V'$, то они изоморфны как линейные пространства, поэтому они будут иметь одинаковую размерность (следствие 1.3.1.1 к теореме 1.3.1). □

Глава 4

Линейные операторы в евклидовом (унитарном) пространстве

4.1 Сопряженное пространство

Пусть V —линейное пространство над основным полем k. Само поле k можно рассматривать как линейное пространство над k, так как все аксиомы линейного пространства в этом случае выполняются. В этом случае $dim\ k = 1$. Тогда имеет смысл рассматривать пространство $L(V, k)$ — пространство всех линейных операторов из V в k.

Определение 4.1.1. Линейный оператор из V в k называют линейной формой (линейным функционалом) на пространстве V над полем k.

Определение 4.1.2. Линейной формой на пространстве V над полем k называется всякое отображение $\varphi : V \to k$, удовлетворяющее условиям линейности: $(\forall\ a, b \in V, \alpha \in k)$

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
2. $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$.

Замечание 4.1.1. Так как понятие линейной формы есть частный случай понятия линейного оператора, то есть $V' = k$, то все понятия и факты, относящиеся к линейным операторам, будут справедливы и для линейных форм.

Определение 4.1.3. Линейное пространство $L(V, k)$ всех линейных форм на пространстве V над полем k называется сопряженным (двойственным, дуальным) к пространству V и обозначается V^*.

Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем k и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ его базис. Тогда любой вектор $a \in V$ можно представить

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Рассмотрим n отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ пространства V в k, определенных следующим образом

$$(\forall\ a \in V) \quad \varphi(a) = \alpha_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Легко показать, что эти n отображений являются линейными формами, то есть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Эти линейные формы называются координатными формами относительно базиса $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

ТЕОРЕМА 4.1.1. *Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис линейного пространства V, то координатные формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ относительно этого базиса являются базисом сопряженного пространства V^*.*

Доказательство. Пусть φ — это любая линейная форма из V^*. Подсчитаем $\varphi(a_i) = \beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Составим линейную форму

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i$$

— линейная форма пространства V^*. Покажем, что построенная форма $\psi = \varphi$. Действительно,

$$(\forall\ 1 \leqslant j \leqslant n) \quad \psi(a_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i \right)(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{ij} = \beta_j = \varphi(a_j).$$

Получили, что две линейные формы на базисах совпадают, следовательно (по следствию 2.2.1.1 к теореме 2.2.1) $\varphi = \psi$, то есть любая линейная форма из V^* линейно выражается через $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Остается показать, что формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0.$$

Подействуем формой в левой части равенства на базисные вектора, получим

$$(\forall\ 1 \leqslant j \leqslant n) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right) (a_j) = 0.$$

Следовательно, $(\forall\ 1 \leqslant j \leqslant n) \quad \alpha_j = 0$. Таким образом $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейно независимы. □

Определение 4.1.4. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ базис линейного пространства V, то базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ пространства V^* называется базисом сопряженным для базиса $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и иногда обозначается $a_1^*, \ldots, a_n^*$.

Ясно, что $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$.

Следствие. Если V — конечномерное линейное пространство, то и V^* также является конечномерным и при этом $dim\ V^* = dim\ V$.

4.2 Линейные формы в евклидовом (унитарном) пространстве

Пусть V — евклидово (унитарное) пространство и a — фиксированный вектор из V. Рассмотрим функцию φ_a на V, определенную следующим образом

$$(\forall\ x \in V) \quad \varphi_a(x) = (x, a).$$

ТЕОРЕМА 4.2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $(\forall\ a \in V) \quad \varphi_a \in V^*$,
2. *Отображение* $V \to V^*$, *сопоставляющее вектору* a *функцию* φ_a *является инъекцией.*

3. *Если V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство, то отображение $V \to V^*$, указанное в утверждении 2, является биекцией.*

Доказательство. 1) Установим линейность отображения φ_a.

$$(\forall\ \alpha, \beta \in k) \quad \varphi_a(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, a) =$$

$$= \alpha(x, a) + \beta(y, a) = \alpha\varphi_a(x) + \beta\varphi_a(y) \ \Rightarrow\ \varphi_a \in V^*.$$

2) Надо показать, что если $\varphi_a = \varphi_b$, то $a = b$. Пусть $\varphi_a = \varphi_b$, это означает, что $(\forall\ x \in V) \quad \varphi_a(x) = \varphi_b(x)$. То есть $(\forall\ x \in V) \quad (x, a) = (x, b)$. Следовательно $(\forall\ x \in V) \quad (x, a - b) = 0$. Возьмем $x = a - b$, получим $(a - b, a - b) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \ \Leftrightarrow\ a = b$.

3) Для доказательства утверждения 3 достаточно установить, что отображение $V \to V^*$ является сюръекцией, то есть

$$(\forall\ \varphi \in V^*)\ (\exists\ a \in V) \quad \varphi_a = \varphi.$$

Пусть φ — любая форма из V^*, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в V. Пусть $\beta_i = \overline{\varphi(e_i)}$, $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Покажем, что $\varphi_a = \varphi$.

$$(\forall\ 1 \leqslant j \leqslant n) \quad \varphi_a(e_j) = (e_j, a) = \left(e_j, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (e_j, \beta_i e_i) = \overline{\beta}_j = \varphi(e_j) \Rightarrow\ \varphi_a = \varphi.$$

□

Замечание 4.2.1. В дальнейшем часто будет использоваться тот факт, что из того, что $(\forall\ x \in V) \quad (x, a) = (x, b)$ следует, что $a = b$.

Следствие. Если V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство, то для всякой линейной формы φ на V над полем k существует один и только один вектор a такой, что $\varphi_a = \varphi$.

Следствие указывает на то, что в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве линейные формы исчерпываются скалярным умножением, никаких других линейных форм, кроме скалярных умножений, не существует.

4.3 Сопряженный оператор

Пусть V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство.

ТЕОРЕМА 4.3.1 (о существовании и единственности сопряженного оператора)**.** *Если V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство, то*

$$(\forall\ f \in L(V))\ \ (\exists!\ f^* \in L(V))\ \ (\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), y) = (x, f^*(y)).$$

Доказательство. 1) *Определение отображения f^*.* Пусть y — фиксированный вектор из V, рассмотрим функцию $\varphi(x)$ на пространстве V, определенную следующем образом

$$(\forall\ x \in V) \quad \varphi(x) = (f(x), y).$$

Покажем, что $\varphi(x) \in V^*$, то есть $\varphi(x)$ — линейная форма. Для всех $\alpha, \alpha' \in k$ и $x, x' \in V$ имеет место цепочка равенств

$$\varphi(\alpha x + \alpha' x') = (f(\alpha x + \alpha' x'), y) = (\alpha f(x) + \alpha' f(x'), y) =$$
$$= \alpha(f(x), y) + \alpha'(f(x'), y) = \alpha\varphi(x) + \alpha'\varphi(x').$$

Мы видим, что $\varphi(x) \in V^*$, по следствию и теореме 4.2.1 для этой линейной формы $\varphi(x)$ существует единственный вектор a такой, что

$$\varphi(x) = (x, a) = \varphi_a.$$

Этот вектор a зависит от первоначально фиксированного вектора y. Таким образом, мы имеем дело с отображением $f^* : V \to V$ определенным следующим образом $f^*(y) = a$. Имеем $(f(x), y) = \varphi_a$, следовательно

$$(\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), y) = \varphi(f^*(y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), y) = (x, f^*(y)). \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) определяет наше отображение $f^* : V \to V$.

2) *Линейность отображения* f^*. Подсчитаем $\forall(x, y, y' \in V,\ \alpha'\alpha' \in k)$ $(f(x), \alpha y + \alpha' y')$. С одной стороны:

$$(f(x), \alpha y + \alpha' y') = (x, f^*(\alpha y + \alpha' y')).$$

С другой стороны:

$$(f(x), \alpha y + \alpha' y') = (f(x), \alpha y) + (f(x), \alpha' y') = \overline{\alpha}(f(x), y) + \overline{\alpha}'(f(x), y') =$$

$$= \overline{\alpha}(x, f^*(y)) + \overline{\alpha}'(x, f^*(y')) = (x, \alpha(f^*(y))) + (x, \alpha'(f^*(y'))) =$$

$$= (x, (\alpha f^*)(y)) + (x, (\alpha' f^*)(y')) = (x, \alpha f^*(y) + \alpha' f^*(y')).$$

Мы получили

$$(x, f^*(\alpha y + \alpha' y')) = (x, \alpha f^*(y) + \alpha' f^*(y')) \quad \forall(x, y, y' \in V,\ \alpha'\alpha' \in k),$$

следовательно

$$f^*(\alpha y + \alpha' y') = \alpha f^*(y) + \alpha' f^*(y').$$

Линейность f^* установлена, значит $f^* \in L(V)$.

3) *Единственность отображения* f^*. Покажем, что для любого линейного оператора f, оператор f^*, определенный равенством (4.1), является единственным. Допустим, что наряду с оператором f^* существует еще оператор $g \in L(V)$, удовлетворяющий условию, что

$$(\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), y) = (x, g(y)).$$

Тогда сравнивая эти равенства, видим, что

$$(\forall\ x, y \in V) \quad (x, f^*(y)) = (x, g(y)).$$

Следовательно

$$(\forall\ y \in V) \quad f^*(y) = g(y) \Rightarrow f^* = g.$$

$\square$

Определение 4.3.1. Сопряженным для линейного оператора f конечномерного евклидова (унитарного) пространства V называется оператор f^*, для которого выполняется условие

$$(\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), y) = (x, f^*(y)).$$

ТЕОРЕМА 4.3.2. *В конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве V справедливы следующие правила действий с сопряженными операторами:*

1. $(f+g)^* = f^* + g^*$;
2. $(\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^*$;
3. $(fg)^* = g^* f^*$;
4. $(1_V)^* = 1_V; (0_V)^* = 0_V$;
5. *Если f — обратимый линейный оператор, то* $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$;
6. $(f^*)^* = f$.

Доказательство. При доказательстве этих свойств будем пользоваться равенством (4.1).

1) Рассмотрим $((f+g)(x), y)$. С одной стороны,

$$((f+g)(x), y) = (x, (f+g)^*(y)).$$

С другой стороны,

$$((f+g)(x), y) = (f(x) + g(x), y) = (f(x), y) + (g(x), y) =$$

$$= (x, f^*(y)) + (x, g^*(y)) = (x, f^*(y) + g^*(y)) = (x, (f^* + g^*)(y)).$$

Сравнение показывает, что

$$(\forall\ y \in V) \quad (f+g)^*(y) = (f^* + g^*)(y) \Rightarrow (f+g)^* = f^* + g^*.$$

2) Рассмотрим $((\alpha f)(x), y)$. С одной стороны,

$$((\alpha f)(x), y) = (x, (\alpha f)^*(y)).$$

С другой стороны,

$$((\alpha f)(x), y) = (\alpha f(x), y) = \alpha(f(x), y) =$$

$$= \alpha(x, f^*(y)) = (x, \overline{\alpha} f^*(y)) = (x, (\overline{\alpha} f^*)(y)).$$

Сравнение показывает, что

$$(\forall\ y \in V) \quad (\alpha f)^*(y) = \overline{\alpha}(f^*)(y) \Rightarrow (\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^*.$$

3) Рассмотрим $((fg)(x), y)$. С одной стороны,

$$((fg)(x), y) = (x, (fg)^*(y)).$$

С другой стороны,

$$((fg)(x), y) = (f(g(x)), y) = (g(x), f^*(y)) =$$

$$= (x, g^*(f^*(y))) = (x, (g^* f^*)(y)).$$

Сравнение показывает, что

$$(\forall\ y \in V) \quad (fg)^*(y) = (g^* f^*)(y) \Rightarrow (fg)^* = g^* f^*.$$

4) С одной стороны,

$$(1_V(x), y) = (x, 1_V^*(y)).$$

С другой стороны,

$$(1_V(x), y) = (x, y) = (x, 1_V(y)).$$

Следовательно

$$1_V^* = 1_V.$$

С одной стороны,

$$(0_V(x), y) = (x, 0_V^*(y)).$$

С другой стороны,

$$(0_V(x), y) = (0, y) = 0 = (x, 0) = (x, 0_V(y)).$$

Следовательно

$$0_V^* = 0_V.$$

5) Так как f — обратимый линейный оператор, то для него существует оператор $f^{-1} \in L(V)$ такой, что

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = 1_V.$$

Перейдем в этих равенствах к сопряженным операторам

$$(f \cdot f^{-1})^* = (f^{-1} \cdot f)^* = 1_V^*,$$

$$(f^{-1})^* \cdot f^* = f^*(f^{-1})^* = 1_V.$$

Эти равенства указывают на то, что оператор f^* является обратимым и обратным для него оператором является

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$$

6) С одной стороны,

$$(f^*(x), y) = (x, (f^*)^*(y)).$$

С другой стороны,

$$(f^*(x), y) = \overline{(y, f^*(x))} = \overline{(f(y), x)} = (x, f(y)).$$

Следовательно

$$(f^*)^* = f.$$

$\square$

Определение 4.3.2. Пусть A — квадратная числовая матрица, сопряженно транспонированной для матрицы A называется матрица $A^* = \overline{A^T}$, где A^T означает транспонирование, а $\overline{A}$ замену элементов матрицы A комплексно сопряженными.

Определение 4.3.2 означает, что если A состоит из элементов (α_{ij}), а $A^* = \{(\alpha_{ij})^*\}$, то $(\alpha_{ij})^* = \overline{(\alpha_{ji})}$. Если матрица A действительная, то $A^* = A^T$ и $\alpha^*_{ij} = \alpha_{ji}$.

ТЕОРЕМА 4.3.3. *Если матрицей линейного оператора f относительно ортонормированного базиса является матрица A, то матрицей линейного оператора f^* относительно того же базиса является матрица A^*, то есть*

$$A_{f^*|\tilde{e}} = (A_{f|\tilde{e}})^*.$$

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства V, обозначим $A = A_{f|\tilde{e}} = (\alpha_{ij})$, $B = A_{f^*|\tilde{e}} = (\beta_{ij})$. С одной стороны,

$$(f(e_i), e_j) = \langle f\check{(e_i)}, \check{e}_j \rangle = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni})(0, \ldots, 1^{(j)}, \ldots, 0)^T = \alpha_{ji}.$$

С другой стороны,

$$(f(e_i), e_j) = (e_i, f^*(e_j)) = \langle \check{e}_i, f^*\check{(e_j)} \rangle =$$

$$= (0, \ldots, 1^{(i)}, \ldots, 0)(\overline{\beta}_{1j}, \overline{\beta}_{2j}, \ldots, \overline{\beta}_{nj})^T = \overline{\beta}_{ij}.$$

Сравнивая результаты, получим, что

$$\alpha_{ji} = \overline{\beta}_{ij} \Rightarrow \beta_{ij} = \overline{\alpha}_{ji} = (\alpha_{ij})^* \Rightarrow B = A^* \Rightarrow A_{f^*|\tilde{e}} = (A_{f|\tilde{e}})^*.$$

□

Замечание 4.3.1. Теорема 4.3.3 означает, что если при изоморфизме $\sigma : L(V) \to M(n, k)$ относительно ортонормированного базиса $\tilde{e}$, $\sigma(f) = A_f$, то $\sigma(f^*) = A^*_f$.

Предложение 4.3.1. *Если A — квадратная числовая матрица, а X и Y — столбцы соответствующего арифметического пространства, то*

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle.$$

Доказательство. $\langle X, Y\rangle = X^T\overline{Y}$, тогда

$$\langle AX, Y\rangle = (AX)^T\overline{Y} = (X^T A^T)\overline{Y} = X^T(A^T\overline{Y}) =$$

$$= X^T(\overline{\overline{A^T}}\overline{Y}) = X^T\overline{(\overline{A^T}Y)} = X^T\overline{(A^*Y)} = \langle X, A^*Y\rangle.$$

□

4.4 Нормальные операторы и матрицы

Пусть V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство.

Определение 4.4.1. Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства называется нормальным, если он коммутирует (перестановочен) со своим сопряженным оператором, то есть $ff^* = f^*f$.

Определение 4.4.2. Квадратная числовая матрица A называется нормальной, если она коммутирует (перестановочна) со своей сопряженно транспонированной матрицей, то есть $AA^* = A^*A$.

Следствие (критерий). Для того чтобы линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы он относительно ортонормированного базиса имел нормальную матрицу.

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм $\sigma : L(V) \to M(n,k)$ относительно ортонормированного базиса $\tilde{e}$. Если $\sigma(f) = A_f$, то $\sigma(f^*) = A_f^*$. Пусть f — нормальный оператор, тогда

$$ff^* = f^*f \Leftrightarrow \sigma(ff^*) = \sigma(f^*f) \Leftrightarrow \sigma(f)\sigma(f^*) = \sigma(f^*)\sigma(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_f A_f^* = A_f^* A_f,$$

то есть матрица A_f является нормальной. □

Все дальнейшие свойства будут формулироваться для нормальных операторов, имея в виду, что они будут справедливы и для нормальных матриц.

Предложение 4.4.1. *Если a является собственным вектором нормального оператора f, принадлежащим скаляру α, то этот вектор a является и собственным вектором оператора f^*, принадлежащим скаляру $\overline{\alpha}$, то есть $f^*(a) = \overline{\alpha}a$.*

Доказательство. Пусть $f(a) = \alpha a$, где $a \neq 0$ и f — нормальный оператор. Рассмотрим оператор $g = f - \alpha 1_V$. Тот факт, что вектор a является собственным вектором оператора f может быть записан в виде $g(a) = 0$, так как

$$g(a) = (f - \alpha 1_V)(a) = f(a) - \alpha(1_V)(a) = f(a) - \alpha a = 0 \Leftrightarrow f(a) = \alpha a.$$

Рассмотрим сопряженный оператор

$$g^* = (f - \alpha 1_V)^* = f^* - (\alpha 1_V)^* = f^* - \overline{\alpha} 1_V.$$

Покажем, что оператор g является нормальным. Подсчитаем

$$gg^* = (f - \alpha 1_V)(f^* - \overline{\alpha} 1_V) = ff^* - f(\overline{\alpha} 1_V) - (\alpha 1_V)f^* + (\alpha 1_V)(\overline{\alpha} 1_V) =$$

$$= f^*f - (\overline{\alpha} 1_V)f - f^*(\alpha 1_V) + (\overline{\alpha} 1_V)(\alpha 1_V) = (f^* - \overline{\alpha} 1_V)f - (f^* - \overline{\alpha} 1_V)\alpha 1_V =$$

$$= (f^* - \overline{\alpha} 1_V)(f - \alpha 1_V) = g^*g.$$

Следовательно, g — нормальный оператор. Покажем, что $g^*(a) = 0$.

$$0 = (g(a), g(a)) = (a, g^*(g(a))) = (a, (g^*g)(a)) =$$

$$= (a, (gg^*)(a)) = (a, g(g^*(a))) = (g^*(a), g^*(a)) = 0.$$

Следовательно

$$g^*(a) = 0 \Rightarrow (f^* - \overline{\alpha} 1_V)(a) = 0 \Rightarrow f^*(a) - \overline{\alpha} 1_V = 0 \Rightarrow f^*(a) = \overline{\alpha} a.$$

□

Предложение 4.4.2. *Собственные векторы нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть f — нормальный оператор. $f(a) = \alpha a$, $f(b) = = \beta b$, где $\alpha \neq \beta$. Тогда по предложению 4.4.1 $f^*(b) = \beta b$. Рассмотрим

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, b) = (f(a), b) = (a, f^*(b)) = (a, \overline{\beta} b) = \beta(a, b).$$

Сравнивая начало и конец записи, получаем

$$\alpha(a, b) - \beta(a, b) = 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)(a, b) = 0 \Rightarrow (a, b) = 0.$$

□

ТЕОРЕМА 4.4.1 (о диагонализируемости нормального оператора)**.** *Если все характеристические корни нормального оператора лежат в основном поле, то в евклидовом (унитарном) пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого нормального оператора.*

ТЕОРЕМА 4.4.2. *Если все характеристические корни нормального оператора лежат в основном поле, то этот нормальный оператор диагонализируем с помощью ортонормированного базиса.*

ТЕОРЕМА 4.4.3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Всякий нормальный оператор унитарного пространства обладает диагонализирующим ортонормированным базисом.*

2. *Если все характеристические корни нормального оператора евклидова пространства являются действительными числами, то этот нормальный оператор обладает диагонализирующим ортонормированным базисом.*

4.5 Ортогональные (унитарные) матрицы

Пусть V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство.

Определение 4.5.1. Действительная (комплексная) квадратная матрица A называется ортогональной (унитарной) если она взаимнообратна со своей сопряженно транспонированной матрицей A^*, то есть $A^{-1} = A^*$.

Определение 4.5.1 означает, что для ортогональной матрицы $A^{-1} = A^T$, а для унитарной $A^{-1} = \overline{A^T}$. Ясно, что ортогональную матрицу можно рассматривать как действительную унитарную матрицу.

Следствие. Ортогональные (унитарные) матрицы являются нормальными.

Доказательство. Так как $A^{-1} = A^*$, то $A^*A = AA^* = E$. Следовательно A — нормальная матрица. □

Следствие. Модуль определителя ортогональной (унитарной) матрицы равен 1.

Доказательство. Пусть A — ортогональная (унитарная) матрица, тогда $A^*A = E$ перейдем в этом равенстве к определителям, получим

$$|A^*A| = 1 \Rightarrow |A^*||A| = 1 \Rightarrow |\overline{A^T}||A| = 1 \Rightarrow \overline{|A^T|}|A| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{|A|}|A| = 1 \Rightarrow |\det A|^2 = 1 \Rightarrow |\det A| = 1.$$

□

Замечание 4.5.1. Последнее следствие означает, что для ортогональных матриц $|A| = 1$ или $|A| = -1$.

ТЕОРЕМА 4.5.1. *Ортогональные (унитарные) матрицы образуют группу по умножению.*

Доказательство. Рассмотрим множество $GL(n, k)$ — множество неособенных квадратных матриц n-го порядка с элементами из поля k. $(GL(n, k), \cdot)$ является группой, это полная линейная группа n-го порядка над полем k. В носителе этой группы рассмотрим подмножество H — множество всех ортогональных (унитарных) матриц. Ясно, что

$$H \subset GL(n, k),$$

покажем, что $(H, \cdot)$ является подгруппой группы $(GL(n, k), \cdot)$. Для этого достаточно показать, что

$$(\forall\ A, B \in H) \quad AB^{-1} \in H$$

по второму критерию подгруппы. Так как $A \in H$, то $AA^* = A^*A = E$. Так как $B \in H$, то $B^*B = BB^* = E$. Рассмотрим матрицу AB^{-1}. Составим произведение

$$(AB^{-1})^*(AB^{-1}) = (B^{-1})^*(A^*A)B^{-1} = (B^{-1})^*EB^{-1} =$$
$$= (B^{-1})^*B^{-1} = (B^*)^{-1}B^{-1} = (BB^*)^{-1} = E^{-1} = E.$$

Аналогично, $(AB^{-1})(AB^{-1})^* = E$, следовательно матрица AB^{-1} является ортогональной (унитарной), а значит $AB^{-1} \in H$. $\square$

ТЕОРЕМА 4.5.2 (критерий ортогональности (унитарности) матриц). *Квадратная числовая матрица A ортогональна (унитарна) тогда и только тогда, когда ее столбцы образуют ортонормированный базис действительного (комплексного) арифметического пространства.*

Доказательство. Пусть A ортогональная (унитарная) матрица, то есть

$$A^*A = AA^* = E \Leftrightarrow \overline{A^T}A = E \Leftrightarrow \overline{\overline{A^T}A} = \overline{E} \Leftrightarrow A^T\overline{A} = \overline{E} = E \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A^T\overline{A})_{ij} = (E)_{ij} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(A^T)_{ik}(\overline{A})_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(A)_{ki}(\overline{A})_{kj} = \delta_{ij}.$$

Обозначим $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A, тогда $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$, а это возможно тогда и только тогда, когда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют ортонормированный базис арифметического пространства k^n. $\square$

Замечание 4.5.2. Теорема 4.5.2 справедлива и для строк матрицы A, для этого необходимо рассмотреть равенство $AA^* = E$.

ТЕОРЕМА 4.5.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса евклидова (унитарного) пространства к другому ортонормированному базису этого пространства является ортогональной (унитарной).*

2. *Если $\tilde{u} = A^T\tilde{e}$, где A является ортогональной (унитарной) матрицей, а $\tilde{e}$ является ортонормированным базисом евклидова (унитарного) пространства, то и $\tilde{u}$ является ортонормированным базисом этого пространства.*

Доказательство. 1) Пусть $\tilde{e}$ и $\tilde{u}$ — два ортонормированных базиса евклидова (унитарного) пространства V. Пусть A — матрица перехода от $\tilde{e}$ к $\tilde{u}$, по определению это означает, что $\tilde{u} = A^T\tilde{e}$. Напомним, что $A = (\check{u}_1|_{\tilde{e}}, \check{u}_2|_{\tilde{e}}, \ldots, \check{u}_n|_{\tilde{e}})$. Так как $\tilde{u}$ является ортонормированным базисом, то по теореме 3.3.2

$$(u_i, u_j) = \langle \check{u}_i|_{\tilde{e}}, \check{u}_j|_{\tilde{e}} \rangle = \delta_{ij}.$$

Таким образом, столбцы матрицы A образуют ортонормированный базис арифметического пространства k^n, по теореме 4.5.2 матрица A является ортогональной (унитарной).

2) Пусть $\tilde{u} = A^T\tilde{e}$, где $\tilde{e}$ — ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства V, A — ортогональная (унитарная) матрица. Наше равенство указывает на то, что A является матрицей перехода от базиса $\tilde{e}$ к базису $\tilde{u}$

$$A = (\check{u}_1|_{\tilde{e}}, \check{u}_2|_{\tilde{e}}, \ldots, \check{u}_n|_{\tilde{e}}).$$

Так как матрица A ортогональная (унитарная), то по теореме 4.5.2 ее столбцы образуют ортонормированный базис арифметического пространства k^n, то есть

$$\langle \check{u}_i|_{\tilde{e}}, \check{u}_j|_{\tilde{e}} \rangle = \delta_{ij}.$$

Так как $\tilde{e}$ является ортонормированным базисом, то

$$(u_i, u_j) = \langle \check{u}_i|_{\tilde{e}}, \check{u}_j|_{\tilde{e}} \rangle = \delta_{ij}.$$

Это равенство указывает на то, что векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства V. $\square$

4.6 Ортогональные (унитарные) линейные операторы

Пусть V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство.

Определение 4.6.1. Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства называется ортогональным (унитарным) если он взаимнообратен со своим сопряженным оператором f^*, то есть $f^{-1} = f^*$.

Определение 4.6.1 означает, что f ортогонален тогда и только тогда, когда $f^* f = f f^* = 1_V$.

Следствие. Ортогональные (унитарные) линейные операторы являются нормальными.

Доказательство. Так как $f^{-1} = f^*$, то $f^* f = f f^* = 1_V$, следовательно f является нормальным. $\square$

Следствие (критерий). Для того, чтобы линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства V был ортогональным (унитарным) необходимо и достаточно, чтобы он относительно ортонормированного базиса пространства V имел ортогональную (унитарную) матрицу.

Доказательство. Рассмотрим $\sigma : L(V) \to M(n, k)$ относительно ортонормированного базиса $\tilde{e}$. Известно, что если $\sigma(f) = A_f$, то $\sigma(f^*) = A_f^*$.

Пусть f — ортогональный (унитарный) линейный оператор, тогда

$$f^*f = ff^* = 1_V \Leftrightarrow \sigma(f^*f) = \sigma(ff^*) = \sigma(1_V) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma(f^*)\sigma(f) = \sigma(f)\sigma(f^*) = E \Rightarrow A_f^*A_f = A_fA_f^* = E.$$

Следовательно A_f — ортогональная (унитарная) матрица. □

Следствие. Ортогональные (унитарные) операторы образуют группу по умножению.

Доказательство. Рассмотрим группу H — ортогональных (унитарных) матриц, рассмотрим

$$\sigma^{-1} : M(n,k) \to L(V).$$

При этом изоморфизме ортогональные (унитарные) матрицы переходят в ортогональные (унитарные) линейные операторы, а поэтому группа H изоморфно отобразится на группу ортогональных (унитарных) линейных операторов. □

ТЕОРЕМА 4.6.1 (об изометричности ортогонального (унитарного) оператора)**.** *Справедливы следующие два утверждения.*

1. *Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда он сохраняет скалярное умножение, то есть* $(\forall\ x, y \in V)\quad (f(x), f(y)) = (x, y)$.

2. *Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда он изометричен, то есть сохраняет длину вектора* $||f(x)|| = ||x||$.

Доказательство. 1) Пусть f — сохраняет скалярное умножение, тогда

$$(\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), f(y)) = (x, y) \Leftrightarrow (x, f^*(f(y))) = (x, y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall\ y \in V) \quad f^*(f(y)) = y \Leftrightarrow (f^*f)(y) = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^*f = 1_V \Leftrightarrow f^{-1} = f^*.$$

Таким образом f — ортогональный (унитарный) линейный оператор.

2) Покажем, что утверждения эквивалентны.

1) $\Rightarrow$ 2)

Пусть $(\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), f(y)) = (x, y)$. Возьмем $x = y$, получим

$$(\forall\ x \in V) \quad (f(x), f(x)) = (x, x),$$

$$||f(x)||^2 = ||x||^2 \Rightarrow ||f(x)|| = ||x||.$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Пусть $(\forall\ x \in V) \quad ||f(x)|| = ||x||$. Тогда $||f(x)||^2 = ||x||^2$, следовательно $(f(x), f(x)) = (x, x)$.

Пусть x, y — произвольные векторы из V, и $\alpha \in k$, подсчитаем $(f(x + \alpha y), f(x + \alpha y))$. С одной стороны

$$(f(x+\alpha y), f(x+\alpha y)) = (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x, x)+\alpha(y, x)+\overline{\alpha}(x, y)+\alpha\overline{\alpha}(y, y) =$$

$$= ||x||^2 + \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\overline{\alpha}(x, y)} + |\alpha|^2||y||^2 = ||x||^2 + 2Re(\overline{\alpha}(x, y)) + |\alpha|^2||y||^2.$$

С другой стороны

$$(f(x + \alpha y), f(x + \alpha y)) = (f(x) + \alpha f(y), f(x) + \alpha f(y)) =$$

$$= ||f(x)||^2 + 2Re(\overline{\alpha}(f(x), f(y)) + |\alpha|^2||f(y)||^2 =$$

$$= ||x||^2 + 2Re(\overline{\alpha}(f(x), f(y))) + |\alpha|^2||y||^2.$$

Сравнивая результат, видим, что $2Re(\overline{\alpha}(x, y)) = 2Re(\overline{\alpha}(f(x), f(y)))$. Положим $\alpha = 1$, то есть

$$Re(f(x), f(y)) = Re(x, y). \qquad (*)$$

Положим $\alpha = i$, предварительно заметим, что если $z = a + bi$, то

$$Re(-iz) = Re(-ia + b) = b = Im(z),$$

$$Re(-i(x, y)) = Re(-i(f(x), f(y)),$$

$$Im(x, y) = Im(f(x), f(y)), \tag{$**$}$$

Из $(*)$ и $(**)$ следует, что $(f(x), f(y)) = (x, y)$. □

ТЕОРЕМА 4.6.2 (критерий ортогональности (унитарности) линейного оператора). *Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда он ортонормированный базис пространства V переводит в ортонормированный базис.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $\tilde{e}$ — ортонормированный базис пространства V и f — ортогональный (унитарный) линейный оператор из $L(V)$. Так как $\tilde{e}$ — ортонормированный базис, то по второму следствию к определению 4.6.1, матрица $A_{f|\tilde{e}}$ будет ортогональной (унитарной). По определению матрицы линейного оператора, имеем $f(\tilde{e}) = A^T_{f|\tilde{e}}\tilde{e}$. Обозначим $f(\tilde{e}) = \tilde{u}$, имеем $\tilde{u} = A^T_{f|\tilde{e}}\tilde{e}$, тогда по теореме 4.5.3, $\tilde{u}$ является ортонормированным базисом пространства V.
2) *Достаточность.* Пусть $\tilde{e}$ — ортонормированный базис пространства V и $f \in L(V)$ переводит этот базис в ортонормированный базис $f(\tilde{e}) = \tilde{u}$, тогда $f(\tilde{e}) = A^T_{f|\tilde{e}}\tilde{e}$, то есть $\tilde{u} = A^T_{f|\tilde{e}}\tilde{e}$. Это равенство указывает на то, что матрица $A^T_{f|\tilde{e}}$ является матрицей перехода от $\tilde{e}$ к $\tilde{u}$, тогда из первого утверждения теоремы 4.5.3 следует, что $A_{f|\tilde{e}}$ является ортогональной (унитарной) матрицей, а по второму следствию к определению 4.6.1, f является ортогональным (унитарным) линейным оператором. □

Предложение 4.6.1. *Все характеристические корни ортогонального (унитарного) линейного оператора или матрицы по модулю равны 1.*

Доказательство. Предложение достаточно установить для унитарных линейных операторов, тогда оно будет справедливо и для унитарных матриц, а, следовательно, будет справедливо для ортогональных матриц, а отсюда следует справедливость для ортогональных операторов. Итак, пусть $f \in V$ — унитарный линейный оператор и α — любой его характеристический корень. Так как основное поле $k = \mathbb{C}$, то все характеристические корни являются собственными значениями оператора f, поэтому α является собственным значением оператора f. Это означает, что существует такой вектор $a \neq 0$ из V, что $f(a) = \alpha a$. Подсчитаем

$$(a, a) = (f(a), f(a)) = (\alpha a, \alpha a) = \alpha\overline{\alpha}(a, a) = |\alpha|^2(a, a),$$

$$|\alpha|^2(a, a) = (a, a).$$

Так как $a \neq 0$, то получим, что $|\alpha|^2 = 1$, то есть $|\alpha| = 1$. □

4.7 Самосопряженные матрицы и линейные операторы

Определение 4.7.1. Квадратная числовая матрица A называется самосопряженной, если она совпадает со своей сопряженно транспонированной матрицей A^*, то есть $A = A^*$.

Определение 4.7.2. Действительная квадратная матрица называется симметрической, если $A = A^T$.

Определение 4.7.3. Комплексная квадратная матрица называется эрмитовой, если $A = \overline{A^T}$.

Ясно, что симметрическую матрицу можно рассматривать как действительную эрмитову матрицу.

Определение 4.7.4. Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*.

Определение 4.7.5. Линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства называется самосопряженным, если

$$(\forall\ x, y \in V) \quad (f(x), y) = (x, f(y)).$$

Замечание 4.7.1. В случае евклидова пространства самосопряженный оператор часто называют симметрическим, а в случае унитарного пространства — эрмитовым.

Следствие. Симметрические (эрмитовы) матрицы и линейные операторы являются нормальными.

Доказательство. Если A — симметрическая (эрмитова), то $A^* = A$, тогда $A^*A = AA^*$, следовательно, A — нормальная матрица. □

Следствие (Критерий). Для того, чтобы линейный оператор f конечномерного евклидова (унитарного) пространства V был симметрическим (эрмитовым) необходимо и достаточно, чтобы он относительно ортонормированного базиса $\tilde{e}$ имел симметрическую (эрмитову) матрицу.

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм $\sigma : L(V) \to M(n, k)$ относительно ортонормированного базиса $\tilde{e}$. Известно, что если $\sigma(f) = A_f$, то $\sigma(f^*) = A_f^*$. Пусть f — симметрический (эрмитов) оператор, тогда $f = f^*$, значит $\sigma(f) = \sigma(f^*)$, то есть $A_f = A_f^*$. Следовательно A_f является симметрической (эрмитовой) матрицей. □

Рассмотрим вопрос о характеристических корнях самосопряженным матриц и линейных операторов.

Лемма 4.7.1. Если A — эрмитова матрица, X — произвольный столбец комплексного арифметического пространства, то $\langle AX, X\rangle$ является действительным числом.

Доказательство.

$$\langle AX, X\rangle = \langle X, A^*X\rangle = \langle X, AX\rangle = \overline{\langle AX, X\rangle},$$

получили равенство типа $z = \overline{z}$. Это означает, что z — действительное число. □

ТЕОРЕМА 4.7.1. *Все характеристические корни симметрической (эрмитовой) матрицы и линейного оператора являются действительными числами.*

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для эрмитовых матриц, тогда оно будет справедливо для симметрических матриц, а следовательно оно будет справедливо для симметрических и эрмитовых линейных операторов. Пусть A — эрмитова матрица. Так как $k = \mathbb{C}$, то любой характеристический корень α матрицы A является ее собственным значением, а поэтому существует $X \neq 0,\ X \in \mathbb{C}^n$ такой, что $AX = \alpha X$. Рассмотрим

$$\langle AX, X\rangle = \langle \alpha X, X\rangle = \alpha\langle X, X\rangle.$$

Заметим, что $\langle X, X\rangle > 0$, то есть

$$\alpha = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle} \in \mathbb{R}.$$

□

ТЕОРЕМА 4.7.2 (о приведении самосопряженной матрицы к диагональному виду)**.** *Всякую самосопряженную матрицу A можно с помощью ортогональной (унитарной) матрицы трансформировать к диагональному виду, при этом диагональными элементами необходимо будут являться характеристические корни матрицы A.*

Доказательство. Пусть A является самосопряженной матрицей n-го порядка. Рассмотрим n-мерное евклидово (унитарное) пространство V и в нем ортонормированный базис $\tilde{e}$. Построим линейный оператор $f \in L(V)$ так, чтобы он относительно базиса $\tilde{e}$ имел своей матрицей данную матрицу A, то есть $A_{f|\tilde{e}} = A$. Такой оператор f обязательной найдется в силу изоморфности $L(V) \cong M(n, k)$. В теореме 2.2.2 мы строили такой линейный оператор. Так как матрица A является самосопряженной, а $\tilde{e}$ — ортонормированный базис, то по второму следствию, линейный оператор f будет самосопряженным, а, следовательно, нормальным. По теореме 4.7.1 все характеристические корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ линейного оператора f будут действительными числами, поэтому $(\forall\ i = \overline{1,n}) \quad \alpha_i \in k$, при $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$. По теореме 4.4.2, в пространстве V существует ортонормированный диагонализирующий базис $\tilde{u}$, состоящий из собственных векторов оператора f, принадлежащих скалярам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то есть $(\forall\ i = \overline{1,n}) \quad f(u_i) = \alpha_i u_i$. Относительно базиса $\tilde{u}$ линейный оператор f будет иметь матрицу

$$A_{f|\tilde{u}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Известно, что $A_{f|\tilde{u}} = Q^{-1} A_{f|\tilde{e}} Q$, где Q — матрица перехода от $\tilde{e}$ к $\tilde{u}$. Так как базисы $\tilde{e}$ и $\tilde{u}$ ортонормированные, то по теореме 4.5.3 матрица Q является ортогональной (унитарной). Мы видим, что $A_{f|\tilde{e}} = A$ с помощью ортогональной унитарной матрицы Q приводится к диагональному виду. Видно, что на главной диагонали $A_{f|\tilde{u}}$ стоят характеристические корни матрицы $A_{f|\tilde{e}} = A$. $\square$

Глава 5

Квадратичные формы

5.1 Многочлены от n неизвестных

Пусть k — основное поле, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — символы неизвестных.

Определение 5.1.1. Одночленом он неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — целые неотрицательные числа.

В дальнейшем, ради краткости, обозначим набор $(i_1, i_2, \ldots, i_n) = i$, а $x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$.

Определение 5.1.2. Произведение одночленов x^i и x^j назовем одночлен x^{i+j}.

Определение 5.1.3. Многочленом от неизвестных над полем k называется всякая конечная линейная комбинация одночленов с коэффициентами из поля k.

Определение 5.1.3 означает, что

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+^n} \alpha_i x^i,$$

где $\alpha_i \in k$, и почти все α_i равны нулю. $\alpha_i x^i$ — члены многочлена F. Если все α_i равны нулю, то F называется нулевым, $F = 0$.

Множество всех многочленов от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k обозначается $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Это множество становится кольцом, и даже областью целостности, если в нем ввести операции сложения и умножения многочленов. При сложении многочленов, складываются коэффициенты при одинаковых степенях x^i, умножение определяется по дистрибутивности, с помощью определения 5.1.2 умножения одночленов и последующего приведения подобных членов. Это означает, что

$$\sum_{(i)} \alpha_i x^i + \sum_{(i)} \beta_i x^i = \sum_{(i)} (\alpha_i + \beta_i) x^i,$$

$$\sum_{(i)} \alpha_i x^i \cdot \sum_{(j)} \beta_j x^j = \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \beta_j x^{i+j}.$$

Определение 5.1.4. Степенью одночлена $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ называется сумма $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$. Степенью ненулевого многочлена F называется максимум из степеней его членов.

Само поле k является подкольцом кольца $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. 0_k поля k рассматривается как нулевой многочлен, а любой элемент $a \in k^*$ рассматривается как многочлен нулевой степени, а именно $a = a x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$.

Определение 5.1.5. Однородным многочленом (или формой) степени α от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется ненулевой многочлен $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, все члены которого имеют степень α, то есть

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_n = \alpha} \alpha_i x^i.$$

В частности, линейная форма, или форма первой степени, имеет вид $F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n$, где $\alpha_i \in k$.

5.2 Линейные преобразования неизвестных

Пусть k — основное поле, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов и $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен из $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Рассмотрим n линейных форм от новых неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n; \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n; \\ &\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Если в многочлене F вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставить их выражения по формулам (5.1) и произвести указанные действия, то мы получим новый многочлен $G(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Определение 5.2.1. Линейным преобразованием L неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам (5.1) называется сопоставление каждому многочлену $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многочлена $FL(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, получающегося из многочлена F заменой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их значениями по формулам (5.1) и выполнением соответствующих действий.

Линейные преобразования будем обозначать L, L_1, L', M и будем писать $L : x \to y$. Через FL будем обозначать многочлен, получающийся из многочлена F с помощью преобразования L.

Определение 5.2.2. Матрицей линейного преобразования $L : x \to y$ выполненного по формулам (5.1), называется матрица, составленная из коэффициентов линейного выражения старых неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через новые неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Матрицу линейного преобразования L будем обозначать через

$$A_L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Определение 5.2.3. Линейное преобразование L неизвестных x_i в неизвестные y_i с матрицей A называется преобразование вида $X = AY$.

Определение 5.2.4. Произведением линейного преобразования $L : x \to y$ на линейное преобразование $M : y \to z$, называется последовательное выполнение сначала преобразования L, а затем преобразования M.

Это определение означает, что $(F)LM = (FL)M$.

Предложение 5.2.1. *Произведение линейных преобразование неизвестных является линейным преобразованием, матрица которого равна произведению матриц данных преобразований.*

Доказательство. Пусть $L : x \to y$ по формуле $X = A_L Y$, а $M : y \to z$ по формуле $Y = A_M Z$. Рассмотрим многочлен $F(X)$ и подействуем на него преобразованием LM, получим

$$(F(X))LM = (F(X)L)M = (F(A_L Y))M = F(A_L(A_M Z)) = F((A_L A_M)Z).$$

Мы видим, что $LM : x \to z$ по формуле $X = A_L A_M Z$, тогда по определению 5.2.3 LM является линейным преобразованием неизвестных $x \to z$ с матрицей $A_{LM} = A_L A_M$. □

Определение 5.2.5. Тождественным линейным преобразованием неизвестных называется линейное преобразование, матрица которой равна единичной матрице.

Тождественное преобразование будем обозначать через 1_L. Из определения $A_{1_L} = E$, то есть $1_L :\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Определение 5.2.6. Линейное преобразование неизвестных L называется невырожденным (неособенным) если его матрица A_L является неособенной, то есть $|A_L| \neq 0$.

С точностью до обозначения неизвестных, между множеством линейных преобразований $\{L\}$, рассмотренного вместе с операцией умножения, и множеством $(M(n, k), \cdot)$ можно установить изоморфизм $f : L \to$

A_L. Поэтому каждому понятию или свойству, относящемуся к матрицам, соответствует такое же понятие или свойство линейных преобразований. Ввиду этого, можно высказать ряд утверждений.

Утверждение 5.2.1. *Умножение линейных преобразований ассоциативно.*

Утверждение 5.2.2. *Произведение нескольких линейных преобразований невырожденно тогда и только тогда, когда каждое из перемножаемых линейных преобразований является невырожденным.*

Утверждение 5.2.3. *Линейное преобразование L невырожденно тогда и только тогда, когда оно допускает обратное линейное преобразование L^{-1} такое, что $LL^{-1} = L^{-1}L = 1_L$.*

Утверждение 5.2.4. *Матрица обратного линейного преобразования равна обратной матрице для первоначального преобразования, то есть $A_{L^{-1}} = A_L^{-1}$.*

Утверждение 5.2.5. *Невырожденные линейные преобразования образуют группу по умножению, изоморфную группе неособенных квадратных матриц.*

5.3 Квадратичная форма, ее матрица и ранг

Пусть k — основное поле. Характеристика $k \neq 2$, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n неизвестных над полем k.

Определение 5.3.1. Квадратичной формой от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k называется форма второй степени над полем k, то есть однородный многочлен второй степени от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k.

Определение 5.3.2. Квадратичной формой от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k называется многочлен от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля k следующего вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta_{ij} x_i x_j. \tag{5.2}$$

Придадим записи (5.2) так называемый стандартный вид, для этого обозначим

$$\alpha_{ii} = \beta_i, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2}\beta_{ij}, \quad \text{а вторую половину} \quad \frac{1}{2}\beta_{ij} = \alpha_{ji}. \tag{5.3}$$

Формулы (5.3) показывают, что члены многочлена (5.2) примут вид:

$$\beta_i x_i^2 = \alpha_{ii} x_i x_i, \quad \beta_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2}\beta_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2}\beta_{ij} x_i x_j = \alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i,$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i x_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ji} x_j x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{5.4}$$

Предложение 5.3.1. *Всякую квадратичную форму вида (5.2) можно привести к виду (5.4) с помощью формул (5.3).*

Определение 5.3.3. Запись квадратичной формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде (5.4) с условием, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$ называется стандартной формой записи.

Определение 5.3.4. Матрицей квадратичной формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется матрица, составленная из коэффициентов при произведениях неизвестных в ее стандартной форме записи.

Обозначим

$$A_F = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

Пример.

$$F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 2x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2,$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица A_F квадратичной формы является симметрической. Каждой квадратичной форме соответствует симметрическая матрица A_F. Каждой симметрической матрице A_F соответствует квадратичная форма F, поэтому между множеством квадратичных форм от n неизвестных и множеством симметрических матриц n-порядка существует взаимнооднозначное соответствие (биекция).

Определение 5.3.5. Рангом квадратичной формы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ранг матрицы этой квадратичной формы $r(F)$, то есть $r(F) = r(A_F)$.

Определение 5.3.6. Дискриминантом квадратичной формы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется определитель матрицы этой квадратичной формы $D(F)$, то есть $D(F) = |A_F|$.

Определение 5.3.7. Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется невырожденной, если матрица этой квадратичной формы неособенна.

Следствие. Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является неособенной, тогда и только тогда, когда ее дискриминант не равен 0 или, тогда и только тогда, когда ее ранг равен числу неизвестных.

5.4 Влияние линейного преобразования на квадратичную форму

Пусть F — квадратичная форма с матрицей A, то есть

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

как всегда через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, будем обозначать столбец неизвестных, тогда $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Предложение 5.4.1. *Квадратичную форму F с матрицей A можно записать в виде $F = X^T AX$.*

Доказательство. AX является столбцом размерности $n \times 1$. В i-строке этого столбца

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j,$$

тогда

$$X^T(AX) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

□

ТЕОРЕМА 5.4.1 (о влиянии линейного преобразования). *Пусть F — квадратичная форма с матрицей A и L — линейное преобразование неизвестных $L : x \to y$ с матрицей Q, тогда*

1. *FL является квадратичной формой с матрицей $Q^T AQ$, то есть $A_{FL} = A_L^T A_F A_L$;*
2. *$D(FL) = D(F)|Q|^2$;*
3. *если L — невырожденное линейное преобразование, то $r(FL) = r(F)$, то есть формы FL и F одновременно вырождены или не вырождены.*

Доказательство. 1. По предположению $F = X^T AX$. Далее линейное преобразование $L : x \to y$ происходит по формуле $X = QY$, тогда

$$FL = (QY)^T AQY = (Y^T Q^T)A(QY) = Y^T(Q^T AQ)Y,$$

то есть $FL = Y^T BY$, где $B = Q^T AQ$. Покажем, что матрица B является симметрической

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T AQ = B.$$

Видно, что FL является квадратичной формой от неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с матрицей $A_{FL} = Q^T AQ$.

2. Подсчитаем $D(FL)$.

$$D(FL) = |A_{FL}| = |Q^T AQ| = |Q^T| \cdot |A| \cdot |Q| = D(F)|Q|^2.$$

3. Видно, что матрица $A_{FL} = Q^T AQ$ получается из матрицы A умножением слева и справа на не особенные матрицы. $|Q| \neq 0$ так как L — невырожденное преобразование. По теореме о ранге произведений матриц $r(A_{FL}) = r(A)$, то есть $r(FL) = r(F)$. □

5.5 Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Определение 5.5.1. Квадратичная форма F имеет канонический вид, если матрица A_F этой формы является диагональной, то есть

$$A_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Это означает, что

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2.$$

Причем среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут быть и нули.

Следствие. Ранг канонической квадратичной формы равен числу отличных от нуля коэффициентов при квадратах неизвестных.

Доказательство. $r(F) = r(A_F) =$ количеству неравных нулю элементов α_i. □

Определение 5.5.2. Квадратичная форма F имеет нормальный вид, если матрица этой формы является единичной, то есть $A_F = E$, то есть $F = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Определение 5.5.3. Линейное преобразование $L : x \to y$ приводит квадратичную форму F к каноническому виду, если квадратичная форма FL имеет канонический вид. В этом случае, если L является невырожденным линейным преобразованием, то FL называют каноническим видом формы F.

Замечание 5.5.1. Канонический вид квадратичной формы F определяется неоднозначно. Этот вид существенно зависит от применяемого невырожденного преобразования неизвестных.

ТЕОРЕМА 5.5.1 (Лагранжа). *Любую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования неизвестных можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции по n.

1) Пусть $n = 1$, тогда $F = \alpha_{11}x_1^2$ — она уже имеет канонический вид $1_L : x = y$.

2) Предположим, что теорема верна для квадратичных форм, зависящих от $n-1$ неизвестных. Докажем ее справедливость для квадратичных форм, зависящих от n неизвестных.

Пусть $F = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j$. Рассмотрим 2 случая.

а) Не все коэффициенты при квадратах неизвестных равны нулю. Пусть для определенности $\alpha_{nn} \neq 0$. Запишем выражение для формы

F, выделив в ней члены, содержащие x_n, получим

$$F = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{in}x_ix_n + \alpha_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}x_ix_j +$$

$$+\alpha_{nn}\left(x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{in}/\alpha_{nn})x_ix_n + \left(\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{in}/\alpha_{nn})x_i\right)^2\right) -$$

$$-\alpha_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{in}/\alpha_{nn})x_i\right)^2 = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) +$$

$$+\alpha_{nn}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{in}/\alpha_{nn})x_i\right)^2 =$$

$$= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \alpha_{nn}^{-1}\left(\alpha_{nn}x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{in}x_i\right)^2.$$

Здесь $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ является квадратичной формой, зависящей от $n-1$ неизвестных. Рассмотрим линейное преобразование $L_1 : y \to x$, осуществляемое по формулам $y_i = x_i, \forall i = \overline{1, n-1}, y_n = \alpha_{1n}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n$. Это преобразование является невырожденным, так как $|A_{L_1}| = \alpha_{nn} \neq 0$, тогда существует обратное линейное преобразование $L_1^{-1} : x \to y$ так же являющееся невырожденным. Это преобразование L_1^{-1} переведет форму F к виду $FL_1^{-1} = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) + \alpha_{nn}^{-1}y_n^2$, так как форма F_1 зависит от $n-1$ неизвестных, то к ней можно применить предположение индукции, а именно, существует M — невырожденное линейное преобразование $M : y \to z$, которое переводит форму F_1 в канонический вид $F_1M = \beta_1z_1^2 + \ldots + \beta_{n-1}z_{n-1}^2$. Тогда рассмотрим линейное преобразование $L_2 : y \to z$ по формулам для $n-1$ переменной $L_2 = M$, при $y_n = z_n$. Это преобразование L_2 является невырожденным, так как $|A_{L_2}| = \begin{vmatrix} A_M & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A_M| \neq 0$. Это преобразование L_2 переводит форму FL_1^{-1} к виду $(FL_1^{-1})L_2 = \beta_1z_1^2 + \ldots + \beta_{n-1}z_{n-1}^2 + \alpha_{nn}^{-1}z_n^2$. Видно, что квадратичная форма F с помощью линейного преобразования $L = L_1^{-1}L_2$

приводится к каноническому виду, при этом преобразование L является невырожденным, как произведение двух невырожденных линейных преобразований.

b) Все коэффициенты при квадратах неизвестных в форме F равны нулю. В этом случае не все коэффициенты при произведениях $x_i x_j$ равны нулю, в противном случае $F = 0$, а это не есть квадратичная форма. Пусть $\alpha_{12} \neq 0$, значит форма имеет вид $F = 2\alpha_{12}x_1x_2+$ слагаемые, каждый член которых содержит, по крайней мере, одно из неизвестных $x_3, x_4, \ldots, x_n$. Рассмотрим линейное преобразование неизвестных $L_1 : x \to z$ по формулам $x_1 = z_1 - z_2,\ x_2 = z_1 + z_2,\ x_i = z_i,\ \forall\, i = \overline{3, n}$. Это линейное преобразование невырожденное $|A_{L_1}| = 2 \neq 0$, $FL_1 = 2\alpha_{12}z_1^2 - 2\alpha_{12}z_2^2+$ слагаемые, каждый член которых содержит, по крайней мере одну из неизвестных $z_3, z_4, \ldots, z_n$. Видно, что форма FL_1, содержит отличные от нуля коэффициенты при двух переменных, и эти два первые члена не могут уничтожаться с последующими слагаемыми. Тогда мы находимся в условиях первого рассмотренного случая. Следовательно, существует невырожденное линейное преобразование $L_2 : z \to y$, которое форму FL_1 переводит в канонический вид $(FL_1)L_2 = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$. Форма F с помощью линейного преобразования $L = L_1 L_2$ переводится в канонический вид. □

Следствие 5.5.1.1. Ранг квадратичной формы F равен количеству не равных нулю коэффициентов при квадратах неизвестных в любом ее каноническом виде.

Доказательство. Пусть $r(F) = r$. Переведем форму F с помощью невырожденного линейного преобразования L в канонический вид, получим $FL = \beta_1 y_1^2 + \ldots + \beta_n y_n^2$. По теореме 5.4.1 $r(FL) = r(F)$, поэтому $r(F) = r(A_{FL}) = r$. Последнее равенство равносильно тому, что среди элементов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ровно r штук отличных от нуля. □

Следствие 5.5.1.2. Любую квадратичную форму F ранга r над полем комплексных чисел C с помощью невырожденных линейных преобразований можно привести к сумме r квадратов.

Доказательство. Квадратичную форму F ранга r по следствию 5.5.1.1 с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к виду $FL_1 = \beta_1 y_1^2 + \ldots + \beta_r y_r^2$, где все $\beta_i \neq 0$. Так как в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно извлечь корень из любого числа, то рассмотрим преобразование

$$L_2 : y_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}_1} z_1, \ldots, y_r = \frac{1}{\sqrt{\beta}_r} z_r,\ y_i = z_i,\ \forall\ i = \overline{r+1, n}.$$

Это преобразование является невырожденным, потому что

$$|A_{L_2}| = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}}.$$

Это преобразование L_2 приведет форму FL_1 к виду

$$(FL_1)L_2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2.$$

Форма F с помощью линейного преобразования $L = L_1 L_2$ переводится к сумме r квадратов. □

5.6 Действительные квадратичные формы

Основное поле k в этом параграфе — это поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Рассмотрим квадратичные формы

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

с коэффициентами $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Линейное преобразование неизвестных также будем рассматривать с действительными коэффициентами.

Квадратичная форма F ранга r с помощью невырожденного линейного преобразования приводится к каноническому виду

$$FL = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_r y_r^2,$$

где $\alpha_i \neq 0$. Пусть p — число положительных коэффициентов, а q — число отрицательных коэффициентов. Ясно, что $p + q = r$. Квадратичная форма F различными линейными невырожденными действительными преобразованиями приводится к различным каноническим видам. Возникает вопрос «Что общего у этих канонических видов?».

ТЕОРЕМА 5.6.1 (Закон инерции действительных квадратичных форм)**.** *Число положительных и число отрицательных коэффициентов при квадратах неизвестных в каноническом виде, к которому приводится действительная квадратичная форма F с помощью невырожденного действительного преобразования неизвестных, не зависит от выбора линейного преобразования.*

Доказательство. Допустим противное, то есть квадратичная форма F с помощью двух линейных действительных преобразований L и M приводится к каноническим видам с различным числом положительных коэффициентов. Допустим, что квадратичная форма F ранга r с помощью преобразования $L : x \to y$ и с помощью $M : x \to z$ приводится к виду

$$FL = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 - \alpha_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_r y_r^2, \tag{5.5}$$

$$FM = \beta_1 z_1^2 + \beta_2 z_2^2 + \ldots + \beta_{p'} z_{p'}^2 - \beta_{p'+1} z_{p'+1}^2 - \ldots - \beta_r z_r^2, \tag{5.6}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r > 0$.

Предположим для определенности, что $p < p'$. Так как преобразование $L : x \to y$ является невырожденным, то невырожденным будет и преобразование $L^{-1} : y \to x$. Заметим, что

$$L^{-1} : \begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n \\ \ldots \\ y_n = \alpha_{n1} x_1 + \ldots + \alpha_{nn} x_n \end{array} .$$

Точно так же и M. Так как $M : x \to z$ является невырожденным преобразованием, то M^{-1} является невырожденным.

$$M^{-1}: \begin{array}{l} z_1 = \beta_{11}x_1 + \ldots + \beta_{1n}x_n \\ \ldots \\ z_n = \beta_{n1}x_1 + \ldots + \beta_{nn}x_n \end{array}.$$

Теперь рассмотрим однородную систему линейных уравнений с n-неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ следующего вида:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ \alpha_{p1}x_1 + \ldots + \alpha_{pn}x_n = 0 \\ \beta_{p'+1,1}x_1 + \ldots + \beta_{p'+1,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ \beta_{n1}x_1 + \ldots + \beta_{nn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{5.7}$$

Число уравнений в системе (5.7) равно $p + (n - p') = n - (p' - p) < n$. Так как в однородной системе (5.7) число уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет ненулевое действительное решение $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Подставим в формулы (5.5), (5.6) вместо y и z их выражения через $x_1, \ldots, x_n$ и затем, полагая $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$, обозначим

$$y_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j^{(0)}, \quad z_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}x_j^{(0)}.$$

Заметим что в силу системы (5.7)

$$y_1^{(0)} = \ldots = y_p^{(0)} = 0 \quad \text{и} \quad z_{p'+1}^{(0)} = \ldots = z_n^{(0)} = 0.$$

В результате равенства (5.5) и (5.6) примут вид:

$$F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = -\alpha_{p+1}{y_{p+1}^{(0)}}^2 - \ldots - \alpha_r {y_r^{(0)}}^2, \tag{5.8}$$

$$F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \beta_1 {z_1^{(0)}}^2 + \ldots + \beta_{p'} {z_{p'}^{(0)}}^2. \tag{5.9}$$

Так как все коэффициенты системы (5.7) действительны, то квадраты чисел, входящих в (5.8) и (5.9) — неотрицательны. Из (5.8) видно, что

$F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \leqslant 0$, а из (5.9), что $F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \geqslant 0$. Это означает, что $F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0$. Подставим полученный результат в равенство (5.9), получаем, что $z_1^{(0)} = \ldots = z_p^{(0)} = 0$.

Объединяя последние равенства получим $z_1^{(0)} = \ldots = z_n^{(0)} = 0$. Эти равенства указывают на то, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} \beta_{11}x_1 + \ldots + \beta_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ \beta_{n1}x_1 + \ldots + \beta_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

имеет не нулевое решение $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$. Но эта система содержит n линейных уравнений с n неизвестными. Тогда из критерия наличия не нулевого решения однородно системы линейных уравнений определитель этой системы должен быть равен нулю, то есть определитель этой системы $|A_{M^{-1}}| = 0$. А это протеворечит тому, что M является невырожденным линейным преоброзованием.

Аналогично, если предположить, что $p > p'$ мы получаем противоречие с невырожденным преобразованием L^{-1}. □

Определение 5.6.1. Положительным (отрицательным) индексом инерции действительной квадратичной формы называется число положительных (отрицательным) коэффициентов при квадратах неизвестных в любом каноническом виде этой квадратичной формы.

Мы уже отмечали, что $p + q = r$, где p — положительный индекс, q — отрицательный индекс. Обозначим $S = p - q$. Ясно, что при заданном ранге r, задание одного из чисел p, q или S вполне определяет два других числа.

Определение 5.6.2. Линейное преобразование неизвестных L называется ортогональным, если его матрица ортогональна, то есть

$$A_L{}^{-1} = A_L{}^T.$$

Предложение 5.6.1. *Линейное преобразование неизвестных L ортогонально тогда и только тогда, когда оно нормальную квадратичную форму переводит в нормальную квадратичную форму.*

Доказательство. 1) Пусть форма F имеет нормальный вид и L — ортогональное линейное преобразование $A_F = E$. Рассмотрим FL. Имеем, что матрица этой формы $A_{FL} = A_L^T A_F A_L = {A_L}^{-1} E A_L = {A_L}^{-1} A_L = E$, следовательно форма FL имеет нормальный вид.

2) Пусть F и FL имеют нормальный вид. Это означает что $A_F = A_{FL} = E$. С другой стороны $A_{FL} = A_L^T A_F A_L \Rightarrow A_L^T E A_L = E \Rightarrow A_L^T A_L = E \Rightarrow {A_L}^{-1} = A_L^T$, то есть L является ортогональным преобразованием. □

ТЕОРЕМА 5.6.2 (о приведении к главным осям)**.** *Любую действительную квадратичную форму с помощью ортогонального преобразования неизвестных можно привести к каноническому виду, при этом коэффициентами при квадратах неизвестных необходимо будут являться характеристические корни матрицы этой квадратичной формы.*

Доказательство. Пусть F — квадратичная форма от $x_1, \ldots, x_n$ с матрицей A. Известно, что матрица A является симметрической. По теореме 4.7.2 существует ортогональная матрица Q такая, что

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — характеристические корни матрицы A.

Пользуясь этим фактом, к форме F применим преобразование $L : x \to y$ с матрицей Q, то есть $X = QY$. Тогда матрица формы примет вид

$$A_{FL} = Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом форма FL примет вид $FL = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$. Видно, что форма F с помощью ортогонального преобразования L приведена к каноническому виду, где коэффициенты при квадратах неизвестных являются характеристическими корнями матрицы A. □

Определение 5.6.3. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования неизвестных называется приведение этой формы к главным осям.

Следствие 5.6.2.1. Положительный (отрицательный) индекс инерции действительной квадратичной формы равен числу положительных (отрицательных) характеристических корней матрицы этой формы. Ранг равен сумме положительных и отрицательных характеристических корней матрицы.

Доказательство. По теореме 5.6.1 число положительных и отрицательных коэффициентов не зависит от выбора невырожденного линейного преобразования неизвестных. С другой стороны по теореме 5.6.2 число положительных и отрицательных коэффициентов совпадают с числом положительных и отрицательных характеристических корней матрицы этой формы. □

Предложение 5.6.2. *Любую действительную квадратичную форму F ранга r с положительным индексом p, можно с помощью невырожденного линейного преобразования привести к виду*

$$FL = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2.$$

Доказательство. Применим к форме F ортогональное линейное преобразование $L_1 : x \to z$. Получим

$$FL_1 = \alpha_1 z_1^2 + \ldots + \alpha_p z_p^2 - \alpha_{p+1} z_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_r z_r^2.$$

Применим теперь преобразование $L_2 : z \to y$:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1 \\
&\dots \\
&z_r = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r \\
&z_i = y_i \quad \forall i = \overline{r+1, n}.
\end{aligned}
$$

Преобразование L_2 является невырожденным. После этого преобразования форма FL примет вид: $(FL_1)L_2 = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$. Преобразование $L = L_1 L_2$ является невырожденным. □

Определение 5.6.4. Две квадратичные формы от n неизвестных называются эквивалентными над полем k, если они переходят друг в друга с помощью невырожденного линейного преобразования с коэффициентами из поля k.

Предложение 5.6.3. *Две действительные квадратичные формы от n неизвестных являются эквивалентными над полем $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые индексы инерции (ранги и сигнатуры).*

Доказательство. 1) Пусть квадратичные формы F и G эквивалентны над полем $\mathbb{R}$, тогда $F = GL$, где L —невырожденное линейное преобразование с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Приведем эти формы к каноническому виду FL_1 и GL_2. Эти канонические виды должны совпадать. Допустим противное, то есть FL_1 и GL_2 имеют различный канонический вид, тогда форма G будет иметь два канонических вида: с одной стороны GL_2, а с другой $(GL)L_1$, которые различны. А это противоречит теореме 5.6.1, следовательно FL_1 и GL_2 имеют одинаковый канонический вид и индексы инерции форм F и G совпадают.

2) Пусть F и G имеют одинаковые индексы инерции. Это означает, что по предложению 5.6.2 существуют такие линейные преобразования

L_1 и L_2, что формы принимают вид:

$$FL_1 = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2 = GL_2.$$

Таким образом, из того, что $FL_1 = GL_2$ следует, что $(FL_1)L_2{}^{-1} = F(L_1 L_2^{-1}) = G$, то есть $FL = G$, где $L = L_1 L_2{}^{-1}$ — невырожденное линейное преобразование. Следовательно формы F и G эквивалентны. $\square$

5.7 Классификация типов квадратичных форм

Пусть

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— действительная квадратичная форма с матрицей A. В этом пункте будем рассматривать форму F как действительную функцию от n действительных переменных. Как известно форма

$$F = X^T A X = X^T A^T X = (AX)^T \overline{X} = \langle AX, X \rangle .$$

Заметим, что $\langle AX, X \rangle$ всегда является действительным числом, даже если A_F — эрмитова матрица и $x \in \mathbb{C}^n$. Квадратичную форму F можно рассматривать, как функцию от X, которая принимает вид:

$$F(X) = \langle AX, X \rangle .$$

Определение 5.7.1 (классификация типов)**.** Действительная квадратичная форма F называется:

1. положительно определенной, если: $\forall\ X \neq 0, \quad F(X) > 0$;

2. отрицательно определенной, если: $\forall\ X \neq 0, \quad F(X) < 0$;

3. положительно полуопределенной, если:

$$\forall\ X, \quad F(X) \geqslant 0, \quad \text{и} \quad \exists\ X \neq 0, \quad F(X) = 0;$$

4. отрицательно полуопределенной, если:

$$\forall\ X, \quad F(X) \leqslant 0, \quad \text{и} \quad \exists\ X \neq 0, \quad F(X) = 0;$$

5. неопределенной, если: $\exists\ X \neq 0,\ Y \neq 0, \quad F(X) > 0,\ F(Y) < 0.$

Предложение 5.7.1. *Невырожденное линейное преобразование неизвестных не меняют классификационного типа квадратичной формы.*

Доказательство. Пусть $L : x \to y$ невырожденное линейное преобразование с матрицей Q, то есть $X = QY$. Тогда $FL(Y) = F(QY)$, видно, что функции F и FL имеют одно и тоже множество значений, причем одновременно столбцы Y и $X = QY$ либо нулевые, либо ненулевые. □

Следствие. Действительные квадратичные формы можно классифицировать по их каноническому виду.

ТЕОРЕМА 5.7.1 (о характеристиках классификационных типов)**.** *Следующие группы утверждений равносильны:*

1. (a) *Квадратичная форма F является положительно определенной;*

   (b) *Квадратичная форма F является невырожденной и $q = 0$;*

   (c) $p = n$;

   (d) *Все характеристические корни матрицы A_F являются положительными.*

2. (a) *Квадратичная форма F является отрицательно определенной;*

   (b) *Квадратичная форма F является невырожденной и $p = 0$;*

   (c) $q = n$;

   (d) *Все характеристические корни матрицы A_F являются отрицательными.*

3. (a) *Квадратичная форма F является положительно полуопределенной;*

   (b) *Квадратичная форма F является вырожденной и $q = 0$;*

   (c) $p < n$, $q = 0$;

   (d) *Характеристические корни матрицы $A_F \geqslant 0$ и есть характеристические корни равные нулю.*

4. (a) *Квадратичная форма F является отрицательно полуопределенной;*

   (b) *Квадратичная форма F является вырожденной и $p = 0$;*

   (c) $q < n$, $p = 0$;

   (d) *Характеристические корни матрицы $A_F \leqslant 0$ и есть характеристические корни равные нулю.*

5. (a) *Квадратичная форма F является неопределенной;*

   (b) $p \neq 0$, $q \neq 0$;

   (c) *Существуют как положительные так и отрицательные характеристические корни матрицы A_F.*

Доказательство. Как показывает следствие, достаточно рассматривать квадратичную форму в каноническом виде. Любую действительную квадратичную форму F ранга r с положительным индексом инерции p можно привести к виду $F = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$. Будем доказывать равносильность утверждений первой группы.

1. Пусть F — положительно определенная квадратичная форма. Покажем что ранг $r = n$. Допустим противное, то есть $r < n$, тогда

рассмотрим столбец

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ y_n \end{pmatrix},$$

где $y_1 = 0, \dots, y_r = 0,\ y_{r+1} \neq 0, \dots, y_n \neq 0$. Ясно, что $Y \neq 0$, но при этом $F(Y) = 0$, а это противоречит положительной определенности, то есть $r = n$, следовательно F невырожденная квадратичная форма. Покажем что $q = 0$. Допустим противное, $q \neq 0$. Наша форма имеет вид: $F = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$. Рассмотрим столбец

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \\ y_{p+1} \\ y_n \end{pmatrix},$$

где $y_1 = 0, \dots, y_p = 0,\ y_{p+1} \neq 0, \dots, y_n \neq 0$. Ясно, что $Y \neq 0$, но при этом $F(Y) < 0$. Это противоречит тому, что F положительно определенная, то есть $q = 0$.

2. Дано $r = n,\ q = 0$. Известно, что $p + q = r$, следовательно $p = n$.

3. Пусть $p = n$, значит количество положительных характеристических корней матрицы A_F равно n, а всего характеристических корней у матрицы A_F тоже n. Следовательно все характеристические корни матрицы A_F положительны.

4. Пусть все характеристические корни матриц A_F положительны. Следовательно $p = n$, тогда квадратичная форма F имеет вид:

$$F = y_1^2 + \dots + y_n^2,$$

то есть $\forall\, Y \neq 0, \quad F(Y) > 0$, что по определению 5.7.1 означает, что квадратичная форма F является положительно определенной.

Равносильность утверждений первой группы доказана. Аналогично доказываются равносильность утверждений других групп. □

Теорема 5.7.1 не позволяет выяснить тип квадратичной формы по ее коэффициентам. Для этого служит следующая теорема.

Определение 5.7.2. Угловыми минорами матрицы A называются миноры матрицы A, составленные из элементов α_{ij}, расположенных в ее левом верхнем углу, то есть

$$\Delta_1 = \alpha_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 5.7.2 (критерий Сильвестра)**.** *Квадратичная форма F является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы этой формы A_F положительны.*

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции по n.

Пусть $n = 1$, тогда форма $F(x_1) = \alpha_{11}x_1^2$. Ясно, что

$$\forall\, x_1 \neq 0,\ F(x_1) > 0 \Leftrightarrow \alpha_{11} > 0.$$

Считаем что теорема справедлива для $(n-1)$-мерной квадратичной формы. Докажем ее справедливость для n-мерной формы.

Пусть

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j.$$

Представим эту форму в виде:

$$F = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n-1} 2\alpha_{in}x_ix_n + \alpha_{nn}x_n^2. \tag{5.10}$$

Обозначим

$$G = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

получим

$$F = G + \sum_{i=1}^{n-1} 2\alpha_{in} x_i x_n + \alpha_{nn} x_n^2.$$

В этой формуле G — квадратичная форма зависящая от $x_1, \ldots, x_{n-1}$ неизвестных, она получается из тех членов формы F, в которые не входят x_n. Ясно, что все угловые миноры матрицы A_G этой формы совпадают с $n-1$ угловыми минорами матрицы A_F.

Необходимость. Пусть F является положительно определенной квадратичной формой. Покажем, что тогда и форма G должна быть положительно определенной. Допустим противное, то есть существуют $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})$ такие, что $G(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) \leqslant 0$, тогда из равенства (5.10) следует, что

$$F(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, 0) = G(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) \leqslant 0.$$

А это противоречит тому, что форма F является положительно определенной. Следовательно G — положительно определена. Применим к ней предположение индукции. Все ее угловые миноры будут положительны, поэтому первые $n-1$ угловых миноров матрицы A_F будут положительны. Остается доказать, что последний угловой минор матрицы A_F, $\Delta_n = |A_F| > 0$, то есть $D(F) > 0$. Так как форма F — положительно определена, то $\exists\, L : x \to y$ — невырожденное линейное преобразование с матрицей Q такое, что $FL = y_1^2 + \ldots + y_n^2,\ D(FL) = |A_{FL}| = 1$. Из ранее доказанного $D(FL) = D(F)|Q|^2$. Заметим, что $|Q| \neq 0$, так как L — невырожденное, следовательно $D(F) = \frac{1}{|Q|^2} > 0$.

Достаточность. Пусть все угловые миноры матрицы A_F положительны. Тогда, в частности, положительными будут первые $n-1$ угловых миноров, то есть положительными являются все угловые миноры матрицы

A_G и $D(F) = |A_F| > 0$. Используя предположение индукции получим, что форма G является положительно определенной. Это означает, что $\exists\ L_1 : x \to y$ — невырожденное преобразование переводящее форму G к виду $GL_1 = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2$,

$$L_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим преобразование $L : x \to y$, которое на первых $n-1$ переменных совпадает с L_1, а $x_n = y_n$. Это преобразование невырожденное, так как $|A_L| = |A_{L_1}| \neq 0$. Таким образом, преобразование L приведет форму F к виду:

$$FL = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2\beta_{in} y_i y_n + \alpha_{nn} y_n^2.$$

Выделим полные квадраты:

$$FL = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i^2 + 2\beta_{in} y_i y_n + \beta_{in}^2 y_n^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in}^2 y_n^2 + \alpha_{nn} y_n^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (y_i + \beta_{in} y_n)^2 + y_n^2 \left(\alpha_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i + \beta_{in} y_n)^2 + b y_n^2. \tag{5.11}$$

Рассмотрим линейное преобразование неизвестных $M : z \to y$:

$$\begin{aligned} &z_1 = y_1 + \beta_{1n} y_n \\ &\ldots \\ &z_{n-1} = y_{n-1} + \beta_{n-1,n} y_n \\ &z_n = y_n. \end{aligned}$$

M — невырожденное, так как $|A_M| = 1 \neq 0$, тогда у него существует невырожденное преобразование $M^{-1} : y \to z$. Согласно формуле (5.11), это преобразование приводит форму FL к виду

$$(FL)M^{-1} = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + b z_n^2.$$

Для доказательства положительной определенности формы F используем линейное преобразование $L_2 = LM$, где $|A_{L_2}| \neq 0$, так как L_2 — невырожденное преобразование. Тогда $b = D(FL_2) = D(F)|A_{L_2}|^2 > 0$. Получаем, что $p = n$, тогда из теоремы 5.7.1 следует, что форма F — положительно определена. □

Следствие 5.7.2.1. Для того, чтобы действительная квадратичная форма F была отрицательно определенной необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы этой формы A_F чередовались, начиная со знака минус.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если матрица A_F имеет угловые миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, то матрица A_{-F} формы $-F$ будет иметь своими угловыми минорами $\Delta'_k = (-1)^k \Delta_k$. Тогда справедлива следующая цепочка равносильных условий:

квадратичная форма F является отрицательно определенной $\Leftrightarrow$

квадратичная форма $-F$ является положительно определенной $\Leftrightarrow$

$\Delta'_k = (-1)^k \Delta_k > 0 \Leftrightarrow$

$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0, \ldots.$ □