ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского"

# ГЕОМЕТРИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

А.В. Гохман

Саратов
2014

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....3
Глава 1. Симплектическое многообразие.....4
1.1. Симплектическое линейное пространство.....4
1.2. Симплектическое многообразие.....7
Глава 2. Гамильтоновы векторные поля.....10
2.1. Гамильтоновы векторные поля.....10
2.2. Скобка Пуассона.....13
Приложение 1
Алгебра внешних форм.....17
Приложение 2
Дифференцирования и антидифференцирования в алгебре дифференциальных форм на многообразии.....19
Литература.....22

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В VIII веке в результате изучения движения голономных консервативных механических систем с $n$ степенями свободы были получены Лагранжем уравнения, представляющие собой систему $n$ дифференциальных нелинейных уравнений 2-го порядка. Эти уравнения оказались весьма трудными для их исследования и тем более полного решения. В XIX веке Гамильтону удалось преобразовать эту систему к системе $2n$ дифференциальных уравнений, но уже уравнений 1-го порядка и своеобразной структуры. Эта так называемая гамильтонова система дифференциальных уравнений позволила значительно продвинуть рассматриваемую задачу и теорию дифференциальных уравнений вообще. Наконец, развитие дифференциальной геометрии в XX веке привело к возможности интерпретировать гамильтонову систему дифференциальных уравнений как векторное поле так называемого симплектического многообразия, что позволило глубже понять природу гамильтоновых уравений и способствовать расширению возможности их интегрирования.

Настоящее пособие можно рассматривать как элементарное введение в круг идей геометрического понимания теории гамильтоновых систем и соответствующих методов дифференциальной геометрии.

В работе проведено ряд подробных доказательств и вычислений, основанных на материале, приведенном в приложениях.

## Глава 1. Симплектическое многообразие

Систему дифференциальных уравнений Гамильтона можно смоделировать некоторым векторным полем на симплектическом многообразии, изучению которого полезно предпослать знакомство с симплектическим линейным пространством, которым оказывается каждое касательное пространство к симплектическому многообразию.

### 1.1. Симплектическое линейное пространство

Четномерное линейное пространство $V^{2n}$ называется *симплектическим*, если в нем задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма (см. Приложение 1). Иногда эту формулу трактуют как кососклярное произвдение векторов и обозначают символом $<\vec{v},\vec{w}>$.

Таким образом, кососкалярное произведение определяется свойствами

1. $<\vec{v},\vec{w}>=-<\vec{w},\vec{v}>$;
2. $<\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}>=<\vec{v}_1,\vec{w}>+<\vec{v}_2,\vec{w}>$;
3. $<k\vec{v},\vec{w}>=k<\vec{v},\vec{w}>, k\in R$;
4. $(\forall\vec{v}\neq 0)\ (\exists\vec{w})\ <\vec{v},\vec{w}>\neq 0$.

Если $<\vec{v},\vec{w}>=0$, то векторы $\vec{v},\vec{w}$ называются *кософртогональными.* Например, два коллинеарных вектора —кософртогональны.

Заметим, что симплектическая структура не может быть определена в нечетномерном линейном пространстве из-за невырожденности формы и четности ее ранга. В качестве примера симплектического линейного пространства рассмотрим $2n$-мерное координатное действительное пространство $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. пространство всех упорядоченных $2n$-ок действительных чисел

$$\mathbb{R}^{2n}=\{(r_1,...,r_{2n})|r_A\in\mathbb{R}\}.$$

Оно является линейным с фиксированным базисом $\vec{e}_A=(0,...,r_A,...,0)$. Обозначим координатные функции относительно этого канонического базиса через $x^A$, т.е. $x^A((r_1,...,r_{2n}))=r_A$. Очевидно, что каждая такая координатная функция является на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ линейной формой, а их попарные произведения $x^A\wedge x^B$ билинейными кососимметричными формами (см. приложение 1). Учитывая, что элементы матрицы $\omega_{AB}$ этой формы равны $\omega(\vec{e}_A,\vec{e}_B)$, видим, что форма $\omega$ невырождена. С симплектичесим линейным пространством $V^{2n}$ связан некоторый канонический изоморфизм $I_\omega$, определяемый

формулой
$$I_\omega(\vec{v}) = i_{\vec{v}}\omega, \qquad (1.2)$$
другими словами (см. Приложение 1), $(I_\omega(\vec{v}))(\vec{w}) = \omega(\vec{v}, \vec{w})$.

Линейность отображения $I_\omega$ следует, очевидно, из билинейности формы, а инъективность из-за невырожденности формы $\omega$. В координатах относительно базиса $(\vec{e}_A)$ и его сопряженного $(\varepsilon^B)$ канонический изоморфизм задается формулой
$$(I_\omega(\vec{v}))_A = v^B\omega_{AB}$$
или
$$v^B = \alpha_A\omega^{AB} \qquad (1.3)$$
где $(\omega^{AB})$ обратная матрица к матрице $(\omega_{BC})$.

Другим важным свойством симплектического линейного пространства является существование в нем класа специальных базисов. Этот факт следует из известной, так называемой линейной теоремы Дарбу.

**Теорема.** *Для любой внешней (кососимметриченой) билинейной формы $\alpha$ в $n$-мерном линейном пространстве $V$ существует целое неотрицательное число $s$, $2s < n$ и такой базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ в пространстве $V$, что*
$$\alpha = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4 + ... + \varepsilon^{2s-1} \wedge \varepsilon^{2s}, \quad \varepsilon^i(\vec{e}_k) = \delta^i_k. \qquad (1.4)$$

**Доказательство.** Учитывая, что нам нужно доказать существование такого базиса, для которого
$$< \vec{e}_1, \vec{e}_2 >=< \vec{e}_3, \vec{e}_4 >= ... =< \vec{e}_{2s-1}, \vec{e}_{2s} >= 1, \quad < \vec{e}_2, \vec{e}_1 >= ... = -1$$
и для остальных пар базисных векторов их кососкалярное произведение равно нулю. Доказательство проводится методом математической индукции по размерности пространства $V$. Для $n = 0, 1$ теорема справедлива, так как в этих пространствах имеются только нулевые билинейные формы. Пусть, теперь, $n \geq 2$. При этом будем предполагать, что рассматриваемые формы отличны от нуля, ибо, в противном случае, теорема очевидно справедлива.

Итак, пусть теорема справедлива для всех размерностей, меньших $n$. Докажем ее справедливость для размерности $n$. Так как форма $\alpha \neq 0$, то найдутся два неколлинеарных вектора (причем первый из них может быть любым, отличным от нуля) $x_0$, $y_0$ таких, что возьмем тогда в качетсве первых двух векторов

$$\vec{e}_1 = x_0, \quad \vec{e}_2 = \frac{y_0}{\alpha(x_0, y_0)}$$

и заметим, что $< \vec{e}_1, \vec{e}_2 > \neq 0$.

Рассмотрим, далее, ядра линейных отображений $I_\omega(\vec{e}_1)$, $I_\omega(\vec{e}_2)$. Так как $\dim ker I_\omega(\vec{e}_i) = n-1$ и эти ядра не совпадают, то $\dim P = ker I_\omega(\vec{e}_1) \cap I_\omega(\vec{e}_2) = n-2$. Кроме того, пересечение подпространства $P$ и подпространства $B$, натянутого на векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ пусто. Следовательно,

$$V = P \oplus B.$$

По предположению индукции в подпространстве $P$ для формы $\alpha|_P$ существует искомый базис $(\vec{e}_3, \vec{e_4}, ..., \vec{e}_{2s})$. Учитывая, что векторы $\vec{e}_3, \vec{e_4}, ..., \vec{e}_{2s}$ принадлежат ядрам $ker I_\omega(\vec{e}_i)$, получаем, что система векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e_4}, ..., \vec{e}_{2s})$ образует искомый базис, то есть имеет место разложение (1.4). Полученный базис будем называть *каноническим.*

При изучении и использовании симплектического линейного пространства канонический баис заменяется базисом $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n)$, полученным путем перенумеровки базисных векторов, так что

$$\alpha = {}'\varepsilon^1 \wedge {}'\varepsilon^{n+1} + ... + {}'\varepsilon^n \wedge {}'\varepsilon^{2n}. \tag{1.5}$$

Этот базис называют иногда *симплектическим.* Соответствующая ему матрица формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

В симплектическом базисе кососкалярное произведение выражается в координатах формулой

$$< \vec{v}, \vec{w} > = (v^1 w^{n+1} - v^{n+1} w^1) + ... + (v^n w^{2n} - v^{2n} w^n). \tag{1.7}$$

Отметим еще одно важное следствие теоремы Дарбу. Линейное биективное отображение $h$ одного симплектического пространства $(V_1^{2n}, \omega_1)$ в другое $(V_2^{2n}, \omega_2)$ называется симплектическим изоморфизмом, если

$$\omega_2(h\vec{v}, h\vec{w}) = \omega_1(\vec{v}, \vec{w}).$$

Так вот любые два симплектических пространства одинаковой размерности симплектически изоморфны. В частности, они все изоморфны стандартному симплектическому линейному пространству $\mathbb{R}^{2n}$.

## 1.2. Симплектическое многообразие

Четномерное дифференцируемое многообразие $M^{2n}$ называется симплектическим многообразием, если на нем задана замкнутая и невырожденная дифференциальная 2-форма $\omega$.

Невырожденность формы означает ее невырожденность в каждой точке многообразия. Ясно, что в каждой точке $x$ симплектического многообразия форма $\omega_x$ определяет симплектическую линейную структуру в касательном пространстве к этой точке.

В качестве первого примера симплектического многообразия рассмотрим координатное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ как $2n$-мерное дифференцируемое многообразие с атласом, определяемым картой $id : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.

Дифференциалы канонических координатных функций $dx^1, ..., dx^{2n}$ являются линейными дифференциальными формами, к тому же базисными. Построим из них дифференциальную 2-форму на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Очевидно, что эта форма замкнута, так как $ddx^i = 0$ и невырожденна, что видно, например, из ее разложения по теореме Дарбу в каждой точке.

В качестве второго важнейшего примера рассмотрим кокасательное расслоенное пространство над $n$-мерным многообразием $X$:

$$T^*(X) \xrightarrow{q} X.$$

Пусть $u^\gamma$ локальные координатные функции на базе. Тогда так называемые предпочитаемые координатные функции на соответствующей области пространства $T^*(X)$ определяются следующим образом

$$q^\gamma = u^\gamma \circ q, \quad p_\gamma = \frac{\partial}{\partial u^\gamma}, \quad p_\gamma(\alpha) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\right).$$

Оказывается, что на многообразии $T^*(X)$ естественным образом задается симплектическая структура. Для этого сначала строится так называемая форма Лиувилля (1-форма действия) на $T^*(X)$. Пусть $\alpha$ точка многообразия $T^*(X)$, то есть линейная форма в пространстве $T_{q(\alpha)}(X)$. Рассмотрим касательное пространство $T_\alpha(T^*(X))$ в этой точке к многообразию $T^*(X)$ и определим в нем линейную форму $\lambda_\alpha$ следующим образом.

Пусть $\vec{\xi}$ касательный вектор в точке $\alpha$ к многообразию $T^*(X)$. Применим к нему касательное отображение к канонической проекции $q$ : $q_*$ :

$T_\alpha(T^*(X)) \to T_{q(\alpha)}(X)$. Получим касательный вектор в точке $q(\alpha)$ к многообразию $X$. Наконец, возьмем знамение формы $\alpha$ на этом векторе. Обозначим его $\lambda_\alpha(\vec{\xi})$. Таким образом,

$$\lambda_\alpha(\vec{\xi}) = \alpha(q_*(\vec{\xi})). \tag{2.1}$$

Так как $\alpha$ и $q_*$ линейны, то и $\lambda_\alpha$ также линейное отображение

$$\lambda_\alpha : T_\alpha(T^*(X)) \to \mathbb{R}.$$

Итак, мы получили линейную форму в кажой точке многообразия $T^*(X)$. Остается доказать, что построенное поле форм на $T^*(X)$ дифференцируемо. Для этого перейдем к локальным координатам. В локальных координатах $q^\gamma$, $p_\gamma$ имеем

$$\lambda = A_\gamma(q,p)dq^\gamma + B^\gamma(q,p)dp_\gamma.$$

Вычислим коэффициенты

$$A_\gamma = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\right) = \alpha\left(q_*\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\right) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\right) = p_\gamma;$$

$$B^\gamma = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial p^\gamma}\right) = \alpha\left(q_*\frac{\partial}{\partial p^\gamma}\right) = \alpha(0) = 0.$$

Таким образом,

$$\lambda = p_\gamma dq^\gamma, \tag{2.2}$$

откуда видно, что построенная форма дифференцируема. Теперь симплектическая структура на многообразии $T^*(X)$ задается формой

$$\omega = d\lambda \tag{2.3}$$

или в локальных координатах

$$\omega = dp_\gamma \wedge dq^\gamma. \tag{2.4}$$

Из чего следует, что форма $\omega$ замкнута и невырожденна.

Так как касательное пространство к симплектическому многообразию является симплектическим линейным пространством, то определено послойное отображение

$$I_\omega : T(M^{2n}) \leftrightarrow T^*(M^{2n}), \tag{2.5}$$

которое в свою очередь в силу (1.3) определяет изоморфизм линейных пространств векторных полей и линейных дифференциальных форм

$$I_\omega : \Xi(M^{2n}) \to \Lambda^*(M^{2n}), \tag{2.6}$$

Другое важнейшее свойство симплектического многообразия следует из теоремы Дарбу:

Для любой точки симплектического многообразия $x \in M^{2n}$ найдется такая локальная карта $k = (U, k)$ с координатными функциями $x^1, ..., x^n, y_1, .., y_n$, что в пределах этой карты форма выражается следующим образом

$$\omega = dx^\gamma \wedge dy_\gamma.$$

Заметим, что в приведенных выше примерах оказались именно такие координаты, называемые координаты Дарбу или симплектическими координатами. Заметим также, что утверждение этой теоремы Дарбу в противоположность линейной теореме далеко не очевидно, ибо идет речь о существовании голономного поля канонических базисов.

## Глава 2. Гамильтоновы векторные поля

В этой главе будут определены гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии и скобки Пуассона, являющиеся эффективными инструментом интегрирования этих полей.

### 2.1. Гамильтоновы векторные поля

Пусть $M^{2n}$ симплектическое многообразие. Как было установлено выше с ним связан линейный изоморфизм

$$I_\omega : \Xi(M^{2n}) \to \Lambda^*(M^{2n})$$

между линейными пространствами векторных полей и линейных дифференциальных форм многообразия $M^{2n}$. При этом векторное поле $\vec{\xi}_\alpha$, соответствующее замкнутой линейной дифференциальной форме $\alpha$, называется локально гамильтоновым. В случае, если эта форма $\alpha = -dH$ точна, то векторное поле $\vec{\xi}_{\alpha H}$, обозначаемое также $\vec{\xi}_H$, где

$$i_{\vec{\xi}_H}\omega = -dH \tag{3.1}$$

будем называть гамильтоновым с гамильтонианом $H$ (знак минус берется для несущественного согласования с классическим представлением в координатах соовтетсвующей гамильтоновой системы дифференциальных уравнений).

В произвольных координатах локально гамильтоново поле выражается согласно формуле $\xi_h^A = \alpha_C \omega^{CA}$, $A, C = 1, 2, ..., 2n$.

Найдем теперь гамильтоново поле с гамильтонианом $H$ в координатах Дарбу $q^i$, $p_k$ с симплектической формой (например, в фазовом многообразии $T^*(M^n)$) $\omega = dp_i \wedge dq^i$. Пусть

$$\vec{\xi}_H = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_k \frac{\partial}{\partial p_k},\ i, k = 1, 2, ..., n$$

гамильтоново поле, соответствующее дифференциалу

$$-dH = -\frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k.$$

Тогда

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = (I_\omega(\vec{\xi}_H)) = \omega\left(\vec{\xi}_H, \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_k \wedge dq^k \left(\vec{\xi}_H, \frac{\partial}{\partial q^i}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} dp_k(\vec{\xi}_H) & dp_k\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \\ dq^k(\vec{\xi}_H) & dq^k\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{\xi}_H)_k & 0 \\ (\vec{\xi}_H)^k & \delta_i^k \end{vmatrix} = (\vec{\xi}_H)_i.$$

(см. Приложение 1).

Далее,

$$-\frac{\partial H}{\partial p_k} = \omega\left(\vec{\xi}_H, \frac{\partial}{\partial p_k}\right) = -\xi_H^k.$$

Таким образом, система уравнений интегральных кривых гамильтонова поля будет иметь вид

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{3.2}$$

то есть совпадать с гамильтоновой системой дифференциальных уравнений. В качестве примера гамильтонова векторного поля рассмотрим так называемый геодезический поток риманова пространства.

Пусть $V^n$ риманово пространство с метрическим тензором $a_{ij}$. В локальных координатах $q^i$ риманова пространства геодезические пути в пространстве $V^n$ определяются системой уравнений

$$\ddot{q}^i = -\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k, \tag{3.3}$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}a^{il}(\partial_j a_{kl} + \partial_k a_{lj} - \partial_l a_{jk}).$$

Рассмотрим теперь касательное раслоенное пространство $T^*(V^n)$ симплектической структурой $\omega = dp_k \wedge dq^k$ и гамильтонианом$H = \frac{1}{2}a^{ij}p_ip_j$. Пусть$\gamma : q^i = g^i(t), p_i = p_i(t)$ интегральные кривые соответсвующего векторного поля $\vec{\xi}_H$. Тогда каноническая проекция $\gamma \circ q$ каждой такой кривой на базу $V^n$ является геодезическим путем риманова пространства $V^n$. Действительно, в данном случае гамильтонова система уравнений имеет вид

$$\frac{dq^i}{dt} = a^{ik}p_k, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2}\partial_i a^{jk}p_jp_k, \tag{3.5}$$

Исключая из этой системы переменные $p_i$, мы получим дифференциальные уравнения для функций $q^i(t)$, совпадающие с уравнениями геодезических путей (3.3).

Этот пример, конечно, связан с задачей о движении консервативной голономной системы, определяемого уравнениями Лагранжа, если от риманова пространства перейти к пространству Финслера.

Стандартный путь к интегрированию, в частности, гамильтоновых уравнений лежит через нахождение первых ингтералов. Один из методов нохождения первых интегралов гамильтонова векторного поля связан с теоремой Э. Нетер. Рассмотрим один из вариантов этой теоремы (см. [1]). Рассмотрим гамильтоново векторное поле на фазовом многообразии $T^*(M^n)$ и прежде, чем формулировать теорему, введем в рассмотрение некоторое понятие, которое назовем лифтом Лиувилля векторного поля на пространстве $M^n$. А именно, имеет место следующая лемма ([1], С. 134).

Для всякого векторного поля $\eta$ на многообразии $M^n$ существует и при том единственное векторное поле $Z$ на многообразии $T^*(M^n)$ такое, что

$$1.\, q_* Z = \eta, \tag{3.6}$$

$$2.\, L_Z \lambda = 0, \tag{3.7}$$

где $L_Z$ производная Ли вдоль векторного поля (см. Приложение 2), а $\lambda$ форма Лиувилля, рассмотренная нами ранее на многообразии $T^*(M)$. Мы рассмотрим ниже только доказательство единственномти лифта, чтобы получить явные выражения коэффициентов его в координатах (Существование см. в [1], С. 134).

Итак, пусть векторное поле $Z$ существует и пусть в предпочитаемых координатах $q^i$, $p_i$, где $u^i \circ q = q^i$, а $u^i$ координаты на базисе. Поле имеет вид

$$Z|_u = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Z_{n+k} \frac{\partial}{\partial p_k}, \tag{3.8}$$

а поле $\eta$ на базе

$$\eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{3.9}$$

Согласно первого условия $q_* Z = \eta$, откуда следует, что

$$Z^i(u^k \circ q) = \eta^i(u^k).$$

Далее рассмотрим второе условие

$$L_Z \lambda = 0 \Leftrightarrow i_Z d\lambda + d i_Z \lambda = 0 \Leftrightarrow i_Z \omega + d i_Z \lambda = 0 \Leftrightarrow Z_{n+i} dq^i - Z^k dp_k + d\lambda(Z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$= Z_{n+i} dq^i - Z^k dp_k + d((p_i dq^i)(Z)) = 0 \Leftrightarrow Z_{n+i} dq^i - Z^k dp_k + d(p_i Z^i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$= Z_{n+i} dq^i - Z^k dp_k + dp_i Z^i + p_i dZ^i = 0 \Leftrightarrow Z_{n+i} dq^i + p_i \frac{\partial Z^i}{\partial q^k} dq^k + p_i \frac{\partial z^i}{\partial p_k} dp_k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z_{n+i} = -p_k \frac{\partial Z^k}{\partial q^i}$$

$$Z_{n+i} = -p_k \frac{\partial Z^k}{\partial q^i}. \tag{3.10}$$

Таким образом, лифт Лиувилля векторного поля $\eta^i$ имеет вид

$$Z = \eta^l(u^i)\frac{\partial}{\partial q^l} - p_l \frac{\partial \eta^l}{\partial u^m}\frac{\partial}{\partial p_m}. \tag{3.12}$$

Перейдем к формулировке и доказательству теоремы.

**Теорема.** *Пусть $\xi_H$ гамильтоново векторное поле на $T^*(M)$, а лифт Лиувилля $Z$ некоторого векторного поля $\eta$ на $M$ удовлетворяет условию $dH(Z) = 0$ (то есть гамильтониан является первым интегралом поля). Тогда функция $\lambda(Z)$ является первым интегралом поля $\xi_H$.*

**Доказательство.**

$$\xi_H(\lambda(Z)) = \xi_H(\lambda(Z)) - 0 = \xi_H(\lambda(Z)) - (L_Z\lambda)(\xi_H) =$$

$$= \xi_H(\lambda(Z)) - ((di_Z)\lambda(\xi_H) + (i_Z d\lambda)(\xi_H)) = \xi_H(\lambda(Z)) - (d\lambda(Z)(\xi_H) + (i_Z\omega)(\xi_H)) =$$

$$= \xi_H(\lambda(Z)) - \xi_H(\lambda(Z)) - (i_Z\omega)(\xi_H) = -i_Z\omega(\xi_H) = -\omega(Z, \xi_H) = \omega(\xi_H, Z) =$$

$$= i_{\xi_H}\omega(Z) = dH(Z) = ZH = 0.$$

## 2.2. Скобки Пуассона

Мы видели, что канонический изоморфизм $I_\omega : \Xi(M^{2n}) \Leftrightarrow \Lambda^{'}(M^{2n})$ позволяет выделить класс специальных векторных полей (локально гамильтоновых и гамильтоновых). Используя эту идею можно сопоставить известной операции "скобка Ли"над векторными полями операцию над линейными дифференциальными формами $\alpha, \beta \in \Lambda^{'}(M^{2n})$

$$[\alpha, \beta] = I_\omega([\xi_\alpha, \xi_\beta]), \quad \xi_\alpha, \xi_\beta = I_\omega^{-1}(\alpha), I_\omega^{-1}(\beta). \tag{4.1}$$

Назовем ее также скобкой Ли. Эта двойственная операция обладает свойствами, аналогичными свойствам операции скобки Ли над векторными полями, а именно

1) $[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha]$;
2) $[\alpha_1, +\alpha_2, \beta] = [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta]$;

$$3)[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha]\beta] = 0; \qquad (4.2)$$
$$4)[\alpha, f\beta] = (\xi_\alpha f)\beta + f[\alpha, \beta].$$

Кроме того, имеет место следующая важная **теорема**:

*Скобка Ли двух замкнутых линейных дифференциальных форм является точной формой.*

**Доказательство.** При доказательстве будут использованы свойства внутренней производной $i_\xi$ и свойства производной Ли $L_\xi = i_\xi d + di_\xi$, в частности, равенство $i_{[\xi_1,\xi_2]} = [L_{\xi_1}, L_{\xi_2}]$ (см. Приложение 2). Итак, пусть $d\alpha = d\beta$.

Вычислим скобку Ли этих форм:

$$[\alpha, \beta] = i_{[\xi_\alpha,\xi_\beta]}\omega = [L_{\xi_\alpha}, i_{\xi_\beta}]\omega = L_{\xi_\alpha} i_{\xi_\beta}\omega - i_{\xi_\beta} L_{\xi_\alpha}\omega = L_\xi \beta - i_{\xi_p} L_{\xi_\alpha}\omega =$$

$$= di_{\xi_\alpha}\beta + i_{\xi_\alpha} d\beta - i_{\xi_\beta}(di_{\xi_\alpha} + i_{\xi_\alpha} d)\omega = di_{\xi_\alpha}\beta = d\beta(\xi_\alpha) = d(i_{\xi_\beta}\omega)(\xi_\alpha) =$$
$$= d\omega(\xi_\beta, \xi_\alpha) = d(-\omega(\xi_\alpha, \xi_\beta)).$$

Таким образом, скобка Ли замкнутых форм оказалась не только замкнутой, но и точной. Отсюда также следует, что скобка Ли векторных полей является гамильтоновым векторным полем. Заметим, что если $\alpha = df$, $\beta = dg$, то

$$[df, dg] = d(-\omega(\xi_{df}, \xi_{dg})).$$

Из последнего равенства естественно напрашивается операция над гладкими функцями $f$ и $g$, перестановочная с внешним произведением, а именно, полагая для краткости, тогда $\xi_{df} = \xi_f$

$$\{f, g\} = -\omega(\xi_f, \xi_g) \qquad (4.3)$$

так, что

$$d\{f, g\} = [df, dg]. \qquad (4.4)$$

Эта операция называется скобкой Пуассона функций $f$ и $g$.

**Замечание**. Исторически эта операция была первоначальной. Поэтому, например, В.И.Арнольд скобку Ли векторных полей также называет скобкой Пуассона. Скобка Пуассона также определяется несколько в другой форму, что следует из равенств

$$\{f, g\} = -\omega(\xi_f, \xi_g) = \omega(\xi_f, \xi_g) = (i_{\xi_g}\omega)(\xi_f) = dg(\xi_f) = \xi_f g.$$

Таким образом,

$$\{f,g\} = \xi_f g = -\xi_g f \tag{4.5}$$

Скобка Пуассона играет важную роль в интегрировании гамильтоновых векторных полей, а также приводит к теории Пуассоновых многобразий.

Рассмотрим *свойства скобок Пуассона.*

1. Антисимметричность $\{f,g\} = -\{g,f\}$. (4.6)

2. Билинейность $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$. (4.7)

3. Тождество Якоби $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$. (4.8)

4. Свойство Лейбница $\{f, gh\} = h\{f,g\} + g\{f,h\}$. (4.9)

5. Невырожденность:

если в точке $x \in M^{2n}$ $df_x \neq 0$, то $(\exists g)\ \{f,g\}(x) \neq 0$. (4.10)

Доказательства свойств скобки Пуассона.

1,2 свойства очевидны. Тождества Якоби следует из равенств

$$\{f,\{g,h\}\} = \xi_f\{g,h\} = \xi_f\xi_g h, \quad \{g,\{h,f\}\} = \xi_g\{h,f\} = -\xi_g\xi_f h,$$

$$\{h,\{f,g\}\} = -\xi_{d\{f,g\}}h = -\xi_{[df,dg]}h = -[\xi_f,\xi_g]h.$$

4. $\{f,gh\} = -\omega(\xi_{df},\xi_{dg}) = -\omega(\xi_{df},\xi_{hdg+gdh}) = -\omega(\xi_{df},\xi_{hdg}) - \omega(\xi_{df},\xi_{gdh}) = -h\omega(\xi_f,\xi_g) - g\omega(\xi_f,\xi_h) = h\{f,g\} + g\{f,h\}$.

5. Сначала используя понятие функции Урысона, показываем существование гладкой функции $g$ такой, что $(dg)_x = \alpha$, где $\alpha$ наперед заданная функция линейная форма в точке $x$. Далее из того, что по условию $(df)_x \neq 0$ и, следовательно, $\xi_f \neq 0$. Существует вектор $w$ такой, что $\omega(\xi_f, w) \neq 0$. И если $\alpha = I_\omega w$, то найдется гладкая функция $g$ такая, что $(dg)_x = \alpha$. А это значит, что $w = \xi_g$ и таким образом $\omega(\xi_f,\xi_g) \neq 0$ и, следовательно, $\{f,g\}_x \neq 0$.

Как видно из доказанных свойств 1–3, алгебра гладких функций на $M^{2n}$ образует алгебру Ли. Наконец, известно [2, с. 32], что скобки Пуассона, удовлетворяющие свойствам 1–5 на четномерном многообразии определяют симплектическую структуру на этом многообразии. Это теорема Дирака.

Выразим скобку Пуассона в координатах Дарбу $q^i, p_j$ с симплектической формой $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Имеем $\{f,g\} = \xi_f g = \xi_f^A \frac{\partial g}{\partial u^A} = \xi_f^i \frac{\partial g}{\partial q^i} + \xi_f^{i+n} \frac{\partial g}{\partial p_i}$, где $A = 1, 2, ..., 2n$.

Ранее было показано, что $\xi_f^i = -\frac{\partial f}{\partial q^i}$, $\xi_f^{i+n} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$.

Таким образом,

$$\{f,g\} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{4.11}$$

Учитывая, что

$$\left\{q^i H\right\} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \{p_i H\} = \frac{\partial H}{\partial q^i},$$

получаем гамильтонову систему в виде

$$\dot{q} = -\left\{q^i, H\right\}, \quad \dot{p} = \{p_i, H\} \tag{4.12}$$

В заключение приведем известную теорему Пуассона о первых интегралах.

**Теорема Пуассона.** Пусть $f$ и $g$ первые интегралы гамильтонова векторного поля с гамильтонианом $H$. Тогда их скобка Пуассона также является первым интегралом этого поля.

Сначала заметим, что $\xi_H = \left\{H, H\right\} = 0$ в виду функция $H$–первый интеграл. Затем отметим, что равенство $\left\{f, H\right\} = 0$ является необходимым и достаточным условием того, что $f$ первый интеграл. Наконец, из тождества Якоби для скобки Пуассона следует сама теорема.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Алгебра внешних форм

Пусть $V^n = V$ вещественное линейное пространство размерности $n$. Пусть далее $\times^p V$ декартова степень множества $V$ и $\mathbb{R}$ поле вещественных чисел. Отображение $\times^p V \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, называется полилинейной формой порядка $p$ на пространстве $V$. Множество всех полилинейных форм порядка $p$ образует линейное пространство $L^p$ относительно естественных операций сложения и умножения на вещественные числа. В частности, пространство $L^{'}$ есть ничто иное, как пространство $V^*$, сопряженное к $V$. В множестве $L$ всех полилинейных форм вводится операция тензорного умножения

$$\alpha \otimes \beta(v_1, v_2, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+q}) = \alpha(v_1, v_2, ..., v_p)\beta(v_{p+1}, ..., v_{p+q}), \qquad (5.1)$$

где $\alpha \in L^p$, $\beta \in L^q$, $v_i \in V$.

Если $(\varepsilon^i)$ какой-нибудь базис в пространстве $V^*$, то упорядоченная система форм $(\varepsilon^{i_1} \otimes \varepsilon^{i_2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{i_p})$ образует базис в пространстве $L^p$ и таким образом $\dim L^p = n^p$.

Пусть $S_p$ группа подстановок порядка $p$. Пусть $s \in S_p$ и $\alpha \in L^p$. Тогда определяется действие на пространстве $L^p$

$$(s\alpha)(v_1, v_2, ..., v_p) = \alpha(v_{s^{-1}(1)}...v_{s^{-1}(p)}). \qquad (5.2)$$

Оно удовлетворяет условиям

$$s(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = l_1(s\alpha_1) + l_2(s\alpha_2), \quad (s_2 \circ s_1)\alpha = s_2(s_1\alpha). \qquad (5.3)$$

Условиями

$$s\alpha = \alpha, \quad s\alpha = (\operatorname{sing} s)\alpha$$

определяются симметричные и кососимметричные формы. Кососимметричные формы называют еще внешними. Мы их и будем в дальнейшем рассматривать. Их множество порядка $p$ образует линейное пространство. В множестве внешних форм вводится операция, называемая внешним умножением

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta), \qquad (5.4)$$

где

$$\mathrm{Alt}(\alpha) =_{s \in S_p} \sum (\operatorname{sing} s) s\alpha. \qquad (5.5)$$

Например, для линейных форм

$$\alpha \wedge \beta(v, w) = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \alpha(w) \\ \beta(v) & \beta(w) \end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

Операция внешнего умножения обладает следующими основными свойствами:

$$\begin{aligned} &1.\ (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\ &2.\ (\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta, \\ &3.\ k(\alpha \wedge \beta) = (k\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (k\beta),\ k \in \mathbb{R}, \\ &4.\ \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Внешняя форма называется *разложимой*, если ее можно представить как внешнее произведение линейных форм

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_p, \quad \alpha_i \in L^1. \tag{5.8}$$

Полезна вычислительная формула для разложимой формы

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_p)(v_1, v_2, ..., v_p) = \det(\alpha_i(v_j)). \tag{5.9}$$

Оказывается, что упорядоченное множество разложимых форм $(\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_p})$, $i_1 < i_2 < ... < i_p$ образуют базис в пространстве $A^p$, состоящим из $C_n^p$ элементов. Таким образом,

$$\dim A^p = C_n^p \tag{5.10}$$

и всякую внешнюю форму можно в координатах представить в виде

$$\alpha = \alpha_{i_1 i_2 ... i_p} \varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_p}, \quad i_1 < i_2 < ... < i_p. \tag{5.11}$$

Пусть $\alpha \in A^p$ внешняя форма, $p > 0$ и $x \in V$. Тогда можно определить отображение $i(x) : A^p \to A^{p-1}$, определяемое формулой

$$(i(x)\alpha)(v_1, v_2, ..., v_{p-1}) = \alpha(x, v_1, v_2, ..., v_{p-1}). \tag{5.12}$$

Эндоморфизм $i(x)$ алгебры внешних форм называется *внутренним произведением на элемент* $x$. При этом выполняются следующие свойства

$$\begin{aligned} &1.\ i(x + y) = i(x) + i(y), \\ &2.\ i(kx) = ki(x),\ k \in \mathbb{R}, \\ &3.\ i(x)i(y) = -i(y)i(x), \\ &4.\ i(x)\alpha \wedge \beta = (i(x)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(x)\beta,\ \alpha \in A^p,\ \beta \in A^q. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Доказательство последнего свойства представлено в книге [1].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

## Дифференцирования и антидифференцирования в алгебре дифференциальных форм на многообразии

Пусть $\alpha(x)$ поле внешних форм $p$ на дифференцируемом многообразии $M$. Пусть $(U,k)$ карта с координатными функциями $u^i$. Тогда дифференциалы $du^i$ образуют кобазис в каждом касательном пространстве $T_x(M)$, где $x \in U$, и мы можем представить поле форм $\alpha(x)$ в пределах области $U$ следующим образом

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}(u^m) du^{i_1} \dots du^{i_p}. \quad (6.1)$$

Если для каждой карты коэффициенты этого разложения будут дифференцируемыми функциями, то поле $\alpha(x)$ называется *дифференциальной формой порядка* $p$. Например, дифференциал гладкой функции $f$ на многообразии $M$ является линейной дифференциальной формой. Пространство дифференциальных форм порядка $p$ обозначается $\Lambda^p$, а связанная со всеми дифференциальными формами алгебра относительно операции внешнего умножения обозначается $\Lambda(M)$.

*Дифференцированием степени* $h$ *алгебры* $\Lambda(M)$ называется линейный эндоморфизм $D : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} &1.\ D\Lambda^l \subset \Lambda^{l+h}, \\ &2.\ D(\alpha \wedge \beta) = D(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D(\beta), \end{aligned} \quad (6.2)$$

для любых $\alpha$ и $\beta$ и четного $h$.

*Антидифференцированием степени* $h$ *алгебры* $\Lambda(M)$ называется линейный эндоморфизм $\bar{D} : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} &1.\ \bar{D}\Lambda^l \subset \Lambda^{l+h}, \\ &2.\ \bar{D}(\alpha \wedge \beta) = \bar{D}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \bar{D}(\beta), \end{aligned} \quad (6.3)$$

$\alpha \in A^p$, $h$ нечетное.

Для построения нужных нам примеров таких эндоморфизмов нам понадобится предложение, которое мы будем называть леммой о локализации.

**Лемма о локализации.** Пусть $M$ дифференцируемое многообразие и $D$ дифференцирование алгебры $\Lambda(M)$. Тогда для любого открытого множества $U \subset M$ существует и при том единственное дифференцирование $D_U$ алгебры $\Lambda(U)$ такое, что

$$(D_\mu)|_U = D_U(\mu|_U), \quad (\forall \mu) \in \Lambda(M). \quad (6.4)$$

**Доказательство.** Пусть $y \in U$ и $\mu \in \Lambda(M)$. С помощью функции Урысона сторим дифференциальную форму $\bar{\mu} \in \Lambda(M)$, совпадающую с формой $\mu|_U$ в некоторой окрестности точки $y$, и определяем

$$(D_U \mu|_U)(y) = D(\bar{\mu})(y). \tag{6.5}$$

Покажем, что это определение не зависит от выбора формы $\bar{\mu}$. Итак, пусть $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$ две продолженные формы. Тогда в некоторой окрестности точки $y$ функция Урысона $\theta = \theta_1 \wedge \theta_2$ будет такова, что

$$\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 = (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)(1 - \theta)$$

Откуда $D\bar{\mu}_1(y) - D\bar{\mu}_2(y) = D(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)(y) = D(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)(1 - \theta)(y) = (D(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \wedge (1-\theta))(y) + ((\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \wedge D(1-\theta))(y) = (D(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \cdot 0 + 0 \cdot D(1-\theta))(y) = 0.$

Аналогично формулируется и доказывается лемма и для антидифференцирования.

В качестве следствия этой леммы мы получаем важную для нас теорему об однозначной определимости дифференцирования (антидифференцирования).

**Теорема.** Пусть $D_1$ и $D_2$ дифференцирования одинаковой степени $h$ и пусть $D_1 f = D_2 f$, $D_1 dg = D_2 dg$. Тогда $D_1 = D_2$.

Доказательство теоремы следует из леммы о локализации и локального представления дифференциальной формы.

Приведем примеры нужных нам таких эндоморфизмов.

1. Внешнее дифференцирование. По определению это антидифференцирование степени $+1$, обозначаемое символом $d$ и определеяемое условиями

$$1.\, df = df, \quad 2.\, d(df) = 0 \tag{6.6}$$

(справа обычный дифференциал функции). Существование следует из локального определения

$$d(\alpha_{i_1 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{u^{i_p}}) = (d\alpha_{i_1 \dots i_p} du^{i_1}) \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{u^{i_p}} \tag{6.7}$$

и последующего распространения на все многообразие.

Если $d\alpha = 0$,то форма называется замкнутой; если к тому же $\alpha = d\beta$, то форма называется точной. Имеет место лемма Пуанкаре: замкнутая форма степени $p \geq 1$ на $\mathbb{R}^n$ точна.

2. Пусть $\xi$ векторное поле на $M$ и $\alpha \in \Lambda^p$ дифференциальная форма. Тогда по-точечное задание внутреннего произведения

$$(i_\xi \alpha)_x = i(\xi_x)\alpha_x \tag{6.8}$$

определяет антидифференцирование степени -1.

3. Рассмотрим следующую кобинацию построенных антидифференцирований

$$L_\xi = di_\xi + i_\xi d. \tag{6.9}$$

Непосредственно проверяется, что линейный эндоморфизм $L$ есть дифферецирование степени 0. Оно называется дифференцированием Ли вдоль векторного поля $\xi$.

Это дифференцирование совпадает с классическим дифференцированием Ли дифференциальных форм и обладает следующими свойствами:

$$\begin{array}{l} 1.\ L_\xi d = dL_\xi; \\ 2.\ L_{\xi+\eta} = L_\xi + L_\eta; \\ 3.\ L_{f\xi}\alpha = fL_\xi\alpha + df \wedge i_\xi\alpha; \\ 4.\ L_\xi i_\eta - i_\eta L_\xi = i_{[\xi,\eta]}; \\ 5.\ L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi = L_{[\xi,\eta]}. \end{array} \tag{6.10}$$

Чтобы доказать свойства 4 и 5 нужно проверить, что левая часть свойства 4 является антидифференцированием степени -1, а левая часть свойства 5 – дифференцированием степени 0. Затем применить теорему об однозначной определимости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1978, пер. с фран.

2. Арнольд В.И., Козлов В.В, Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. В сб. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". Итоги науки и тех. ВИНИТИ АН СССР. М., 1985. С. 3, 5-304.

3. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия. В сб. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". Итоги науки и тех. ВИНИТИ АН СССР. М., 1985. С. 4, 5, 139.

4. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970, пер. с англ.