Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Шаталина А.В., Кучер Н.А., Борисова Л.В.

Элементы векторной алгебры и аналитическая геометрия на плоскости

Учебное пособие для студентов

механико-математического, социологического, экономического,

геологического и физического факультетов.

Содержание

Введение

При изучении естественных наук часто приходится иметь дело с таким понятием как векторная величина или просто – вектор. Знать, что это такое и умение работать с векторами (или можно сказать по-другому: знать основы векторной алгебры) является наиглавнейшим условием успеха в изучении любой дисциплины, где встречаются векторные величины.

В векторной алгебре изучаются свойства линейных операций с векторами: сложение, умножение векторов на число, различные произведения векторов. В приложении к аналитической геометрии исследуются геометрические свойства векторов и их совокупности. В аналитической и теоретической механике на базе законов векторной алгебры исследуются движение и взаимодействие материальных тел и т.д.

Цель этого пособия состоит в том, чтобы помочь студентам при изучении раздела "Векторная алгебра", курсов "Аналитическая геометрия", "Геометрия", "Аналитическая геометрия и линейная алгебра". Вместе с кратким изложением теоретического материала пособие содержит приемы решения типовых задач, знание которых является необходимым условием понимания курса. Часть задач снабжена решениями.

Желаем успехов в изучении векторной алгебры!

Элементы векторной алгебры

ВЕКТОР КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ.

Определения:

Связанным вектором называется упорядоченная пара точек . Точка называется началом, точка – концом. Если начало и конец связанного вектора совпадают, то он называется *нулевым.*

Длиной (модулем) связанного вектора называется расстояние между его началом и концом.

Направлением, ненулевого связанного вектора называется направление луча, выходящего вершина которого совпадает с началом вектора и который содержит его конец. Направление нулевого связанного вектора считается произвольным.

Свободным вектором называется множество всех связанных векторов, длина и направление которых совпадают соответственно с длиной и направлением некоторого связанного вектора. Каждый связанный вектор, принадлежащий данному свободному вектору, называется представителем последнего. Любым своим представителем свободный вектор определяется полностью.

Длиною и *направлением* свободного вектора называется соответственно длина и направление любого его представителя.

Определения:

Противоположным для вектора называется вектор той же длины и противоположного направления; обозначается он , рис.1.

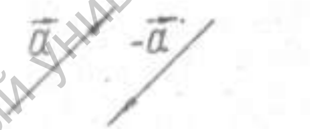


Рис. 1.

Два или большее число векторов называют *коллинеарными,* если их представители с общим началом лежат на одной прямой. Три или большее число векторов называется *компланарными,* если их представители с общим началом лежат в одной плоскости.

Перемещением называется отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между точками. Различают несколько видов перемещений: осевая симметрия, поворот, параллельный перенос. Простейшим перемещением является тождественное отображение Е плоскости на себя, которое любую точку отображает на себя: .

Параллельным переносом или *вектором* называется отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости смещаются в одном и том же направлении, называемом направлением вектора, на одно и то же расстояние , называемое *длиной вектора*.

Векторы обозначаются:

Нулевой вектор обозначается . Длина нулевого вектора считается равной нулю, а его направление считается произвольным.

Длина вектора обозначается .

Каждый вектор , отличный от нулевого, вполне характеризуется своим направлением и длиной.

Поэтому, если ненулевые векторы и сонаправлены и имеют равные длины, то эти векторы равны: .

Точку вектор отображает в точку , расположенную на луче направления вектора с началом в точке на расстоянии от этого начала (рис. 2).

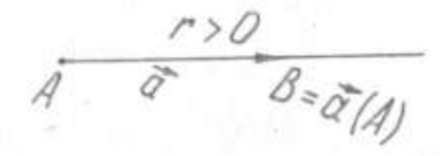


Рис. 2.

Способы задания векторов

Если задана упорядоченная пара точек и , то существует только один вектор, который переводит в . Этот вектор обозначают , тогда и только тогда, когда сонаправлены и .

На чертежах вектор изображают направленным отрезком с началом в точке и концом в точке .

Каждый вектор имеет бесконечно много изображений в виде направленных отрезков AB, для которых .

Отложить вектор от точки O – это значит построить направленный отрезок , для которого . Если два вектора имеют одинаковое направление, то это записывается: если – противоположное, то

Коллинеарные и компланарные векторы

Определения:

Вектор называется *линейной комбинацией векторов* если его можно представить следующим образом: , где - действительные числа, которые называются *коэффициентами линейной комбинации.*

Векторы называются *линейно зависимыми,* если существуют числа одновременно не равны нулю и такие, что

.

Теорема.

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Два вектора называются коллинеарными, если направления их совпадают или противоположны. Символ коллинеарности: .

- векторы коллинеарны;

- векторы неколлинеарны.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору: (где – любой вектор).

Нулевой вектор считается противоположным самому себе.

Три (и более) ненулевых вектора в пространстве называются компланарными, если лучи, задающие их направления, лежат на прямых, параллельных одной и той же плоскости. Если среди трех векторов имеется хотя бы один нулевой, то такие векторы также будем считать компланарными.

Пример 1.

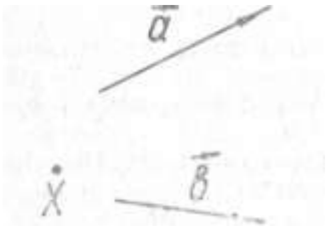


Рис. 3.

Даны векторы и и точка X (рис. 3).
Постройте точки:

1.
2.

Решение:

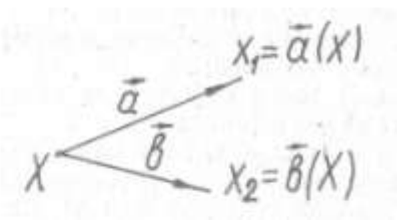


Рис. 4.

От заданной точки X отложим вектор . Точка искомая (рис. 4).

Аналогично находим точку . Для этого от точки X отложим вектор , получим точку .

Пример 2.

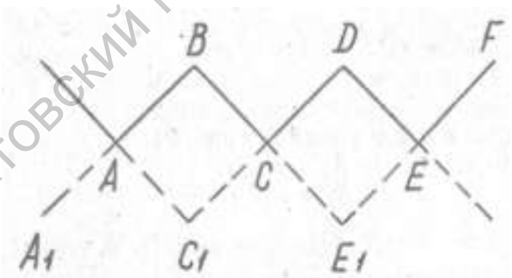


Рис. 5.

На рис. 5 изображена ломаная линия с равными звеньями и прямыми углами между смежными звеньями, она простирается влево и вправо. Что будет образом ее при параллельном переносе переводящем:

а) точку B в точку D;
б) точку B в точку A?

Решение:
а) При параллельном переносе, переводящем точку B в точку D, точка C перейдет в точку E и отрезок BC перейдет в отрезок CD, и так далее. Ломаная отобразится сама на себя.
б) При параллельном переносе, переводящем точку B в точку A, отрезок AB переходит в отрезок , так как . Отрезок BC – в отрезок , так как . То есть образом ломаной ABCDEF будет ломаная (рис. 5).

ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ

Сложение векторов

Пусть и два вектора. Произведем отображение и последовательно (рис. 7).

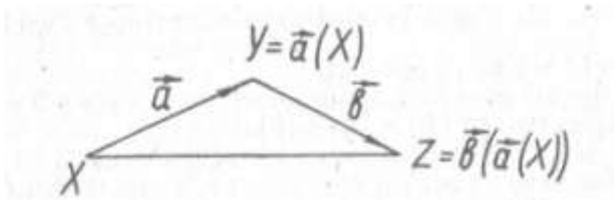


Рис. 7.

Произвольную точку X вектор отображает на точку , а вектор отображает точку на точку .

Результат последовательного выполнения отображений и – новое отображение, которое точку X отображает сразу на точку Z.

Это отображение есть вектор. Все точки плоскости оно перемещает в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Этот вектор называется суммой векторов и и обозначается **.**

Итак, суммой двух векторов и называется отображение плоскости на себя, являющееся результатом последовательного выполнения отображений векторов и **:**

.

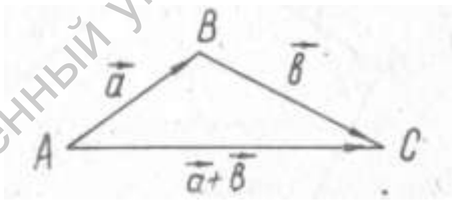


Рис. 8.

Чтобы сложить 2 вектора при помощи геометрического построения (рис. 8), отложим вектор от произвольной точки A: , а вектор – от точки B: . Тогда, зная, что и , получим , то есть

Последняя запись выражает правило треугольника для сложения векторов.

Правило многоугольника

Для сложения n векторов **,** (n пользуются следующим правилом: от произвольной точки O откладывают вектор (рис. 9)

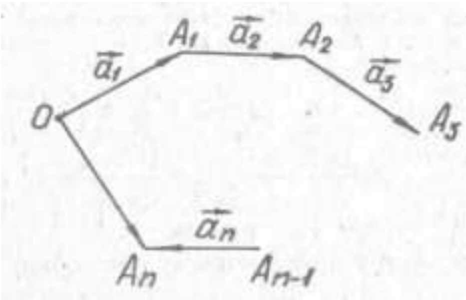


Рис. 9

, от точки , вектор , …, от точки вектор , от точки вектор .

Тогда суммой векторов будет вектор:

Для любых двух неколлинеарных векторов и имеет место неравенство:

Если векторы и одинаково направлены, то сумма их одинаково направлена со слагаемыми и длина суммы равна сумме длин слагаемых:

Если векторы и противоположно направлены, то их сумма одинаково направлена со слагаемым, имеющим больший модуль. И длина его равняется модулю разности длин слагаемых:

Сумма двух неколлинеарных векторов определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах (рис. 10).

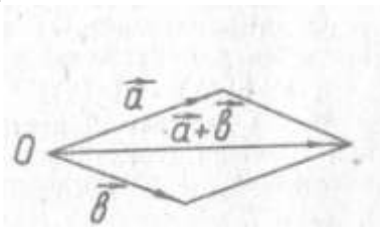


Рис.10.

Свойства сложения векторов

1. Сложение векторов переместительно: .
2. Сложение векторов сочетательно: . Противоположный и нулевой векторы в векторной алгебре играют ту же роль, что и противоположное число, и нуль в арифметике.
3.
4.

Вычитание векторов

Для векторов и существует и только один вектор такой, что и он равен . Этот вектор называется разностью и и находится следующим образом: от произвольной точки О откладываем векторы и , тогда вектор (рис. 11).

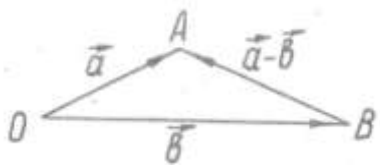


Рис. 11

Умножение вектора на число

Произведением или вектора на действительное число называется новый вектор такой, что:

а) длина вектора равна произведению длины вектора на абсолютную величину числа

б) направление вектора совпадает с направлением вектора , если или противоположное ему, если . Если или , то их произведение является нулевым вектором: .

Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

1. Сочетательности относительно числового сомножителя:

2. Распределительности относительно суммы векторов:

3. Распределительности относительно суммы чисел:

4.

Признак коллинеарности векторов

Для того, чтобы два вектора были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы один из них равнялся другому, умноженному на некоторое действительное число: или . Это эквивалентно тому, что при условии, что и .

Ортом ненулевого вектора называется единичный вектор, одинаково направленный с вектором . Имеет место равенство:

Пример 1.

Даны векторы

Построить (рис. 12).

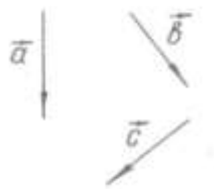


Рис. 12.

Решение:

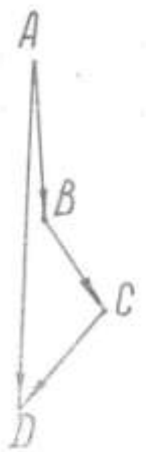


Рис. 13.

Возьмем произвольную точку А и отложим от нее вектор . От точки В отложим вектор . От полученной точки С отложим вектор

По правилу многоугольника , (рис. 13).

Пример 2.

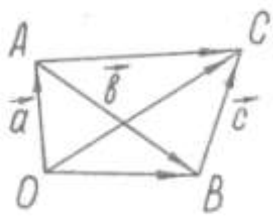


Рис.14.

Докажите сочетательный закон для сложения векторов по рис. 14, где .

Решение:

Требуется доказать, что

Из определения сложения векторов вытекает, что , таким образом .

Зная, что , запишем .

Таким образом, .

Пример 3.

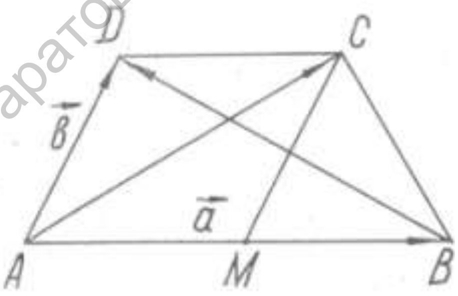


Рис.15

В равнобочной трапеции

Разложить по векторы .

Решение:

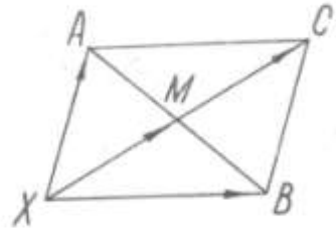
Проведем через точку С прямую, параллельную , (рис.15).
Обозначим через точку ее пересечения с .
Треугольник равнобедренный по построению
Следовательно, он равносторонний:

,

Вектор

Пример 4.
Даны две точки , который делится точкой пополам.
Доказать, что сумма векторов не зависит от отрезка

Решение:



По правилу параллелограмма сложения двух векторов: (рис. 16). Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то – . Таким образом, , то есть сумма векторов не зависит от отрезка

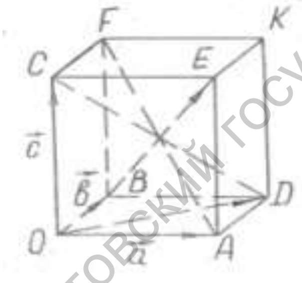
Рис. 16.

Пример 5.
Решить уравнение: где – неизвестный вектор, – заданный вектор.

Решение:

;
, следовательно, .

Пример 6.



На трех некомпланарных векторах построен параллелепипед.

Найти векторы: , (рис. 17).

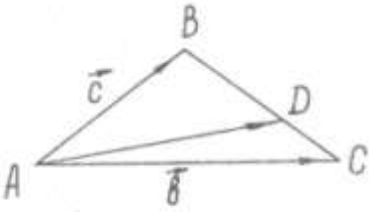
Рис. 17

Решение:

, тогда ,

Искомые векторы:

Пример 7.



В треугольнике на стороне взята точка причем — –

Разложить и , (рис. 18).

Рис. 18

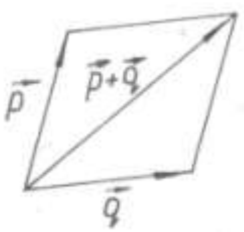
Решение:

Пользуясь известным правилом сложения векторов, запишем

– –

Тогда имеем – или – –

Пример 8.



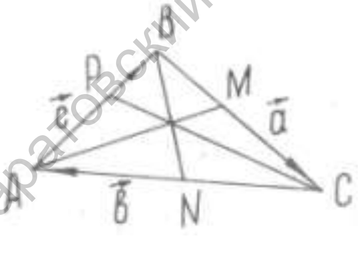
Каким условием должны быть связаны неколлинеарные векторы чтобы вектор делил угол между ними пополам? Предполагается, что все три вектора отнесены к общему началу.

Рис. 19.

Решение:

Вектор , является диагональю параллелограмма (рис. 19), построенного на векторах , как на сторонах. Параллелограмм, угол которого делится диагональю пополам, является ромбом. Следовательно, векторы и должны иметь одинаковую длину, то есть

Пример 9.



Зная векторы, служащие сторонами треугольника найти векторы, соответственно коллинеарные биссектрисам внутренних углов этого треугольника (рис. 20).

Рис. 20.

Решение:

Зная векторы и , найдем орты и .

—, —.

Найдем сумму этих векторов — — этот вектор коллинеарный биссектрисе угла . Аналогично рассуждая, найдем векторы, коллинеарные биссектрисам углов — — — —

Пример 10.

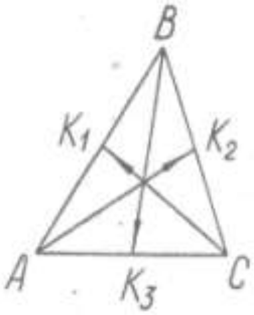


Рис. 21

Проверить, что из векторов, определяемых медианами треугольника, можно составить другой треугольник (рис. 21).

Решение:

Достроим треугольник до параллелограмма, тогда

——; —— ——

Рассмотрим сумму векторов

– .

Пример 11.

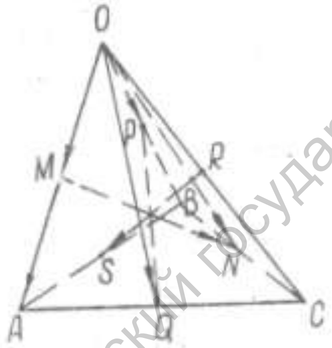


Рис. 22.

Дан тетраэдр

Полагая выразить через векторы где – середины противоположных ребер соответственно.

Решение:

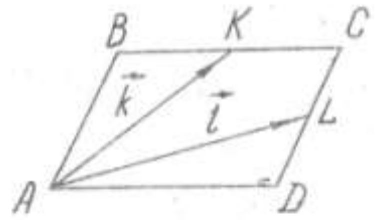
1) Найдем — –

—— ——, (рис. 22).

2) Найдем : —; – ——

определится по аналогии с 1 и 2 случаями: ——

Пример 12.



Точки служат серединами сторон параллелограмма

Полагая выразить через ры , (рис. 23).

Рис. 23.

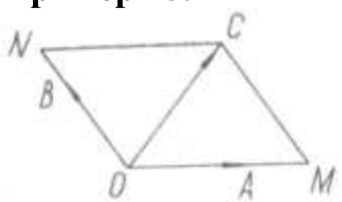
Решение:

Обозначим . Имеем — — Подставляя в равенство — получим: – – откуда —— то есть

——.

Тогда – —— ——, откуда ——.

Пример 13.



Доказать, что если неколлинеарные векторы, то всякий вектор , лежащий в их плоскости (компланарный с) можно разложить по векторам , то есть представить в виде причем числа векторами определяются однозначно.

Рис. 24

Решение:

От произвольной точки отложим векторы (рис. 24). Рассмотрим случай, когда

По условию точки лежат в одной плоскости. В этой плоскости через точку проведем прямые, параллельные прямым Получим параллелограмм По правилу параллелограмма можно записать: Но (по признаку коллинеарности), тогда или . Если же то имели бы соответственно или . Таким образом, возможность разложения показана.

Остается доказать, что числа этим разложением определяются однозначно. Допустим, что вектор имеет два разложения: , . Вычитая из первого равенства второе, получим

Если бы было , то —— , что невозможно, так как векторы и неколлинеарны. Значит обязательно должно быть

Точно так же устанавливается, что вектор иметь не может, что и требовалось доказать. Три вектора являются компланарными тогда и только тогда, когда один из них можно разложить по двум другим.

Пример 14.

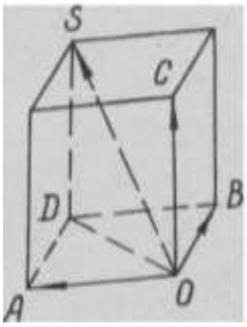


Рис. 25

Найти сумму трех некомпланарных векторов.

Решение:

Пусть надо найти сумму некомпланарных векторов (рис. 25). Отложим от произвольной точки вектора . Построим параллелепипед так, чтобы отрезки были его ребрами. Вектор где – диагональ параллелепипеда, является искомой суммой.

Действительно, Последнее равенство носит название правила параллелепипеда для сложения векторов.

Пример 15.

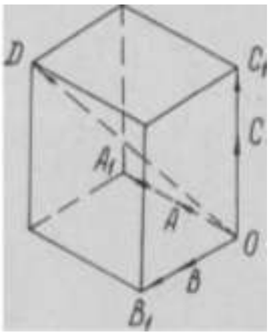


Рис. 26

Доказать, что если — некомпланарные векторы, то любой вектор можно разложить по векторам и , то есть представить в виде

, причем это разложение единственное.

Решение:

От точки O отложим векторы , , , , (рис.26). Если вектор компланарен какой-либо паре исходных векторов , например, векторам и , то можно разложить вектор по векторам и :

(пример 13), а следовательно и по векторам : .

Если же вектор не компланарен ни с какими двумя из трех заданных векторов , то, проводя через точку O плоскости, соответственно параллельные AOB, BOC, COA, получим параллелепипед, в котором отрезок OO — диагональ. Концы ребер, выходящих из вершины O, обозначим через A_1, B_1, C_1.

По правилу параллелепипеда . Но векторы и коллинеарные, поэтому . Аналогично , . Следовательно или . Итак, возможность разложения показана. Теперь докажем единственность.

Допустим, что вектор имеет два разложения и . Вычитая из первого равенства второе, получаем:

.

Если бы было , то , что невозможно так как векторы не компланарны. Значит , то есть . Точно также устанавливается, что , , то есть двух различных разложений один и тот же вектор иметь не может.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают скалярное произведение этих векторов равным нулю.

Скалярное произведение векторов и обозначается .

Согласно определению, , если , .

Перечислим основные свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение двух ненулевых векторов обращается в нуль тогда и только тогда, когда эти векторы взаимно перпендикулярны.

2. Скалярное произведение двух ненулевых векторов положительно, если угол между векторами острый, и отрицательно, если этот угол тупой.

3. Скалярное произведение вектора на этот же вектор равно квадрату его длины. Произведение будем записывать и называть скалярным квадратом вектора .

Тогда свойство 3 можно сформулировать так: скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, то есть .

Скалярное умножение векторов обладает свойствами:

a) (переместительный закон);

b) , (сочетательный закон), где – число.

c) , (распределительный закон).

Операция скалярного умножения применяется в геометрии и в механике:

Для вычисления длин векторов:

для вычисления угла между векторами:

для выражения условия перпендикулярности векторов:

для вычисления работы A и силы F при перемещении :

Пример 1.
Проверить справедливы ли следующие равенства:

a)

b)

Решение:

a)

;

b) .

Пример2.
Даны три вектора и удовлетворяющие условию .
Зная, что , и , вычислить .

Решение:
Возведя обе части равенства в квадрат, получаем:
.
Отсюда следует, что или .

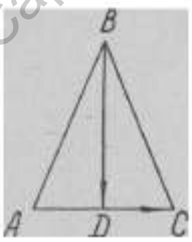
Пример 3.
Зная, что , и , определить, при каком значении векторы и окажутся перпендикулярными.

Решение:

Запишем условие перпендикулярности векторов и :
. Но по условию,
, , .

Следовательно, , .

Пример 4.



Дан равнобедренный треугольник ABC (|AB| = |BC|).

Доказать, что биссектриса угла B является высотой.

Рис.32

Решение:

Рассмотрим векторы и (рис. 32).

,

так как по условию и .Следовательно, ⊥ .

Пример 5.

Пусть ABC — треугольник, O — точка вне плоскости треугольника.

Показать, что

,(рис. 33).

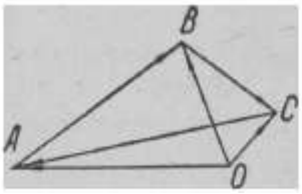


Рис.33

Решение:

Выразим векторы сторон треугольника через вектора , и , получим что

Тогда

=

.

Пример 6.

Вычислить угол между векторами и ,если известно, что векторы и взаимно перпендикулярны и | .

Решение:

Откуда –.

Пример 7.

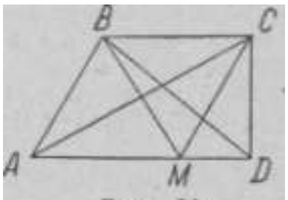


Рис. 34.

В трапеции ABCD боковая сторона перпендикулярна основанию , , (. На основании существует такая точка M, что перпендикулярен , а перпендикулярен . Найти высоту трапеции (рис. 34).

Рис.34

Решение:

Положим , , , . Тогда , , , .

Так как векторы и перпендикулярны, то , откуда или

, (1)

Так как вектор перпендикулярен векторам и , то . Поэтому из (1) имеем

(2)

Так как векторы и коллинеарны и сонаправлены, то . Поэтому из (2) следует, что

(3)

Так как векторы и перпендикулярны, то или ,

(4)

Как уже отмечалось, . На том же основании Поэтому из (4) имеем ,

(5)

Значение из (5) подставляем в (3): , откуда

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных между собой векторов .

В общем случае длины базисных векторов | | и | | и угол между ними могут быть любыми. Мы будем рассматривать базис образованный единичными взаимно перпендикулярными векторами , –, (рис. 36).

Рис.36 г

Любой вектор плоскости можно однозначно разложить по базису (§ 2., пример 13).

Координатами вектора на плоскости относительно базиса называются коэффициенты разложения вектора по базисным векторам и , то есть числа и такие, что .

То, что вектор имеет координаты , записывается так: .

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов .

Мы будем рассматривать базис , образованный единичными взаимно перпендикулярными векторами (рис. 37).

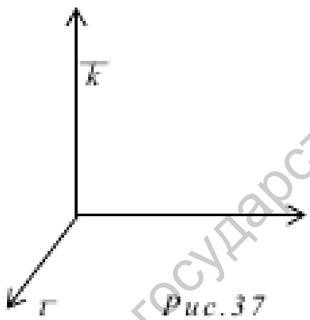


Рис.37 г

Таким образом, имеем всегда: , –.

Любой вектор пространства можно однозначно разложить по базису . Координатами вектора в пространстве относительно базиса называются коэффициенты разложения вектора по базисным векторам , то есть числа такие, что .То, что вектор имеет координаты записывают так: .

Два вектора и равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, то есть: – для плоскости;

– в пространстве. Рассмотрим правила действий над векторами, заданными своими координатами.

1. Каждая координата суммы двух (или более) векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых.

   – для плоскости;

   – в пространстве;

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

   – для плоскости;

   – в пространстве;

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты данного вектора на это число:

   – для плоскости;

   – в пространстве;

4. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

   – для плоскости;

   – в пространстве;

5. Два ненулевых вектора на плоскости и в пространстве коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.
6. Если вектор и , (для плоскости: ,), то (для плоскости: .

Пример 1.
Даны три вектора
Найти координаты векторов:

1.
2. .

Решение:
Обозначим , .
Найдем координаты векторов и :

. Таким образом,

.

Аналогично найдем:

.

Таким образом,

Пример 2. Доказать перпендикулярность диагоналей четырехугольника ABCD, если A(-4; 5), B(-5; 1), C(1; -2), D(2;6).

Решение:
Рассмотрим векторы и : , . Записывая условие перпендикулярности векторов в координатах, убеждаемся, что оно выполняется, а именно:

Пример 3.
В параллелограмме ABCD дано A(- 3; 5), B(1; 7), точка пересечения диагоналей M(1;1). Найти координаты вершин C и D.

Решение:
Имеем: или в координатах: , .
Отсюда , , то есть C(5;-3).
Аналогично рассуждая, находим координаты точки D.
Имеем или , .
Отсюда , , то есть D(1 ;-5).

Пример 4.
Даны три последовательных вершины параллелограмма A(-3;-2; 0), B (3;-3;1) и C(5;0;2). Найти его вершину D и угол между векторами и .

Решение:
Обозначим координаты точки D через x, y, z, то есть D(x, y, z)и рассмотрим векторы и .
Имеем: , то есть , , , откуда получаем
; ; z . Итак, D (-1; 1; 1).
Теперь рассмотрим векторы и .

отсюда .

Пример 5.
Найти вектор , коллинеарный вектору и удовлетворяющий условию .
Решение:
По условию коллинеарен , то есть или в координатах .
Для отыскания используем условие , или .
Найдем , ,
следовательно, .

Пример 6.
Вектор , перпендикулярный векторам и , образует с ортом тупой угол. Найти его координаты, зная, что .
Решение:
Искомый вектор удовлетворяет следующим условиям:

— — —

Данная система имеет два решения: ; , то есть получим два вектора: и .
Искомый вектор образует с ортом тупой угол, что означает, что .
Вычислим и :

,

Ответ:

Аналитическая геометрия на плоскости

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Угловой коэффициент прямой

Определения:

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара взаимно перпендикулярных единичных векторов (.

Координатами вектора на плоскости относительно базиса (. называются коэффициентами разложения вектора по базисным векторам, то есть числа и такие, что .

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка единичных попарно взаимно перпендикулярных векторов (.

Координатами вектора в пространстве относительно базиса (называются коэффициенты разложения вектора по векторам , то есть числа такие, что .

Декартова система координат на плоскости задается точкой О (начало координат) и базисом (.

Определение:

Декартовыми координатами точки М называются координаты вектора в базисе (. Декартовы координаты в пространстве определяются с той лишь разницей, что вместо базиса (берется базис (.

В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени относительно x и y:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.1)$$

и обратно, каждое уравнение (2.1) определяет прямую.

Определения:

Уравнения (2.1) называется общим, уравнением, прямой.

Если в общем уравнении прямой , то разделив (2.1) на , получаем *уравнение прямой в отрезках*

где –, –. Прямая пересекает ось OX в точке , ось OY в точке .

Уравнение прямой, разрешенное относительно y, то есть уравнения вида

(2.2)

называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, где k-угловой коэффициент.

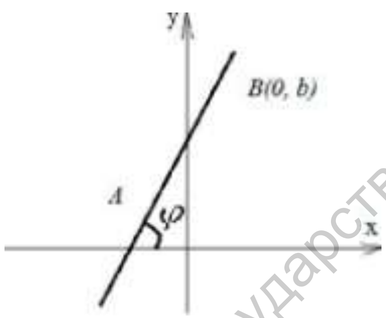


Рис. 2.1.

Если - угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox (рис. 2.1), отсчитываемый против часовой стрелки, то . Параметр называется *начальной ординатой.* Он равен величине отрезка OB, отсекаемого данной прямой на оси Oy, то есть его длине взятой со знаком плюс, если точка B выше оси Ox, и со знаком минус, если ниже.

В частности, для прямых, параллельных оси Ox, , и, следовательно, их уравнение . Прямые, параллельные оси Oy, углового коэффициента не имеют, так как для них . Поэтому такие прямые не могут быть заданы уравнением (2.2). Их уравнение имеет вид , где – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OX.

Угол θ между двумя прямыми и вычисляются по формуле

(2.3)

Если одна из прямых параллельна оси Oy, то формула (2.3) не применима.

Условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2 \qquad (2.4)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$k_1k_2 = -1$ или

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, угловой коэффициент равен k, то она представима уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Предположим, что прямая проходит через точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Если абсциссы и ординаты этих точек различны, то есть $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, то уравнение прямой АВ имеет вид

(2.5)

Упражнение 1

Дан треугольник с вершинами A(1,2), B(4,3) и C(1,3). Составить уравнения его сторон.

Решение:

У точек A и B абсциссы и ординаты различны, следовательно, уравнение стороны AB имеет вид:

Подставляя вместо x_1, y_1 координаты точки A, а вместо x_2, y_2 – координаты точки B, получим:

или .

Точки B и C имеют одинаковые ординаты, следовательно, сторона BC параллельна оси абсцисс, и уравнение ее имеет вид: $y = y_1$. В нашем случае: $y = 3$.

Точки A и C имеют одинаковые абсциссы, следовательно, сторона AC параллельна оси ординат, и уравнение ее имеет вид: $x = x_1$. В нашем случае: $x = 1$.

Упражнение 2

Определить какие из точек $M_1(4, -2)$, $M_2(3, 2)$, $M_3(-6,4)$ лежат на прямой $3x+5y-2=0$ и какие не лежат на ней.

Решение:

Подставим координаты этих точек в уравнение прямой:

M_1: $3*4 + 5*(-2) - 2 = 0$

M_2: $3*3 + 5*2 - 2 \neq 0$

M_3: $3*(-6) + 5*4 - 2 = 0$

то есть M_1, M_3 лежат на данной прямой, а точка M_2 не принадлежит ей.

Упражнение 3

Построить прямую $3x - 4y+7=0$, определив координаты двух каких-нибудь точек прямой.

Решение:

В качестве точек, определяющих прямую, можно взять точки пересечения ее с осями координат. Пусть точка A – точка пересечения прямой с осью Ox; ордината ее равна нулю, для нахождения абсциссы подставим в уравнение прямой значение y=0. Получим: 3x + 7 = 0; x= −: A(−,0). Для определения координат пересечения прямой с осью ординат подставим в уравнение прямой значение x=0.

Получим: –4y + 7 = 0; −; − . Отметим найденные точки A и B и соединим их прямой. Это будет искомая прямая.

<u>Упражнение 4</u>

Найти точку пересечения прямых:

1) 3x–5y–21 = 0, 2x–y–7 = 0:
2) x+3y– 5 = 0, 3x+ 9y+ 7 = 0.

Решение:

1) Решая совместно уравнения первой степени, получим точку пересечения прямых (2, –3).

2) Легко видеть, что для второй системы уравнений: — — − −

Следовательно, прямые, определяемые этой системой, параллельны.

Нормальное уравнение. Расстояние от точки до прямой

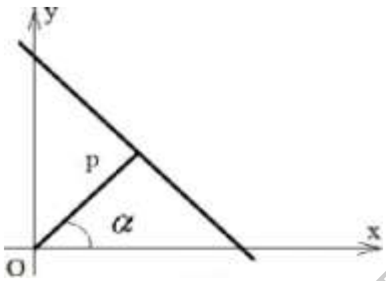


Рис. 2.2.

Если положение прямой относительно осей координат определять длиною перпендикуляра p, опущенного из начала координат на прямую, и углом α, образуемым этим перпендикуляром (рис. 2.2), то уравнение прямой имеет вид

(2.6)

Определение:

Уравнение (2.6) называется *нормальным*. В нормальном уравнении прямой сумма квадратов коэффициентов при x и y равна 1, а свободный член отрицателен. Всякое уравнение прямой общего вида Ax + By + C = 0 может быть приведено к нормальному виду (2.6) умножением всех членов на нормирующий множитель M, определяемый формулой ——.

Знак нормирующего множитель берется противоположным знаку свободного члена C общего уравнения прямой. Если к нормальному виду приводится уравнение вида Ax+By = 0, то нормирующий множитель можно взять как со знаком плюс, так и со знаком минус.

Пусть даны прямая и точка M_0 (x_0, y_0), не лежащая на данной прямой. Расстояние от точки до прямой, то есть длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, обозначим через d. Условимся называть отклонение δ точки M_0 от прямой число +d, если точка M_0 и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и число –d, если точка M_0 и начало координат лежат по одну сторону от прямой. Таким образом, $\delta = \pm d$; для точек, лежащих на прямой $\delta = 0$.

Отклонение точки от данной прямой может быть вычислено по формуле

то есть отклонение точки от прямой равняется левой части нормального уравнения, данной прямой, в которую вместо текущих координат подставлены координаты данной точки. Расстояние d точки от прямой есть абсолютная величина отклонения этой точки от прямой $d = |\delta|$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Окружность

Определение:

Общим уравнением второго порядка называется уравнение вида:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

Линии, определяемые такими уравнениями, называются *кривыми второго порядка*.

Центром некоторой линии называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично парами.

Линии второго порядка, обладающие единственным центром, называются *центральными*.

Окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (центра). Если r – *радиус окружности*, C(a,b)- ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид

(3.1)

Если в правой части уравнения (3.1) раскрыть скобки, то получим уравнение вида

(3.2)

где , ,

Уравнение (3.2) определяет окружность, если .

Если , то уравнению удовлетворяет единственная точка

– –, а если , то оно не имеет геометрического смысла.

Эллипс

Определения:

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (ее обозначают через 2a), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Рис. 3.1.

Если поместить фокусы эллипса в точках $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (рис. 3.1), то получим каноническое уравнение эллипса

— — (3.3)

где a- большая, b -малая полуось эллипса, причем, a, b, c связаны со отношением $a^2 = b^2 + c^2$.

Форма эллипса характеризуется его *эксцентриситетом* –.

Расстояния некоторой точки M(x,y) эллипса от фокусов (фокальные радиусы) определяются формулами $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$.

В силу определения эллипса для любой его точки $r_1 + r_2 = 2a$.

Директрисами эллипса называются прямые, определяемые уравнениями

–

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0,y_0)$ имеет вид

— — (3.4)

Гипербола

Определения:

Гипербола есть геометрическое место точек, модуль разности расстояний которых от двух данных точек (фокусов) есть постоянная величина (ее обозначают через 2a), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

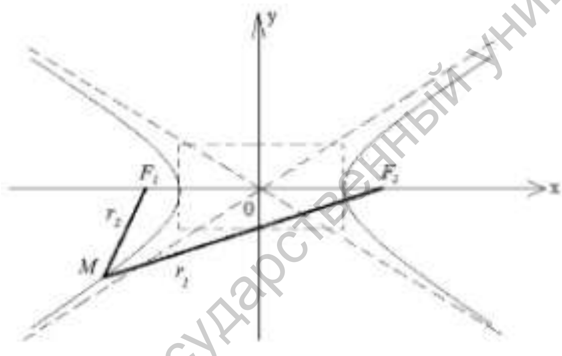


Рис. 3.2

Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$(рис. 3.2), то получим каноническое уравнение гиперболы

— — (3.5)

где a- действительная, b- мнимая полуось и $b^2 = c^2 - a^2$.

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат.

Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние точки M(x,y) от этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых y = ± – x.

На этих прямых лежат диагонали характеристического прямоугольника, основание которого равно 2a, высота 2b, а центр находится в начале координат. Отношение – называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Директрисами гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями x = ±–.

Фокальные радиусы правой ветви гиперболы $r_1 = ex - a$, $r_2 = ex + a$.
Очевидно $r_2 - r_1 = 2a$.

Фокальные радиусы левой ветви гиперболы $r_1 = -ex + a$, $r_2 = -ex - a$. Очевидно $r_1 - r_2 = 2a$.

Уравнение касательной к гиперболе в точке $M(x_0,y_0)$ имеет вид:

— — (3.6)

Парабола

Определение:

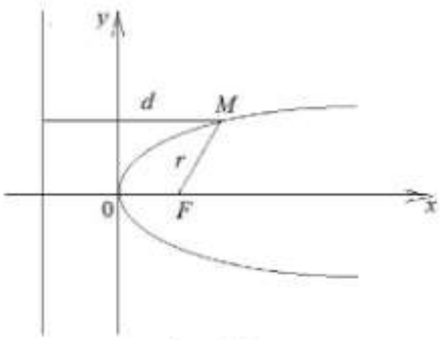


Рис. 3.3

Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Если директрисой параболы является прямая x = – –, а фокусом точка F(–,0) (рис 3.3), то каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px \qquad (3.7)$$

Эта парабола расположена симметрично оси абсцисс. При $p>0$ парабола обращена в положительную сторону оси, а при $p<0$ - в отрицательную.

Фокальный радиус вычисляется по формуле $r = x +$ –.

Уравнение параболы симметричной относительно оси ординат, имеет вид:

(3.8)

Касательная к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M(x_0,y_0)$ определяется уравнением

y (3.9)

<u>Упражнение 1</u>

Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$.

Решение:

В левой части данного уравнения выделяем полные квадраты

$(x^2 + 8x+16) + (y^2-12y + 36) - 16 - 36 - 12 = 0$; $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 64$.

Таким образом, координаты центра окружности $a = -4$, $b = 6$, а радиус окружности $r = 8$.

<u>Упражнение 2</u>

Составить уравнение окружности, касающейся оси Oy и проходящей через точки M(8,0) и N(1,7).

Решение:

Так как окружность касается оси Oy и данные точки лежат в первой четверти, то $a=r$, отсюда уравнение окружности имеет вид $(x - r)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Из условия принадлежности точек M и N окружности, получаем $(8* r)^2+(0-b)^2 = r^2$;

$64 - 16r + b^2 = 0$;

$(1 - r)^2 + (7 - b)^2 = r^2$;

$1 - 2r + r^2 + 49 - 14b + b^2 = 0$;

$50 - 2r + b^2 - 14b = 0$;

Решая систему уравнений

получаем $b_1 = 4$, $b_2 = 12$, $r_1 = 5$, $r_2 = 13$.
Таким образом, искомые уравнения имеют вид:
$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$;
$(x-13)^2 + (y-12)^2 = 169$.

Упражнение 3

Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2+2y^2=8$

Решение:

Приведем уравнение к каноническому виду, разделив обе его частина 8,

— —

Отсюда, $a = 2$ ‾, $b = 2$. Поскольку $c^2 = a^2 - b^2$, то $c=2$. Следовательно, $e =$ –
= —. Уравнения директрис принимают вид $x = \pm 4$.

Упражнение 4

Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4, -1.8)$, если его эксцентриситет равен –.

Решение:

$e =$ – = –, отсюда $c =$ –a. Но $b^2 = a^2 - c^2$; $b =$ —a^2

Из условия принадлежности точки M эллипсу получим другое равенство — — Поскольку $b^2 =$ —a^2, получим — — , то есть $a^2 = 25$ и $b^2 = 9$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид — —

Упражнение 5

Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки M(–4, ‾‾).

Решение:

Разделив обе части уравнение на 20, получим — —. Отсюда $a = 2$, $b =$ ‾. Так как $b^2 = c^2 - a^2$, то $c = 3$, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $e =$ –=–. Поскольку точка M лежит па левой ветви гиперболы r_1 и r_2.

Упражнение 6

На гиперболе — —=1 найти точку, расстояние которой от правого фокуса равно 16.

Решение:

Отделим a и e. Очевидно, $a^2 = 4$, $b^2 = 2$, $c =$ ‾‾‾ = ‾‾‾ = 4. Отсюда $e = 2$. Расстояние до правого фокуса определяется формулами

1) $r_1 = ex - a$; $16 = 2x - 2$; $x = 9$; — – — = 1; — = — – 1; $y = \pm$ ‾‾

2) $r_1 = -ex - a$; $16 = -2x - 2$; $x = -7$; — – — = 1; — =— – 1; $y = \pm$ ‾‾

Следовательно, условию задачи удовлетворяют четыре точки $M_1(9, \quad)$, $M_2(9, - \quad)$, $M_3(-7, \quad)$, $M_4(-7, - \quad)$.

Упражнение 7

Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2 = 16x$. Вычислить расстояние точки M(1,4) от фокуса.

Решение:

Из уравнения видно, что $2p = 16$, откуда $p = 8$, $-$ $=4$. Значит уравнение директрисы параболы имеет вид $x=-4$, фокус параболы находится в точке F (4,0). Точка M(1,4) лежит па параболе, так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2 = 16x$. Фокальный радиус для нее $r=1+4=5$.

Упражнение 8

Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 16x$, проходящей через точку

1) A(1, –4),
2) B(–1,2).

Решение:

1) Точка A лежит на параболе, поэтому, согласно уравнению (3.9) уравнение касательной имеет вид $-4y = 8(x + 1)$; $2x + y + 2 = 0$.

2) Уравнение касательной к параболе $y^2 = 16x$ имеет вид $yy_0 = 8(x + x_0)$, где $M(x_0,y_0)$-точка параболы. Так как па касательной лежит точка B, то $2y_0 = 8(x_0-1)$; но координаты точки $M(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению параболы: $y^2 = 16x_0$. Из последних двух равенств получаем $x_0 =$, $y_0 = 2(1 \pm \quad)$. Таким образом, искомые касательные описываются уравнениями $2(1 \pm \quad)y = 8(x + \quad)$.

Контрольная работа №1

1. Даны три вектора

Найти координаты векторов

a)
b)

2. Проверить, что векторы и образуют базис на плоскости. Найти координаты вектора в этом базисе.
3. Определить, при каком значении параметра векторы и будут коллинеарными.
4. Векторы и образуют угол . Зная и , найти:
   a)
   b)
   c)
   d) длина вектора
   e) при каком значении параметра векторы и будут перпендикулярными.
5. Найти:
   a)
   b)
   c)
   d)
6. Даны четыре вектора , , и
   a) Найти координаты векторов ; 3
   b) Проверить, что векторы , , образуют базис в пространстве. Найти координаты вектора в этом базисе.
7. Найти:
   a)
   b)
   c) Косинус угла между векторами и
8. Векторы и образуют угол . Зная и , найти площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах ; .
9. Найти
   a) ;
   b) ;

c) ;

d) ;

e) ;

f) ;

g) объем тетраэдра, построенного на векторах , ,

Контрольная работа №2

Вариант 1

1) Привести к нормальному виду уравнение $3x + 4y - 10 = 0$
2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки $A(2,-1)$ до прямой $4x+3y+10=0$
3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $2x + 3y - 6 = 0$
4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$
5) Проверить, что четыре точки A (3;-1), B (1; 2), C(-1; 1), D(3;5) служат вершинами трапеции.

Вариант 2

1) Привести к нормальному виду уравнение $x+6=0$
2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки $Q(l, -2)$ до прямой $10x+24y+15=0$
3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, дляпрямой $3y - 3 = 0$
4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $3y^2 - x^2 = 12$
5) Точки M(2;-1), N(-1; 4), P(-2; 2) являются серединами сторон треугольника ABC. Найти координаты его вершин.

Вариант 3

1) Привести к нормальному виду уравнение $x \quad ^{-} + y - 8 = 0$
2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки $P(-2,3)$ до

прямой $3x–4y–2=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $5x– y + 3 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 16y^2 = 36$

5) Даны вершины четырехугольника A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1) и D (-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Вариант 4

1) Привести к нормальному виду уравнение $12x –5y + 39 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки B(0, –3) до прямой $5x–12y–23=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $5x + 3y + 2 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2– 144y^2 = 3600$

5) Найти центр тяжести треугольника ABC, если A(2;0), B(6;4), C(2,6).

Указание. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан.

Вариант 5

1) Привести к нормальному виду уравнение $x+6=0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки A(2, –1) до прямой $4x+3y+10=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых $3x + 2y = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 9y^2 = 81$

5) Точки M(2;-1), N(-1; 4), P(-2; 2) являются серединами сторон треугольника ABC. Найти координаты его вершин.

Вариант 6

1) Привести к нормальному виду уравнение $3x + 4y– 10 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки P(–2,3) до прямой $3x–4y–2=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для прямой$5x - y + 3 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $x^2 - 2y^2 = 8$

Вариант 7

1) Привести к нормальному виду уравнение $x\ \overline{} + y - 8 = 0$
2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки А(2, –1) до прямой $4x+3y+10=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для прямой $2x + 3y - 6 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса$x^2 + 4y^2 = 16$
5) Даны вершины четырехугольника А (1; -2; 2), *В* (1; 4; 0), С (-4; 1; 1)и *D*(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали *АС* и *BD*взаимно перпендикулярны

Вариант 8

1) Привести к нормальному виду уравнение$3x + 4y - 10 = 0$
2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки Q(l, –2) до прямой $10x+24y+15=0$
3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для прямой $5x + 3y + 2 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы$3y^2 - x^2 = 12$
5) Проверить, что четыре точки А (3;-1),*В* (1; 2), С(-1; 1), D(3;5) служат вершинами трапеции.

Вариант 9

1) Привести к нормальному виду уравнение$12x - 5y + 39 = 0$
2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки Р(–2,3) до прямой$3x - 4y - 2 = 0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для прямой$5x - y + 3 = 0$

4)Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса$9x^2 + 16y^2 = 36$

5) Найти центр тяжести треугольника ABC, если A(2;0), B(6;4), C(2,6).

Указание. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан.

Вариант 10

1) Привести к нормальному виду уравнение$x+6=0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки A(2, –1) до прямой $4x+3y+10=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $3y– 3 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2– 144y^2 = 3600$

5) Точки M(2;-1), N(-1; 4), P(-2; 2) являются серединами сторон треугольника ABC. Найти координаты его вершин.

Вариант 11

1) Привести к нормальному виду уравнение$3x + 4y– 10 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки Q(l, –2) до прямой $10x+24y+15=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых $3x + 2y = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$

5) Проверить, что четыре точки A (3;-1),*B* (1; 2), C(-1; 1), D(3;5) служат вершинами трапеции.

Вариант 12

1) Привести к нормальному виду уравнение $x\ \overline{\ } + y – 8 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки B(0, –3) до прямой$5x–12y–23=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $2x + 3y– 6 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2– 144y^2 = 3600$

5) Даны вершины четырехугольника A (1; -2; 2), *B* (1; 4; 0), C (-4; 1; 1)и *D*(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали *AC* и *BD*взаимно перпендикулярны

Вариант 13

1) Привести к нормальному виду уравнение$12x - 5y + 39 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки A(2, –1) до прямой $4x+3y+10=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для прямой $5x + 3y + 2 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$

5) Даны вершины четырехугольника A (1; -2; 2), *B* (1; 4; 0), C (-4; 1; 1)и *D*(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали *AC* и *BD*взаимно перпендикулярны

Вариант 14

1) Привести к нормальному виду уравнение $x+6=0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки P(–2,3) до прямой$3x-4y-2=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для прямой $3y - 3 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2 - 144y^2 = 360$

5) Точки M(2;-1), N(-1; 4), P(-2; 2) являются серединами сторон треугольника ABC. Найти координаты его вершин.

Вариант 15

1) Привести к нормальному виду уравнение$12x - 5y + 39 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки Q(l, –2) до прямой $10x+24y+15=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для каждой из прямых$3x + 2y = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$

5) Найти центр тяжести треугольника ABC, если A(2;0), B(6;4), C(2,6).

Указание. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан

Вариант 16

1) Привести к нормальному виду уравнение$3x + 4y - 10 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки A(2, –1) до прямой $4x+3y+10=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $2x + 3y - 6 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2 - 144y^2 = 360$

5) Даны вершины четырехугольника A (1; -2; 2), *B* (1; 4; 0), C (-4; 1; 1)и *D*(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали *AC* и *BD*взаимно перпендикулярны

Вариант 17

1) Привести к нормальному виду уравнение $x\;\overline{} + y - 8 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки B(0, –3) до прямой$5x-12y-23=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $3y - 3 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$

5) Проверить, что четыре точки A (3;-1),*B* (1; 2), C(-1; 1), D(3;5) служат вершинами трапеции.

Вариант 18

1) Привести к нормальному виду уравнение $x+6=0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки P(–2,3) до прямой$3x-4y-2=0$

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $5x + 3y + 2 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2 - 144y^2 = 360$

5) Точки M(2;-1), N(-1; 4), P(-2; 2) являются серединами сторон треугольника ABC. Найти координаты его вершин.

Вариант 19

1) Привести к нормальному виду уравнение$3x + 4y - 10 = 0$

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки A(2, –1) до прямой 4x+3y+10=0

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых$3x + 2y = 0$

4) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$

5) Найти центр тяжести треугольника ABC, если A(2;0), B(6;4), C(2,6).

Указание. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан

Вариант 20

1) Привести к нормальному виду уравнение x ‾+ y – 8 = 0

2) Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки Q(l, –2) до прямой 10x+24y+15=0

3) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $5x + 3y + 2 = 0$

4) Найти полуоси, фокусы эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2 - 144y^2 = 360$

5) Даны вершины четырехугольника A (1; -2; 2), *B* (1; 4; 0), C (-4; 1; 1)и *D*(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали *AC* и *BD*взаимно перпендикулярны

Контрольная работа №3

Во всех задачах λ является номером варианта.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-3,λ) и параллельной прямой

a) $x-(\lambda+1)y+5=0$
b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{\lambda+1}$
c) $x=\lambda-2$
d) $\begin{cases} x = 3+\lambda t \\ y = \lambda - 7t \end{cases}$

2. При каких значениях параметра α прямые $\alpha x-(4+\lambda)y=6$ и $x-\alpha y=\lambda$

a) пересекаются
b) параллельны
c) совпадают

3. Найти расстояние от точки A(1,-λ) до прямой, заданной своим уравнением:

a) 2x-3y+λ=0
b) 4x=λy
c) x=λ-5

Система координат прямоугольная.

4. Даны уравнения сторон треугольника:

x+2y+(1-λ)=0; 2x-λy-2=0; 2x+y+2=0.

Составить уравнение высоты, опущенной на третью сторону. Система координат прямоугольная.

5. Найти угол между прямыми

a) 2x+y-1=0 и y-λx=2;
b) x=4 и 2x-(λ+1)y-1=0;
c) $\frac{x-\lambda}{3}=\frac{y-1}{-\lambda-1}$ и $\frac{x-1}{\lambda+1}=\frac{y+2}{3}$.

Система координат прямоугольная.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки (если эти точки определяют плоскость):

a) A(2, λ, 3), B(-λ, 2, 5), C(3, 0, 1);
b) A(1, -1, λ), B(2, λ, 4), C(-1, 1, λ-1);
c) A(λ+2, 0, 0), B(0, -1, 0), C(0, 1, λ+3);
d) A(1, 1, λ-1), B(λ+1, 3, 3), C(1-λ, -1, λ-5).

7. Даны две плоскости: λx+αy+λz-λ=0 и αx+(λ+3)y+ $\frac{\alpha^2}{\lambda+3}z+3=0$.

При каких значениях параметра α плоскости

a) пересекаются,
b) параллельны,
c) совпадают?

8. Дана точка A(1, -1, λ) и плоскость x-3y+λz-λ=0

a) найти расстояние от точки A до плоскости,

b) написать уравнение прямой, проходящей через точку А перпендикулярно этой плоскости. Найти координаты точки пересечения полученной прямой с плоскостью (Система координат прямоугольная)
c) пересечёт ли отрезок АВ данную плоскость, если координаты точки В(-3, 1, 2)?

9. Найти угол между плоскостями:

a) $x+4y-\lambda z+1=0$ и $\lambda x+y-z-3=0$,
b) $x+2y-2\lambda z=0$ и $z=\lambda+1$,
c) $\begin{cases} x = 1-u \\ y = 2-(\lambda+1)u - v \\ z = 7+u+\lambda v \end{cases}$ и $x+(\lambda+1)y-z+1=0$

Система координат прямоугольная.

10. Даны две прямые. Установить, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются, найти координаты точки их пересечения:

a) $\begin{cases} x+z-1=0 \\ 3x+y-\lambda z+\lambda=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-\lambda y+3=0 \\ y+\lambda z-8=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=\lambda+t \\ y=-1+\lambda t \\ z=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-\lambda y+2z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2+2\lambda t \\ y=-3\lambda t \\ z=-1-8t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=7-6t \\ y=2+9t \\ z=2(\lambda-1)t \end{cases}$

d) $\frac{x}{1}=\frac{y}{\lambda}=\frac{z-2}{-\lambda}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{\lambda}=\frac{z}{-\lambda}$.

Список использованной литературы:

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры Москва ; Краснодар : Лань, 2003.

2. А.Ф. Пелевина, И.Г.Зорина Векторная алгебра. Аналитическая геометрия.; МГТУ им. Н.Э.Баумана; 2002

3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра; Физматлит; 2003

4. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра ; МФТИ; 2009